



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**CARRERA BIOFÍSICA**

**“ROMPIMIENTOS DE SIMETRÍAS INDUCIDOS POR  
UNA PARED DE DOMINIO  $S^0(10)$ ”**

**Trabajo de Titulación:**

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar el grado académico de:

**BIOFÍSICA**

**AUTORA:** RUTH MICAELA ILLICACHI GUAMÁN

**DIRECTOR:** PhD. ROMMEL DE LACRUZ GUERRERO MORA

Riobamba-Ecuador

2020

**©2020, Ruth Micaela Illicachi Guamán**

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Ruth Micaela Illicachi Guamán, declaro que el presente trabajo de titulación es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autora asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este trabajo de titulación; El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 21 de agosto de 2020

**Ruth Micaela Illicachi Guamán**

**0605708148-**

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**CARRERA DE BIOFÍSICA**

El Tribunal de la Comisión de Trabajo de Titulación certifica que: El trabajo de titulación: Tipo: Proyecto de investigación, **ROMPIMIENTOS DE SIMETRÍAS INDUCIDOS POR UNA PARED DE DOMINIO *SO*(10)**, de responsabilidad de la señorita **Ruth Micaela Illicachi Guamán**, ha sido minuciosamente revisado por los miembros de Tribunal del trabajo de Titulación, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, quedando autorizada su presentación.

	Firma	Fecha
Dr. Richard Willians Pachacama Choca. <b>PRESIDENTE DEL TRIBUNAL</b>	<p style="text-align: center;">RICHARD WILLIANS PACHACAMA CHOCA</p> <p style="font-size: small; text-align: center;">Firmado digitalmente por RICHARD WILLIANS PACHACAMA CHOCA Nombre de reconocimiento (DN): c=EC, serialNumber=6601921703, sn=PACHACAMA CHOCA, cn=RICHARD WILLIANS PACHACAMA CHOCA, 1.3.6.1.4.1.37442.10.4-0601921703, givenName=RICHARD WILLIANS, email=rpachacama@gmail.com, o=RICHAMBA, INC-CHIMBORAZO, ou=Certificado de Clase 2 de Persona Física EC (RIRMA)</p>	2020-08-21
Dr. Rommel de LaCruz Guerrero Mora. <b>DIRECTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN</b>	<p style="text-align: center;">ROMMEL DE LACRUZ GUERRERO MORA</p> <p style="font-size: small; text-align: center;">Firmado digitalmente por ROMMEL DE LACRUZ GUERRERO MORA Fecha: 2020.08.28 08:42:55 -05'00'</p>	2020-08-21
Dr. Rafael Omar Rodríguez. <b>MIEMBRO DEL TRIBUNAL</b>	<p style="text-align: center;">RAFAEL OMAR RODRIGUEZ - 137160901</p> <p style="font-size: small; text-align: center;">Firmado digitalmente por RAFAEL OMAR RODRIGUEZ - 137160901 Fecha: 2020.08.28 09:03:46 -05'00'</p>	2020-08-21

## **DEDICATORIA**

Dedicado a mis padres, mis hermanos y a mi adorado Hachick.

Ruth

## AGRADECIMIENTO

A mi padre Juan Illicachi y a mi madre María Guamán por ser los autores principales de la persona que soy hoy en día; todos mis logros se los debo a ustedes ya que con su amor, trabajo y sacrificio diario me mostraron el camino hacia la superación. ¡Estaré siempre en deuda con ustedes!

A mi hermano Andrés y a mi hermana Tamyá, por brindarme un hombro donde descansar.

A mi querido amigo de cuatro patas Hachick, por el cariño puro y sincero que me permitió encontrar el lado dulce y no amargo de la vida.

A Víctor, por sus palabras de aliento y apoyo incondicional.

A mis grandes amigas, Maribel, Noemí, Sofía y Zuleima que de una forma u otra hicieron la vida más placentera fuera y dentro de la ESPOCH.

A la Fundación Hanns Seidel Ecuador, por su confianza e inversión total en mi potencial, por ser ese apoyo que refleja la realización de los sueños más imposibles. No hay manera de agradecer toda la instrucción que recibí desde un enfoque de Humanidad, Respeto y Tolerancia, mismas que considero yo, claves fundamentales para la formación de un profesional en la actualidad.

A mi tutor de tesis, PhD. Rommel Guerrero, por su paciencia, generosidad y sabiduría al momento de orientarme teórica y metodológicamente de forma correcta. Además, su apoyo y amistad me permitieron aprender mucho más que lo estudiado. ¡Infinitas gracias!

A cada profesor y profesora que conocí durante mi formación académica de pregrado, por compartir sus conocimientos tanto de la profesión como de la vida.

A la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, por ser un hogar más, un hogar que al abrirme las puertas veló de forma directa o indirecta mi formación tanto personal como académica.

Ruth

## TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE GRÁFICOS.....	viii
ÍNDICE DE ANEXOS .....	ix
ABREVIATURAS.....	x
RESUMEN .....	xi
ABSTRACT.....	xii
INTRODUCCIÓN .....	1

## CAPÍTULO I

1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL .....	2
1.1 Antecedentes .....	2
1.2 Planteamiento del problema .....	2
1.3 Justificación .....	3
1.4 Objetivos .....	4
1.4.1 <i>Objetivo general</i> .....	4
1.4.2 <i>Objetivos específicos</i> .....	4
1.5 Marco teórico.....	4
1.5.1 <i>Paredes de dominio</i> .....	4
1.5.2 <i>Rompimiento espontáneo de simetría</i> .....	11
1.5.2.1 <i>Potencial con simetría <math>U(1)</math></i> .....	11
1.5.2.2 <i>Potencial con simetría <math>SO(3)</math></i> .....	12
1.5.3 <i>Las paredes y la ruptura de simetrías continuas</i> .....	13

## CAPÍTULO II

2. MARCO METODOLÓGICO .....	14
-----------------------------	----

<b>2.1</b>	<b>Pared de dominio o kink en <math>SO10</math>.</b>	14
<b>2.2</b>	<b>Ecuaciones de movimiento</b>	16
<b>2.3</b>	<b>Soluciones pared de dominio</b>	16
<b>2.3.1</b>	<i>Solución simétrica</i>	16
<b>2.3.2</b>	<i>Solución asimétrica</i>	17
<b>2.3.3</b>	<i>Solución superasimétrico</i>	17
<b>2.3.4</b>	<i>Escenario simétrico</i>	18
<b>2.3.5</b>	<i>Escenario asimétrico</i>	18
<b>2.3.6</b>	<i>Escenario superasimétrico</i>	18

### **CAPÍTULO III**

<b>3.</b>	<b>MARCO DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS</b>	21
<b>3.1</b>	<b>Soluciones Pared de Dominio en <math>SO10</math></b>	21
<b>3.1.1</b>	<i>Solución A</i>	21
<b>3.1.2</b>	<i>Solución B</i>	22
<b>3.1.3</b>	<i>Solución C</i>	24
	<b>CONCLUSIONES</b>	26
	<b>RECOMENDACIONES</b>	27

### **BIBLIOGRAFÍA**

### **ANEXOS**



## ÍNDICE DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1-1:</b> Potencial con ruptura espontánea de simetría.....	5
<b>Gráfico 2-1:</b> Una pared de dominio en el eje zeta .....	8
<b>Gráfico 3-1:</b> Densidad de energía .....	9
<b>Gráfico 1-3:</b> Soluciones para el escenario simétrico .....	22
<b>Gráfico 2-3:</b> Soluciones para el escenario asimétrico .....	24
<b>Gráfico 3-3:</b> Soluciones para el escenario superasimétrico.....	25

## ÍNDICE DE ANEXOS

- ANEXO A:** 45 MATRICES ASOCIADAS A  $S010$
- ANEXO B:** CÓDIGO PARA OBTENER EL SISTEMA DE CINCO ECUACIONES DIFERENCIALES QUE REPRESENTEN LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA NUESTRO SISTEMA.
- ANEXO C:** TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN A PRIMER ORDEN
- ANEXO D:** SOLUCIONES TIPO KINK AL SISTEMA-CÓDIGO DE MATLAB

## **ABREVIATURAS**

BVP

Problemas de valores de límites

## RESUMEN

El objetivo de este trabajo fue determinar soluciones del tipo pared de dominio a una teoría de campo escalar simétrica bajo el grupo  $SO(10)$  para lo cual se consideró el sistema Klein Gordon y el campo escalar en la representación adjunta de  $SO(10)$ . Siendo así que lo primero fue representar un lagrangiano en relación con el potencial escalar de cuarto orden más general invariante bajo simetría  $Z_2$  y  $SO(10)$ , posterior a esto, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange se encontró las ecuaciones de movimiento de las componentes del campo escalar no abeliano, un sistema de cinco ecuaciones diferenciales ordinarias, que fueron integradas numéricamente empleando el método de problemas de valores de límites (BVP) en Matlab con `bvp4c`. Se concluye que fue posible encontrar tres soluciones que asintóticamente indujeron el rompimiento del grupo  $SO(10)$  en  $SU(5)$ , mismas que se denominaron como simétrico, asimétrico y superasimétrico, y que exhibieron diferentes patrones de rompimiento en el centro de cada escenario. Para el caso simétrico se mantuvo la simetría  $SO(10)$  mientras que para el escenario asimétrico se recuperó  $SO(6) \times SU(2) \times U(1)$  y para el escenario superasimétrico  $SU(4) \times SO(2) \times U(1)$ . Finalmente, se recomienda hacer extensión del sistema Klein Gordon a otros grupos de simetría asociados a problemas de gran unificación donde la pared de dominio rompa el grupo de simetría al compatible con el Modelo Estándar.

**Palabras clave:** <BIOFÍSICA>, <ROMPIMIENTOS DE SIMETRÍAS>, <SOLUCIONES TIPO PARED DE DOMINIO >, <SOLUCIONES TIPO KINK> <GRUPO  $SO(10)$ >, <ECUACIONES DE MOVIMIENTO>, <PATRONES DE SIMETRÍA RESIDUALES > <POTENCIAL>.



12-08-2020

[0200-DBRAI-UPT-2020

## ABSTRACT

The objective of this work was to determine solutions of the domain wall type to a symmetric scalar field theory under the  $SO(10)$  group, for which the Klein Gordon system and the scalar field were considered in the attached representation of  $SO(10)$ . Thus, the first thing was to represent a Lagrangian in relation to the invariant more general fourth-order scalar potential under symmetry  $Z_2$  and  $SO(10)$ , after this, from the Euler-Lagrange equations the equations of motion of the components of the non-abelian scalar field, a system of five ordinary differential equations, which were numerically integrated using the Limit Value Problem (BVP) method in Matlab with `bvp4c`. It is concluded that it was possible to find three solutions that asymptotically induced the breakdown of the  $SO(10)$  group in  $SU(5)$ , which were called symmetric, asymmetric and supersymmetric, and that exhibited different patterns of break in the center of each scenario. For the symmetric case, the symmetry  $SO(10)$  was maintained while for the asymmetric scenario  $SO(6) \times SU(2) \times U(1)$  was recovered and for the supersymmetric scenario  $SU(4) \times SO(2) \times U(1)$ . Finally, it is recommended to extend the Klein Gordon system to other symmetry groups associated with large unification problems where the domain wall breaks the symmetry group to the one compatible with the Standard Model.

Keywords: <BIOPHYSICS>, <SYMMETRY BREAKINGS>, <DOMAIN WALL TYPE SOLUTIONS>, <KINK TYPE SOLUTIONS> <GROUP  $SO(10)$ >, <MOTION EQUATIONS>, <RESIDUAL SYMMETRY PATTERNS> <POTENTIAL> .

## INTRODUCCIÓN

En trabajos como los de Pogosian y Vachapasti, así como también los de Shin y Volkas sugieren que las soluciones tipo pared de dominio son una realización de nuestro universo generada por un campo escalar en el sistema Klein-Gordon. Estas paredes no poseen una simetría de calibre interna por lo tanto reproducirlas en una simetría no abeliana, como  $SO(10)$  y además invariante bajo  $Z_2$  resulta interesante ya que si se llega a alcanzar valores mínimos en el potencial, la simetría se rompe, y si las condiciones de borde son adecuadas, estas podrían corresponder a la simetría del Modelo Estándar o a una que tenga embebida la simetría del Modelo Estándar.

En este trabajo, considerando un espacio tiempo de Minkowski plano se recuperan soluciones tipo pared de dominio, integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento que las componentes del campo escalar no abeliano arrojan con condiciones de borde que están en correspondencia con la ruptura de simetría  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ .

En el Capítulo I, se hace la revisión de algunos artículos que servirán de guía para el desarrollo de este trabajo ya que han reportado soluciones tipo pared de dominio y los patrones de simetría que exhiben al inducir asintóticamente el rompimiento de simetría. Además, se presenta la definición de pared de dominio y sus rupturas, así como también un par de ejemplos que involucran simetrías continuas.

En el Capítulo II, se reporta el potencial de cuarto orden con simetría  $SO(10) \times Z_2$  más general para el grupo no abeliano  $SO(10)$  y a partir del lagrangiano se determina el sistema de ecuaciones de movimiento para las componentes del campo  $\phi$ . Por último, se encuentran tres soluciones tipo kink que inducen asintóticamente el rompimiento de  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ , mismas que se diferencian por los rompimientos que exhiben en el centro de cada escenario.

En el Capítulo III se integran numéricamente el sistema de ecuaciones de las componentes del campo escalar  $\phi$ . Este sistema de ecuaciones ya se encuentra resuelto para el caso desacoplado y lo que se presenta aquí, es la resolución del mismo para el caso acoplado pero numéricamente.

# CAPÍTULO I

## 1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

### 1.1 Antecedentes

Los antecedentes de esta investigación están soportados en los siguientes trabajos:

En el trabajo *Domain Wall in SU(5)* de Pogosian y Vachaspati (2000, pp. 2–5) encuentran una solución del tipo pared de domino al sistema acoplado Klein-Gordon. Esta solución se caracteriza por ser localmente estable e inducir asintóticamente el rompimiento de simetría  $SU(5) \times Z_2 \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

Asimismo en *O(10) kinks: Clash symmetries on the brane and the gauge hierarchy problem* de Shin y Volkas (2004, pp. 3–12) reportan tres paredes de dominio compatibles con el grupo de simetría  $SO(10)$ , cada una en correspondencia con la ruptura  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ .

Siguiendo el mismo contexto en *Self-gravitating non-abelian kinks as a brane worlds* de Melfo et al (2011, pp. 1–3); hallan las versiones gravitacionales de las paredes de dominio  $SU(5)$  reportadas por Pogosian y Vachaspati (2000, pp. 2–5). Además, estudian la localización cuatro dimensional de campos de materia y de calibre.

Finalmente en *SO(10) thick branes and perturbative stability* de Chavez et al (2017, pp. 2–7) determinan la generalización a espacio-tiempo curvo de las paredes reportadas por Shin y Volkas (2004, pp. 3–12). Adicionalmente estudian la estabilidad perturbativa de los escenarios.

En todos estos trabajos se han desacoplado las ecuaciones de movimiento de las componentes del campo escalar para encontrar soluciones al problema de contorno de interés. En esta investigación, se propone hallar nuevas soluciones, solamente en el caso  $SO(10)$ , integrando numéricamente el sistema de ecuaciones acoplado que resulta para las componentes del campo no abeliano.

### 1.2 Planteamiento del problema

Las paredes de dominio son soluciones al sistema acoplado Einstein-Klein-Gordon con un potencial con rompimiento espontáneo de simetría, donde el campo escalar interpola entre los mínimos del potencial.

Las fluctuaciones gravitacionales en las paredes de dominio se caracterizan por un modo de masa nula localizado en cuatro dimensiones y en correspondencia con el potencial de Newton, y una torre de excitaciones masivas que generan pequeñas desviaciones en la interacción Newtoniana.

Para que una pared de dominio corresponda a una realización de nuestro Universo, además de reproducir la interacción gravitacional estándar, es necesario recuperar en el sector cuatro dimensional del modelo, las interacciones descritas por el Modelo Estándar de las partículas fundamentales.

Las interacciones fundamentales están asociadas a teorías de calibre con un grupo de simetría; por ejemplo, el conjunto de las matrices unitarias forman el grupo  $U(1)$  que es justamente el grupo de simetría asociada a la electrodinámica. Otro ejemplo es el grupo  $SU(n)$ , matrices  $n \times n$  de entradas complejas, que cuando  $n = 2$  describe la interacción nuclear débil y cuando  $n = 3$  describen la interacción nuclear fuerte.

En concreto, la simetría del Modelo Estándar está determinada por el grupo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , y para recuperarla sobre una pared de dominio es conveniente considerar la invarianza del sistema Klein-Gordon bajo un grupo no abeliano que contenga al Modelo Estándar, como  $SU(5)$  o  $SO(10)$ . Cuando el campo escalar de la pared toma el valor donde el potencial es mínimo, la simetría se rompe, y si las condiciones de borde son adecuadas, esta podría corresponder a la simetría del Modelo Estándar o a una que tenga embebida la simetría del Modelo Estándar.

En este trabajo se quiere recuperar soluciones del tipo pared de dominio o kink al sistema Klein-Gordon sin gravitación e invariante bajo el grupo  $SO(10)$ , y determinar las simetrías inducidas cuando el campo interpola entre los mínimos del potencial del sistema. Para ello se integran numéricamente las ecuaciones de movimiento de las componentes de campo escalar no abeliano con condiciones de borde en correspondencia con la ruptura de simetría  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ .

### 1.3 Justificación

Si las paredes de dominio corresponden a una realización de nuestro universo, entonces, además de la gravitación convencional, las interacciones fundamentales deben estar localizadas en el sector cuatro dimensional de modelo. Un acercamiento a la solución de este problema consiste en considerar que el campo escalar en el sistema Klein-Gordon es un campo de  $SU(5)$  o  $SO(10)$  de tal manera que cuando alcance sus valores asintóticos, la simetría no abeliana se rompa convenientemente a la del Modelo Estándar, es decir,  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

En los trabajos de Shin y Volkas (2004, pp. 3–12) se restringe el espacio de parámetros del modelo de forma tal que las ecuaciones de movimiento de las componentes del campo resulten desacopladas. Aquí, se tomará un campo escalar en la representación adjunta de  $SO(10)$  y no se harán restricciones sobre los parámetros, las soluciones se obtendrán integrando numéricamente las ecuaciones de las componentes del campo escalar.



## 1.4 Objetivos

### 1.4.1 *Objetivo general*

Determinar soluciones del tipo pared de dominio a una teoría de campo escalar simétrica bajo el grupo  $SO(10)$ .

### 1.4.2 *Objetivos específicos*

- Determinar el potencial escalar de cuarto orden más general invariante bajo las simetrías  $Z_2$  y  $SO(10)$ .
- Especificar las condiciones de bordes compatibles con el rompimiento de simetría  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ .
- Encontrar las ecuaciones de movimiento de las componentes del campo escalar no abeliano.
- Hallar soluciones del tipo pared de dominio compatibles con el rompimiento de simetría  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ .

## 1.5 Marco teórico

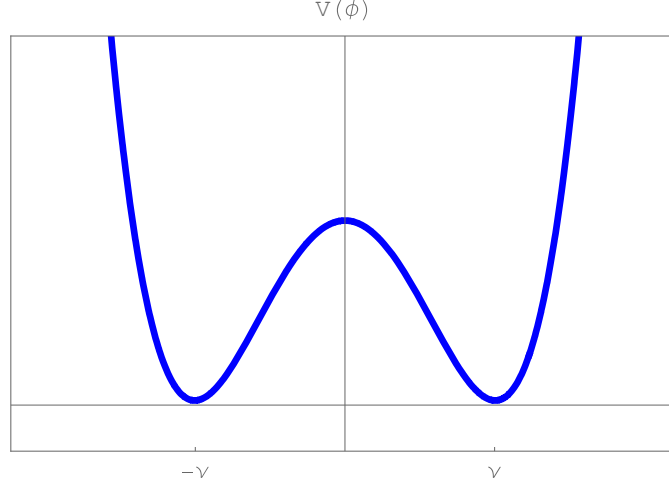
### 1.5.1 *Paredes de dominio*

En las teorías con un potencial escalar  $V(\phi)$  simétrico bajo transformaciones del grupo  $Z_2$ ,  $\phi \rightarrow -\phi$ , es factible encontrar para el campo una solución que interpola suavemente entre los mínimos del potencial; tal configuración se denominan pared de dominio y se caracteriza por generar una densidad de energía que se interpone como un muro entre los vacíos del sistema. Como ejemplo, a continuación, se considera el Lagrangiano de un campo escalar estático en auto-interacción,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \quad (1)$$

donde el valor de expectación en el vacío  $vev$  del campo está determinado por (ver Gráfico 1-1)

$$\langle \phi \rangle = \pm v \quad (2)$$



**Gráfico 1-1:** Potencial con ruptura espontánea de simetría.

Realizado por: Illicachi, Ruth. 2020

Si el campo depende únicamente de una coordenada, como  $z$ , desarrollando la siguiente ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \right) = 0, \quad (3)$$

tomando el primer término de (3) y derivando (1) con respecto a  $\phi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right), \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi}_0 - \frac{\lambda}{4} [2(\phi^2 - v^2)(2\phi)], \\ &= -\lambda \phi (\phi^2 - v^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Continuando con el segundo término de (3) y derivando (1) con respecto a  $\partial_\alpha \phi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \left( -\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right), \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \eta^{\mu\beta} \partial_\beta \phi - \frac{\lambda}{4} \underbrace{(\phi^2 - v^2)^2}_0, \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\mu\beta} \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \phi)} (\partial_\mu \phi \partial_\beta \phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\phi)}(\partial_\mu\phi)(\partial_\beta\phi) + \partial_\mu\phi\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\phi)}(\partial_\beta\phi)\right]\right], \\
&= -\frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}[\delta_\mu^\alpha(\partial_\beta\phi) + (\partial_\mu\phi)\delta_\beta^\alpha], \\
&= -\frac{1}{2}[\eta^{\mu\beta}\delta_\mu^\alpha(\partial_\beta\phi) + \eta^{\mu\beta}(\partial_\mu\phi)\delta_\beta^\alpha], \\
&= -\frac{1}{2}\left[\eta^{\alpha\beta}(\partial_\beta\phi) + \underbrace{\eta^{\mu\alpha}}_{\eta^{\alpha\mu}}(\partial_\mu\phi)\right], \\
&= -\frac{1}{2}[\eta^{\alpha\beta}(\partial_\beta\phi) + \eta^{\alpha\mu}(\partial_\mu\phi)] \text{ con } \mu = \beta, \\
&= -\frac{1}{2}[\eta^{\alpha\beta}(\partial_\beta\phi) + \eta^{\alpha\beta}(\partial_\beta\phi)], \\
&= -\eta^{\alpha\beta}(\partial_\beta\phi), \tag{5}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi)}\right) &= \partial_\alpha(-\eta^{\alpha\beta}(\partial_\beta\phi)), \\
&= -\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial_\beta\phi), \tag{6}
\end{aligned}$$

sustituyendo (4) y (6) en (3) se tiene la ecuación de movimiento para el campo  $\phi$ :

$$\lambda\phi(\phi^2 - v^2) + \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial_\beta\phi) = 0, \quad \phi(z = \pm\infty) = \pm v \tag{7}$$

Asimismo, se encuentra:

$$\phi_k = v \tanh\left(\frac{mz}{\sqrt{2}}\right), \quad m = v\sqrt{\lambda} \tag{8}$$

como solución al problema de contorno. Misma que se deduce derivando solo en la coordenada  $z$  en la ecuación de movimiento,

$$\lambda\phi(\phi^2 - v^2) - \partial_z(\partial_z\phi) = 0 \tag{9}$$

y desarrollando el primer término

$$\partial_z(\partial_z\phi) = \partial_z\left(\partial_z\left(v \tanh\left(\frac{mz}{\sqrt{2}}\right)\right)\right),$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_z \left( \frac{vm \cosh^{-2} \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{2}} \right) \\
&= -vm^2 \cosh^{-2} \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \tanh \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right)
\end{aligned} \tag{10}$$

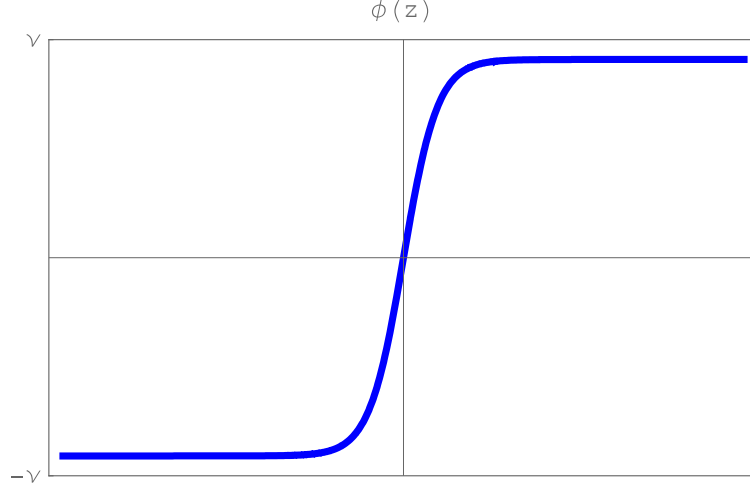
luego el segundo término

$$\begin{aligned}
-\lambda \phi(\phi^2 - v^2) &= \lambda \left( v \tanh \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \right) \left[ \left( v \tanh \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 - v^2 \right] \\
&= -\lambda v^3 \tanh^3 \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) + \lambda v^3 \tanh \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \lambda v^3 \tanh \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \right) \text{ con } m = v\sqrt{\lambda} \\
&= -vm^2 \cosh^{-2} \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \tanh \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Finalmente sustituyendo (10) y (11) en (9) se tiene,

$$\begin{aligned}
-vm^2 \cosh^2 \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \tanh \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) + vm^2 \cosh^2 \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \tanh \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

y con base en (12), se observa que  $\phi_k$  es solución para (7), la cual interpola entre los mínimos del potencial bajo una representación tipo kink (ver Gráfico 2-1).



**Gráfico 2-1:** Una pared de dominio en el eje zeta

Realizado por: Illicachi, Ruth. 2020

Por otro lado, del tensor energía impulso del campo escalar

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} L \quad (13)$$

desarrollando y haciendo uso de (1)

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right], \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - V(\phi) \right], \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} (-\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2) - V(\phi) \right], \\ T_{00} &= (\dot{\phi})^2 - \eta_{00} \left[ -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) \right] \\ &= (\dot{\phi})^2 - (-1) \left[ -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) \right], \\ &= (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{z} \right)^2}_{\substack{x,y=0 \\ z \neq 0}} - V(\phi) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2, \\ &= (\dot{\phi})^2 \end{aligned} \quad (14)$$

reemplazando (4)

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ v \tanh \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \right]^2 \\
 &= \left[ v \left( \frac{\frac{m}{\sqrt{2}}}{\cosh^2 \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right)} \right) \right]^2 \\
 &= \frac{m^2 v^2}{2 \cosh^4 \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right)}
 \end{aligned} \tag{15}$$

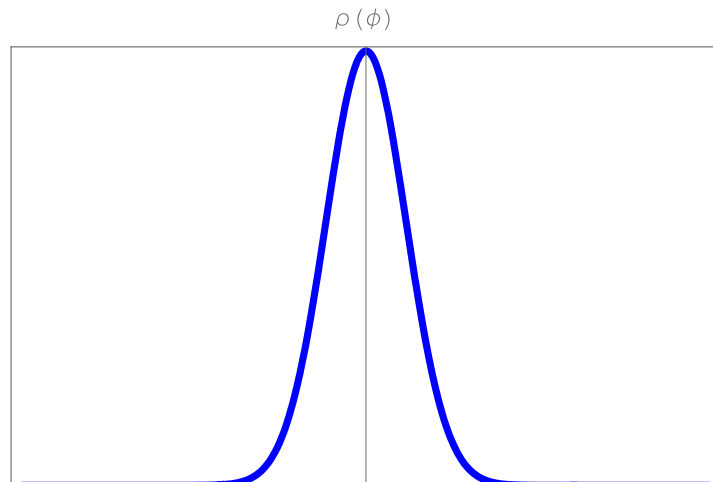
finalmente con  $m = v\sqrt{\lambda}$

$$T_{00} = \frac{(v\sqrt{\lambda})^2 v^2}{2 \cosh^4 \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right)} \tag{16}$$

se verifica que la densidad de energía de la pared viene dada por

$$\rho = T_{00} = \frac{\lambda v^4}{2} \cosh^{-4} \left( \frac{mz}{\sqrt{2}} \right) \tag{17}$$

que alcanza su máximo en la región de transición entre los  $vev$  del campo interponiéndose de esta manera entre los mínimos nulos del potencial (ver Gráfico 3-1). Este último hecho cobra relevancia al introducir gravitación en (1) y considerar un espacio-tiempo de alta dimensionalidad, ya que en tales escenarios la pared de dominio se manifiesta como una superficie donde es factible recuperar gravedad cuatro dimensional estándar .



**Gráfico 3-1:** Densidad de energía

Realizado por: Illicachi, Ruth. 2020

En relación con la estabilidad de (8), nótese que la regularidad del campo en los extremos permite definir la siguiente carga conservada de origen topológico (topológico porque no se apela a la dinámica del campo sino a las condiciones de frontera para verificar su conservación).

$$Q = \phi(\infty) - \phi(-\infty) \quad (18)$$

que de acuerdo con  $\phi(z = \pm\infty) = \pm v$  toma el valor

$$Q = 2v \quad (19)$$

impidiendo el decaimiento de la pared a una configuración constante compatible con  $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$  (Senjanović 2002, pp. 17–20).

Otra manera de probar la estabilidad de (8) consiste en considerar pequeñas perturbaciones sobre el campo

$$\phi = \phi + \epsilon\Psi; \quad \epsilon \ll 1, \quad (20)$$

y verificar que la energía de  $\phi$  siempre es mayor a la del kink independientemente de la perturbación. En comparación con el argumento anterior, este es menos elegante. Entonces, en correspondencia con (20) considérese la energía que se deriva de (13)

$$E = \int dz \left[ \frac{1}{2} (\phi'_k + \epsilon\Psi')^2 + V(\phi_k + \epsilon\Psi) \right], \quad (21)$$

de esta forma se encuentra que

$$E = E[\phi_k] + \epsilon \int dz \left[ -\phi''_k + \lambda\phi_k(\phi_k^2 - v^2) \right] \Psi + \epsilon^2 \omega^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (22)$$

donde el término a orden  $\epsilon$  es nulo ya que es proporcional a la ecuación de movimiento de  $\phi_k$ , mientras que el próximo término en el orden perturbativo está en correspondencia con la siguiente ecuación de Schrödinger (Guerrero 2015, p. 2).,

$$\left( -\frac{1}{2d} \frac{d^2}{\xi^2} + 3 \tanh^2 \xi - 1 \right) \Psi = 2 \frac{\omega^2}{m^2} \Psi, \quad \xi = \frac{mz}{\sqrt{2}}. \quad (23)$$

De acuerdo con este enfoque, el problema de la estabilidad consiste ahora en determinar los autovalores de (23), que no siempre es factible; afortunadamente, en este caso el potencial en (23) se puede llevar a la forma Pöschl-Teller determinando así los estados ligados del problema de interés

$$\frac{\omega_0^2}{m^2} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\omega_1^2}{m^2} = \frac{3}{4} \quad (25)$$

Por tanto, el término proporcional a  $\epsilon^2$  en (22) es positivo y como consecuencia directa de ello, (8) es la configuración de menor energía compatible con las condiciones de borde prescritas en infinito (Guerrero 2015, p. 3).

### 1.5.2 *Rompimiento espontáneo de simetría*

La ruptura de simetría de una teoría es otra consecuencia que guarda relación con los potenciales invariantes bajo  $Z_2$ . Por ejemplo, si en (1) se introduce la siguiente redefinición del campo

$$\Theta = \phi - v \quad (26)$$

tal que

$$\langle \Theta \rangle = 0 \quad (27)$$

Entonces aparece un término cúbico para  $\Theta$  en el potencial

$$V = \frac{\lambda}{4} (\Theta^4 + 4v^2\Theta^2 + 4v\Theta^3) \quad (28)$$

que induce el rompimiento de la simetría  $Z_2$ . Como consecuencia adicional, ahora la masa del campo es real en contraste directo con la masa imaginaria del caso simétrico. En realidad, la simetría está escondida en (28) y la clave para ponerla al descubierto es la redefinición (26); sin embargo, hacerlo conduce a un  $vev$  distinto de cero que no ofrece ninguna ventaja cuando de cuantizar la teoría se trata.

Adicional, a continuación se muestran un par de casos que involucran simetrías continuas asociadas a los grupos  $U(1)$  y  $SO(3)$  (Guerrero 2015, p. 3).

#### 1.5.2.1 *Potencial con simetría $U(1)$*

Ahora el campo escalar es complejo,  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ , y el potencial está determinado por

$$V = \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - v^2)^2 \quad (29)$$

el cual es simétrico bajo el grupo  $U(1)$ ,  $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$ , con  $\alpha = 0, 2\pi, \dots$ . Entonces, sin pérdida de generalidad se escoge el  $vev$

$$\langle \phi_1 \rangle = v, \quad \langle \phi_2 \rangle = 0, \quad (30)$$

que corresponde al caso  $\alpha = 0$ .

Para romper la simetría basta con redefinir los campos como se indica



$$\Theta_1 = \phi_1 - v, \quad \Theta_2 = \phi_2, \quad (31)$$

de tal manera que

$$V = \frac{\lambda}{4} (\Theta_1^4 + \Theta_2^4 + 2\Theta_1^2\Theta_2^2 + 4v\Theta_1^3 + 4v^2\Theta_1^2), \quad (32)$$

en correspondencia con un modelo cuyos campos tienen valores de expectación en el vacío nulos y masas reales. En particular, mientras la masa de  $\Theta_1$  es  $2\lambda v^2$ , la masa de  $\Theta_2$  es nula; este último guarda relación con el bosón de Nambu-Goldstone que se espera luego de la ruptura de simetría (Guerrero 2015, p. 3).

### 1.5.2.2 Potencial con simetría $SO(3)$

En la representación fundamental de  $SO(3)$  tómesese un campo escalar con tres componentes reales

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (33)$$

tal que la regla de transformación del bosón está determinada por

$$\boldsymbol{\phi} \rightarrow \mathbf{O} \boldsymbol{\phi} \quad (34)$$

Con  $\mathbf{O}$  un elemento de  $SO(3)$ .

Para inducir el rompimiento de la simetría se escoge el siguiente potencial

$$V = \frac{\lambda}{4} (\boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} - v^2) \quad (35)$$

de donde se deduce que

$$\langle \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} \rangle = v^2 \quad (36)$$

Ahora, si se toma en cuenta que los diferentes vacíos que dan solución a (36) están conectados por una transformación de  $SO(3)$ , no se pierde generalidad seleccionando

$$\Theta_1 = \phi_1 - v, \quad \Theta_2 = \phi_2, \quad \Theta_3 = \phi_3, \quad (37)$$

donde se ha considerado que

$$\langle \boldsymbol{\phi} \rangle = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Entonces, se sustituye (37) en (35), encontrando un campo masivo y dos bosones de Nambu Goldstone

$$V = \frac{\lambda}{4}(\Theta_1^2 + 2v\Theta_1 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2)^2. \quad (39)$$

El Teorema de Nambu-Goldstone predice el número de bosones no masivos que resultan luego de la ruptura de simetría. Antes de enunciarlo, nótese que de los tres generadores de  $SO(3)$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

solamente uno aniquila el vacío,

$$J_1 \langle \phi \rangle = 0 \quad (41)$$

y en consecuencia los elementos del sub-grupo generados por él lo dejan invariante,

$$\mathbf{O} \langle \phi \rangle = e^{i\alpha J_1} \langle \phi \rangle = \langle \phi \rangle. \quad (42)$$

Tales elementos forman el grupo de la simetría que “sobrevive” a la ruptura. Por tanto, en este caso se concluye que

$$SO(3) \rightarrow SO(2) \sim U(1). \quad (43)$$

**Teorema de Goldstone:** Por cada generador que no aniquile el vacío, existe un bosón de Nambu-Goldstone. Para la demostración ver Melfo y Senjavonić (2004, p. 26).

### 1.5.3 Las paredes y la ruptura de simetrías continuas

Como comentario final, la formación de paredes de dominio en teorías con potenciales que inducen el rompimiento de una simetría continua, nótese que ellos deben ser invariantes bajo  $Z_2$  para activar el mecanismo de fractura. Tales soluciones son factibles si las condiciones de borde en infinito no están conectadas por la simetría de calibre; es decir, si los  $v\text{ev}$  del campo no son equivalentes. Un ejemplo donde las paredes están excluidas es discutido en Senjavonić et al., (2005, p. 18)., allí el potencial es simétrico respecto a  $SU(2) \times U(1)$ ,

$$V = \frac{\lambda}{4}(\phi\phi^\dagger - v^2)^2, \quad (44)$$

y evidentemente también simétrico con respecto a  $Z_2$ ; sin embargo, la reflexión es parte de  $SU(2)$ ,

$$e^{i\pi} \phi = -\phi \quad (45)$$

y por consiguiente las soluciones tipo kink es descartada del modelo (Guerrero 2015, p. 5).

## CAPÍTULO II

### 2. MARCO METODOLÓGICO

#### 2.1 Pared de dominio o kink en $SO(10)$ .

En el desarrollo de este capítulo se muestra que para recuperar las soluciones de tipo pared de dominio o kink al sistema Klein-Gordon e invariante bajo el grupo  $SO(10)$ , se toma como punto de partida el siguiente Lagrangiano.

$$L = \frac{1}{4} \text{Tr}(\partial^\mu \boldsymbol{\phi} \partial_\mu \boldsymbol{\phi}) - V(\boldsymbol{\phi}) \quad (46)$$

y bajo una elección de  $\boldsymbol{\phi}$  como un tensor antisimétrico de segundo orden, se considera el potencial de cuarto orden más general de la siguiente forma

$$V(\boldsymbol{\phi}) = -\frac{1}{2} m^2 \phi_{ij} \phi_{ij} + \frac{1}{4} h (\phi_{ij} \phi_{ji})^2 + \frac{1}{4} \lambda (\phi_{ij} \phi_{jk} \phi_{kl} \phi_{li}) + V_0 \quad (47)$$

e introduciendo  $-\sum (\phi_{ij})^2 = \text{Tr}(\boldsymbol{\phi}^2)$  y  $\boldsymbol{\phi}^T = -\boldsymbol{\phi}$ , se reescribe el potencial como

$$V(\boldsymbol{\phi}) = \frac{1}{2} m^2 \text{Tr}(\boldsymbol{\phi}^2) + \frac{1}{4} h \text{Tr}(\boldsymbol{\phi}^2)^2 + \frac{1}{4} \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\phi}^4) + V_0 \quad (48)$$

donde  $m$ ,  $h$  y  $\lambda$  son los parámetros de la teoría y  $\boldsymbol{\phi}$  un multiplete escalar que transforma en la representación adjunta de  $SO(10)$  como

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{O} \boldsymbol{\phi} \mathbf{O}^T \quad (49)$$

con  $\mathbf{O} \in SO(10)$ , una matriz antisimétrica  $10 \times 10$  real y ortogonal. Nótese además que (48) carece de términos cúbicos  $\text{Tr}(\boldsymbol{\phi}^3)$  debido a la antisimetría natural que posee  $\boldsymbol{\phi}$ , por lo que, reproducir las soluciones tipo kink para (46) es factible.

Por otro lado, se conoce del caso plano planteado por Shin y Volkas (2004, pp. 4–5) que para  $\lambda > 0$ , el *vev* del campo está determinado por:

$$\boldsymbol{\phi}_0 = \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}} \text{diag}(\pm \mathbf{k}, \pm \mathbf{k}, \pm \mathbf{k}, \pm \mathbf{k}, \pm \mathbf{k}), \quad (50)$$

y

$$\mathbf{k} = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

con  $\sigma_2$ , la segunda matriz de Pauli y  $SU(5)$  el grupo que abarca la simetría residual cuando  $SO(10)$  es espontáneamente roto por (51) bajo la siguiente condición

$$\boldsymbol{\phi}(z = -\infty) = -\mathbf{0}\boldsymbol{\phi}(z = +\infty)\mathbf{0}^T, \quad (52)$$

permitiendo así, combinaciones de signo sobre las entradas en la diagonal de  $\boldsymbol{\phi}_0$ , es decir,  $-\mathbf{k} \rightarrow +\mathbf{k}$ . Estudiando todas las posibles combinaciones de signos en las entradas de (50) surgen dos clases y cada una conteniendo tres miembros a conocer

$$\text{Clase 1: } (\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}), \quad (\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}), \quad (\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \quad (53)$$

y

$$\text{Clase 2: } (-\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}), \quad (-\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}), \quad (-\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}) \quad (54)$$

Aquí, cada clase está relacionada por un cambio global de signo o por simetría de reflexión y los miembros de cada clase están conectados por una transformación de  $SO(10)$ .

Ahora, sin perder generalidad, estas combinaciones se las puede asociar a las siguientes condiciones de borde tanto para  $z \rightarrow -\infty$  y para  $z \rightarrow +\infty$  como se muestra a continuación

$$\boldsymbol{\phi}(z = -\infty) = \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}} \text{diag}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}), \quad \text{con } h > -\frac{\lambda}{10} \quad (55)$$

y

$$\boldsymbol{\phi}(z = +\infty) = \begin{cases} \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}} \text{diag}(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}), \\ \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}} \text{diag}(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}), \\ \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}} \text{diag}(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}). \end{cases} \quad \text{con } h > -\frac{\lambda}{10} \quad (56)$$

## 2.2 Ecuaciones de movimiento

Con la siguiente descomposición del campo no abeliano,

$$\phi = \text{diag}(\mathbf{k}f_1, \mathbf{k}f_2, \mathbf{k}f_3, \mathbf{k}f_4, \mathbf{k}f_5); \quad f_i = f_i(z). \quad i = 1 \dots, 5. \quad (57)$$

y de las ecuaciones de Euler Lagrange se obtiene

$$f_i'' = 2 \left( -m^2 + 2h \sum_{j=1}^5 f_j^2 \right) f_i + 2\lambda f_i^3 \quad (58)$$

que corresponde a un sistema de cinco ecuaciones acopladas para los  $f_i$  (Revisar Anexo B). Con esto y fijando el siguiente parámetro

$$h \neq 0 \quad (59)$$

es posible hallar tres soluciones exactas tipo kink para el sistema acoplado que son diferentes entre sí y compatibles con las condiciones de borde (55) y (56), siendo precisamente este uno de los aportes a este trabajo y que se mostrará en el capítulo siguiente.

En este capítulo, se hace referencia a las soluciones para el caso  $h = 0$  y que ya se encuentran reportados en trabajos como los de Chavez et al (2017, pp. 2–7), Guerrero (2015, pp. 18–21) y Shin y Volkas (2004, pp. 3–12).

## 2.3 Soluciones pared de dominio

En relación con el problema (58) y compatibles con las condiciones de borde (55) y (56) indicadas, se obtienen tres soluciones tipo kink que para  $z \rightarrow \pm\infty$  que inducen el rompimiento de simetría de  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ ; como se ve a continuación

### 2.3.1 Solución simétrica

Esta se obtiene al considerar las condiciones de borde

$$\phi(z = -\infty) = (-\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \quad \text{y} \quad \phi(z = \infty) = (\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}) \quad (60)$$

así pues, se tiene como solución:

$$\phi_{f_{Ai}} = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \tanh(mz), \quad \text{para } i = 1 \dots, 5 \quad (61)$$

### 2.3.2 Solución asimétrica

Esta se obtiene al considerar las condiciones de borde

$$\phi(z = -\infty) = (-\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \quad \text{y} \quad \phi(z = \infty) = (\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \quad (62)$$

resulta

$$f_{Bi} = \begin{cases} \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \tanh(mz), & \text{para } i = 1, 2, 3; \\ \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, & \text{para } i = 4, 5. \end{cases} \quad (63)$$

### 2.3.3 Solución superasimétrico

Esta última solución se obtiene al considerar las condiciones de borde

$$\phi(z = -\infty) = (-\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \quad \text{y} \quad \phi(z = \infty) = (\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \quad (64)$$

Teniendo como solución

$$f_{Ci} = \begin{cases} \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \tanh(mz), & \text{para } i = 1; \\ \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, & \text{para } i = 2, 3, 4, 5. \end{cases} \quad (65)$$

Las etiquetas  $A, B$  y  $C$  son para identificar con facilidad las paredes. También hay que notar que (61), (63) y (65) guardan relación con un potencial escalar  $V(f)$  con  $f = \tanh(mz)$ ; es decir,

$$V_A(f) = \frac{5m^4}{2\lambda} f^4 - \frac{5m^4}{\lambda} f^2 + V_0, \quad (66)$$

$$V_B(f) = \frac{3m^4}{2\lambda} f^4 - \frac{3m^4}{\lambda} f^2 - \frac{m^4}{\lambda} + V_0, \quad (67)$$

$$V_C(f) = \frac{m^4}{2\lambda} f^4 - \frac{m^4}{\lambda} f^2 - \frac{2m^4}{\lambda} f^4 + V_0, \quad (68)$$

todos diferentes entre sí y en correspondencia con tres soluciones diferentes.

Entonces los distintos escenarios de patrones de simetrías residuales que se presentan sobre las paredes cuando interpolan tanto en el centro como en los extremos quedan determinados de la siguiente forma:

### 2.3.4 Escenario simétrico

Aquí, la simetría  $SO(10)$  se preserva para  $z = 0$ . Mientras que en  $z \rightarrow \pm\infty$  la simetría resulta  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ .

### 2.3.5 Escenario asimétrico

Para  $z = 0$  la simetría se presenta como  $SO(6) \times SU(2) \times U(1)$  y para  $z \rightarrow \pm\infty$  la simetría resulta de  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ .

### 2.3.6 Escenario superasimétrico

De igual forma en  $z = 0$  la simetría se resulta como  $SU(4) \times SO(2) \times U(1)$ . Pero para  $z \rightarrow \pm\infty$  la simetría se establece como  $SO(10) \rightarrow SU(5)$ .

También conviene verificar la invarianza para (50) bajo transformaciones  $SU(5)$  como para las simetrías residuales  $SO(6) \times SU(2) \times U(1)$  y  $SO(4) \times SU(2) \times U(1)$  en el centro de las paredes haciendo uso del mapa  $\mathcal{M}$  entre  $U(1) \rightarrow SO(2)$ .

Para definir  $\mathcal{M}$ , es necesario desarrollar la función exponencial por serie de Taylor y además tomar en cuenta que la serie exponencial se representa bajo números complejos, como se muestra a continuación

$$e^{i\theta} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}} \quad (69)$$

$$e^{i\theta} = \mathbf{I} + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \dots \quad (70)$$

$$e^{i\theta} = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -\theta^3 \\ -\theta^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots \quad (71)$$

y notando que los elementos resultantes forman la expansión de la serie Taylor de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ , se obtiene así

$$\mathbf{U}(1) \rightarrow \mathbf{SO}(2): \mathcal{M}(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (72)$$

un mapa entre matrices  $n \times n$  de números complejos, expresado como  $\mathbf{U}$ , y matrices  $2n \times 2n$  de números reales con las siguientes propiedades, mismas que serán de utilidad para establecer un mapa entre  $SU(5) \rightarrow SO(10)$ ,

- $$\begin{aligned}
\mathcal{M}(U^\dagger) &= \mathcal{M}\left((e^{i\theta})^\dagger\right); \\
&= \mathcal{M}((\mathbb{1} + i\theta + \dots)^\dagger) \\
&= \mathcal{M}((\mathbb{1} - i\theta + \dots)) \\
&= \mathcal{M}((\mathbb{1} - i\theta + \dots)^T) \\
&= \mathcal{M}(U)^T
\end{aligned}
\tag{73}$$

- $$\begin{aligned}
\mathcal{M}(UU^\dagger) &= \mathcal{M}\left((e^{i\theta})(e^{i\theta})^\dagger\right) \\
&= \mathcal{M}((\mathbb{1} + i\theta + \dots)(\mathbb{1} + i\theta + \dots)^\dagger) \\
&= \mathcal{M}((\mathbb{1} + i\theta + \dots)(\mathbb{1} - i\theta + \dots)) \\
&= \mathcal{M}(\mathbb{1} + i\theta - i\theta + \dots) \\
&= \mathcal{M}(\mathbb{1})
\end{aligned}
\tag{74}$$

y realizando el mapeo  $SU(5) \rightarrow SO(10)$  se tiene,

- $$\mathcal{M}(UU^\dagger) = \mathcal{M}(\mathbb{1}_{5 \times 5}) = \mathbb{1}_{10 \times 10}; \tag{75}$$

En definitiva desarrollando (83) con (84) se demuestra:

- $$\begin{aligned}
\mathcal{M}(UU^\dagger) &= \mathcal{M}(U)\mathcal{M}(U^\dagger) \\
&= \mathcal{M}\left((e^{i\theta})(e^{i\theta})^\dagger\right) \\
&= \mathcal{M}((\mathbb{1} + i\theta + \dots))\mathcal{M}((\mathbb{1} + i\theta + \dots)^\dagger) \\
&= \mathcal{M}((\mathbb{1} + i\theta + \dots)(\mathbb{1} - i\theta + \dots)) \\
&= \mathcal{M}((\mathbb{1} + i\theta + \dots))\mathcal{M}((\mathbb{1} - i\theta + \dots)^T) \\
&= \mathcal{M}(U)\mathcal{M}(U)^T
\end{aligned}
\tag{76}$$

De este modo, aplicando la invariancia del vacío en (50), se tiene

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{m^2}{10h+\lambda}} \mathcal{M}(-\mathbb{1}_{5 \times 5}). \tag{77}$$

por consiguiente,



$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \sqrt{\frac{m^2}{10h + \lambda}} \mathcal{M}(U(-\mathbb{1}_{5 \times 5})U^\dagger) \\
&= \sqrt{\frac{m^2}{10h + \lambda}} \mathcal{M}(U)\mathcal{M}(U(-i\mathbb{1}_{5 \times 5})\mathcal{M}(U^\dagger) \\
&= \mathcal{M}(U)\phi_0\mathcal{M}(U)^T
\end{aligned} \tag{78}$$

Finalmente, se observa que las simetrías residuales en el centro de las paredes, las soluciones  $B$  y  $C$  se reducen a matrices  $10 \times 10$ , antisimétricas; con bloques nulos a lo largo de la diagonal de dimensiones  $6 \times 6$  para  $B$  y  $2 \times 2$  para  $C$ , estos asociados al grupo  $SO(N)$  y con bloques distintos de cero de dimensiones  $4 \times 4$  y  $8 \times 8$  para  $B$  y  $C$ , bajo  $\mathcal{M}$  en correspondencia con el grupo  $SU(N)$ .

## CAPÍTULO III

### 3. MARCO DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

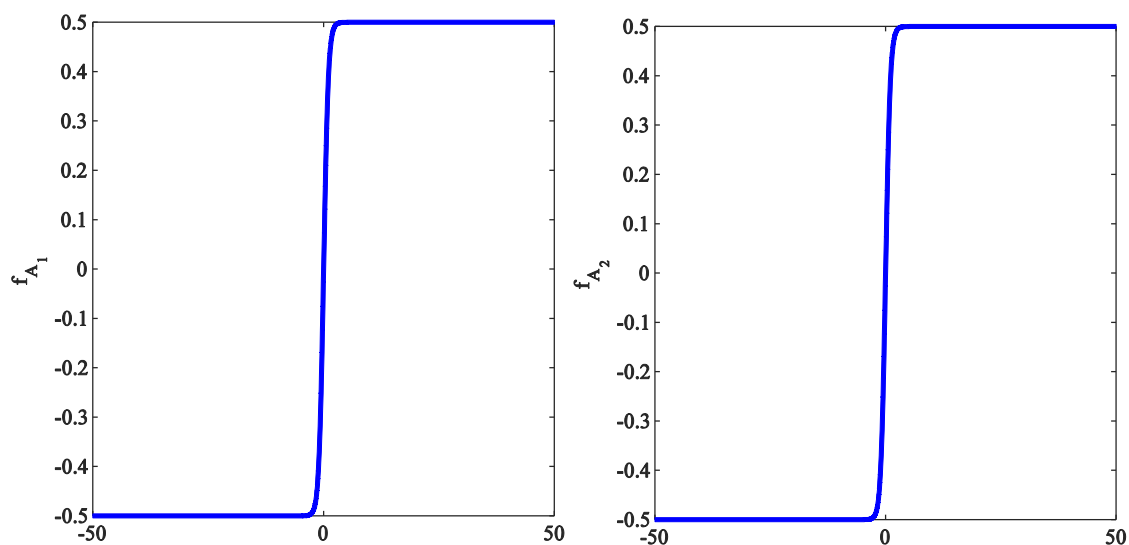
#### 3.1 Soluciones Pared de Dominio en $SO(10)$

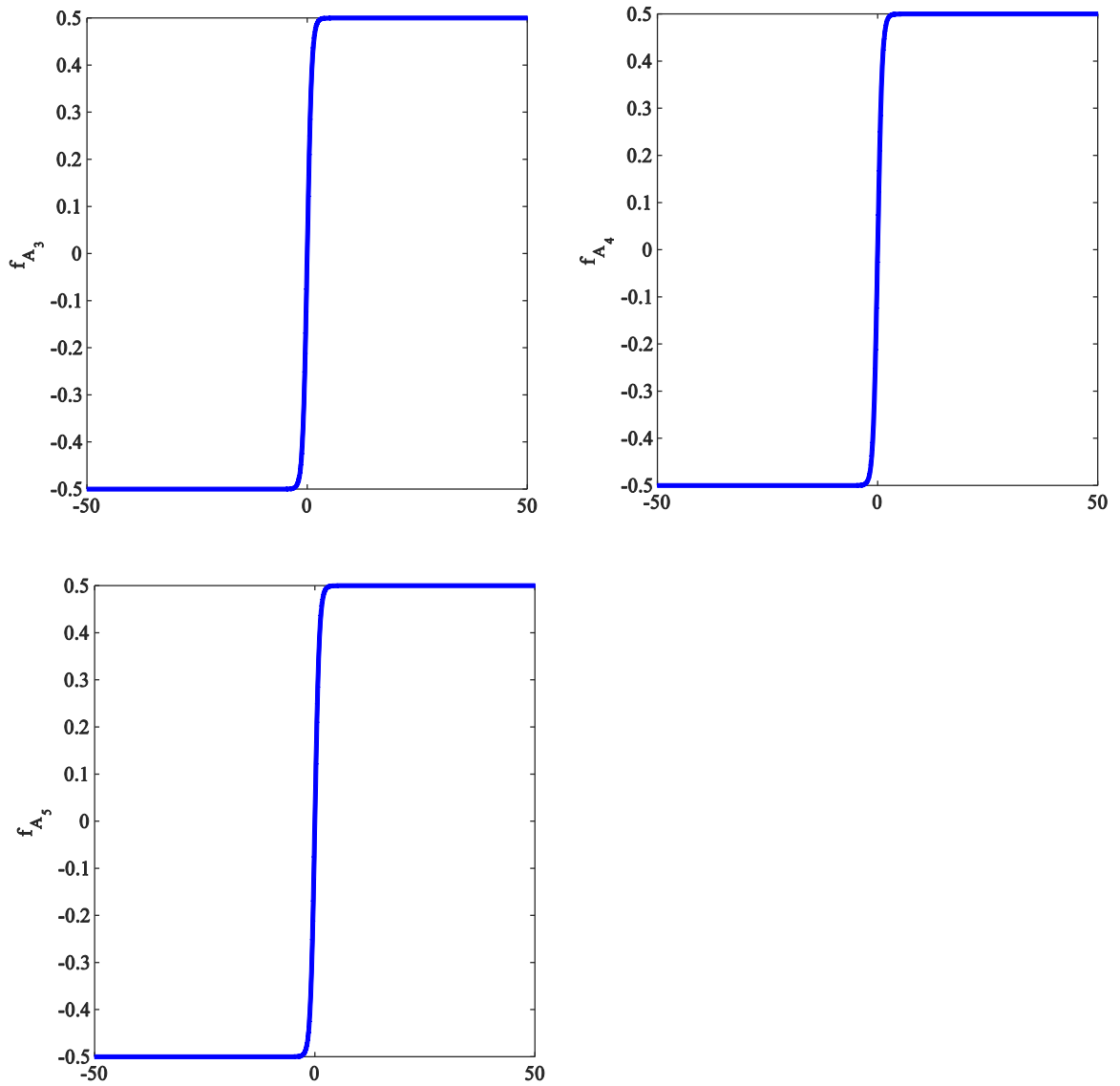
Para encontrar soluciones tipo Pared de Dominio con perfiles kink para el caso acoplado, se integra numéricamente las ecuaciones de movimiento mostradas por (68), bajo el enfoque de los problemas de valor límite (BVP) que se basa en la solución de los problemas de valor inicial (IVP) para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en Matlab con `bvp4c`.

Utilizar `bvp4c` en el siguiente trabajo, implica como primer paso escribir una función que represente las EDO, es decir, las ecuaciones de movimiento planteadas (63 a 67) como un sistema de ecuaciones de primer orden, luego plantear otra función para las condiciones de frontera  $[a, b]$  descritas por “bc” y una función para la conjetura inicial mediante “solinit”. Esta última se construye a partir de una suposición ejecutada por “exlinit”, se hace esto si el sistema de ecuaciones refleja tener más de una solución, mismo que permitirá revelar el comportamiento de las soluciones numéricas.

##### 3.1.1 Solución A

Las soluciones obtenidas se presentan como gráficas para el escenario simétrico al considerar las condiciones de borde mostradas en (71). Todas estas presentan soluciones con perfiles tipo kink que interpolan entre los vacíos del potencial cumpliendo con la definición de pared de dominio.



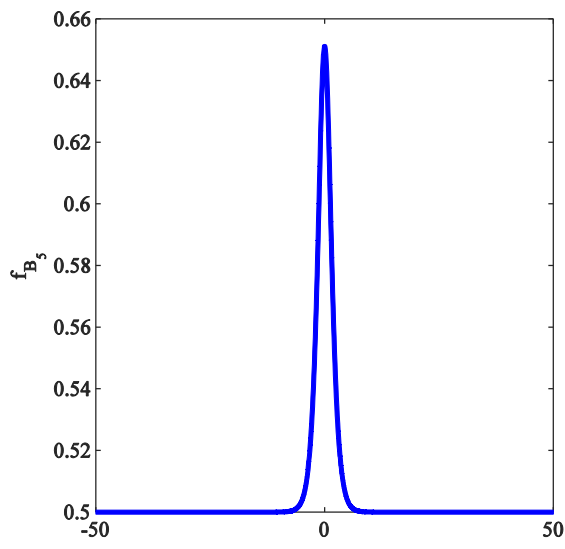
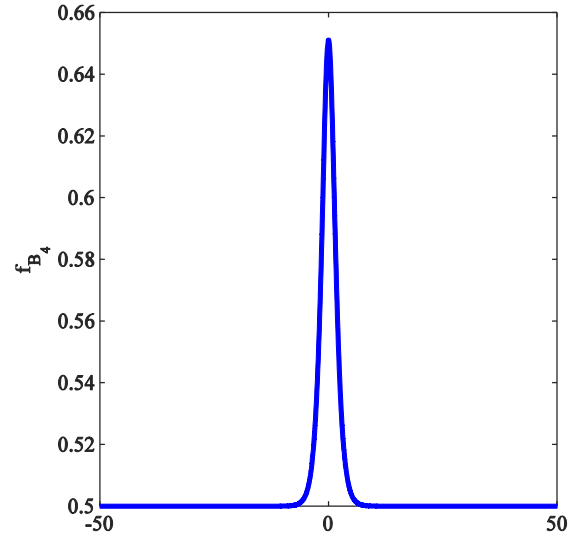
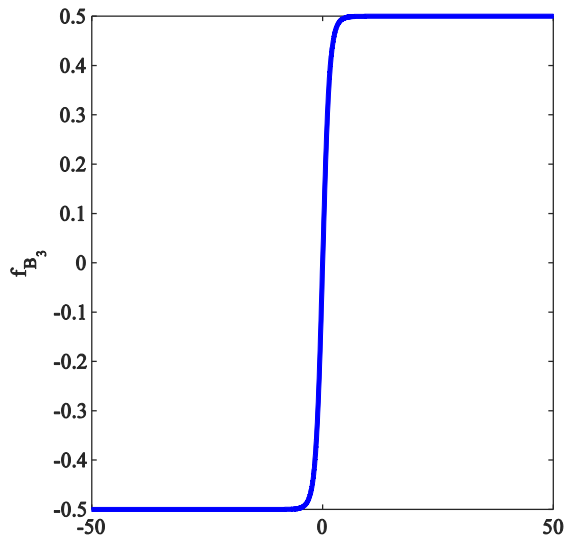
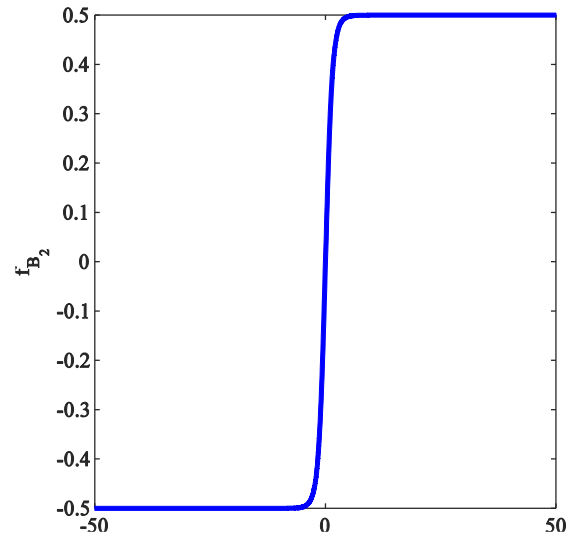
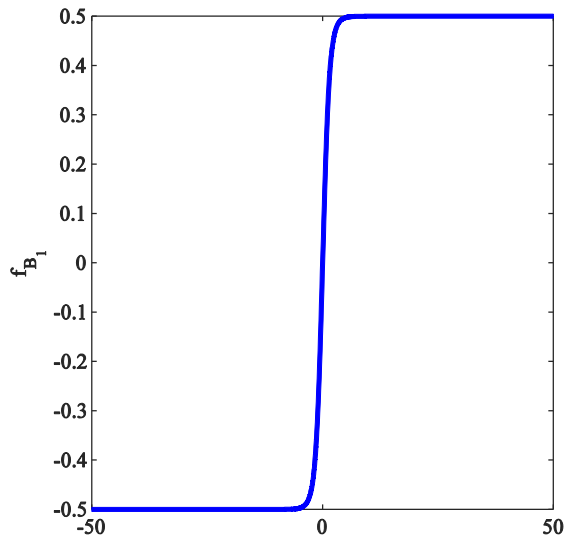


**Gráfico 1-3:** Soluciones para el escenario simétrico

Realizado por: Illicachi, Ruth. 2020

### 3.1.2 Solución B

Las soluciones obtenidas se presentan como gráficas para el escenario asimétrico al considerar las condiciones de borde mostradas en (73). Mientras las tres primeras presentan perfiles tipo kink, las dos restantes lucen perfiles lump que resultan ser el grupo de simetría residual  $SO(6) \times SU(2) \times U(1)$  que se exhibe en el centro de la pared de este escenario.

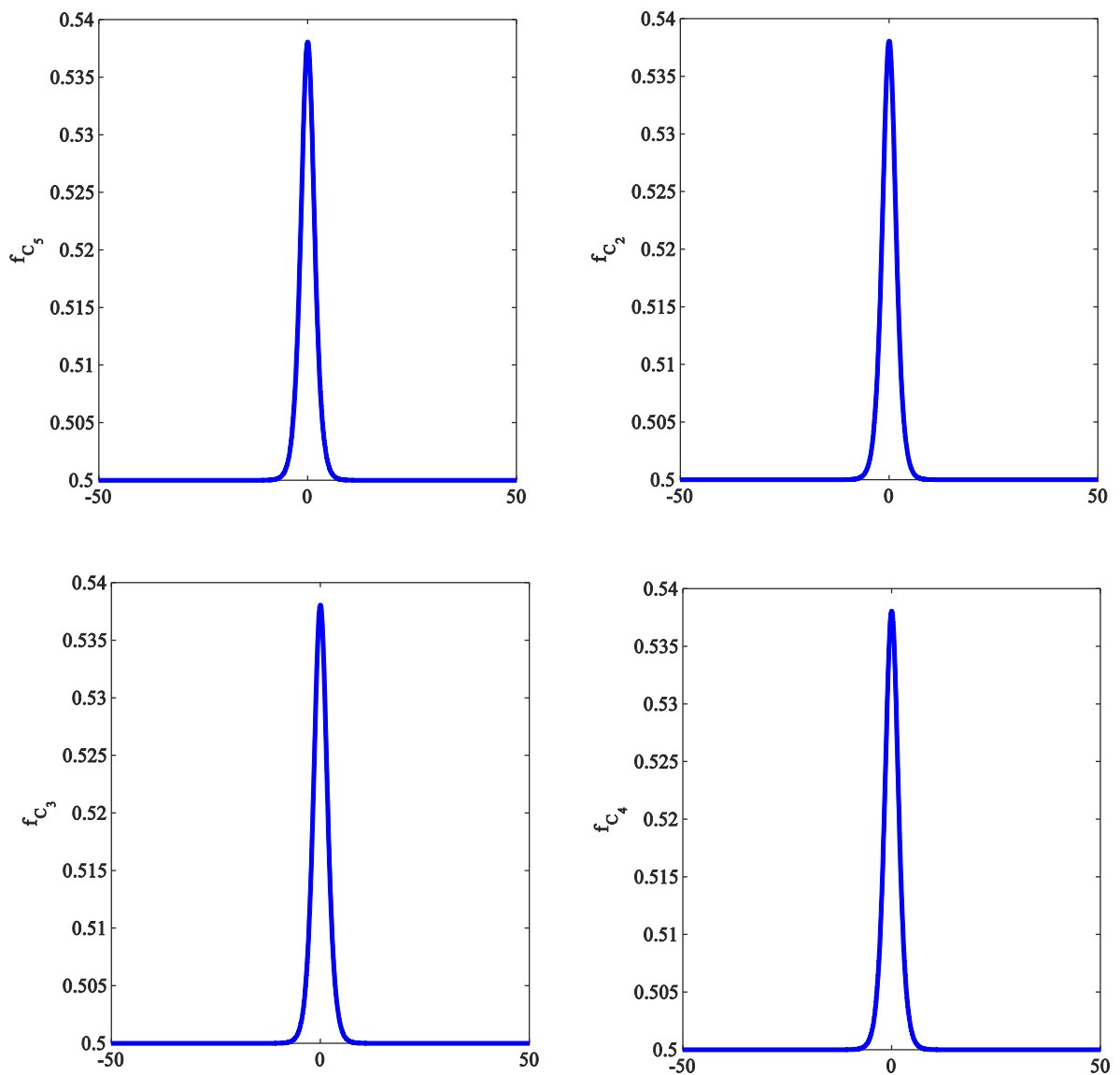


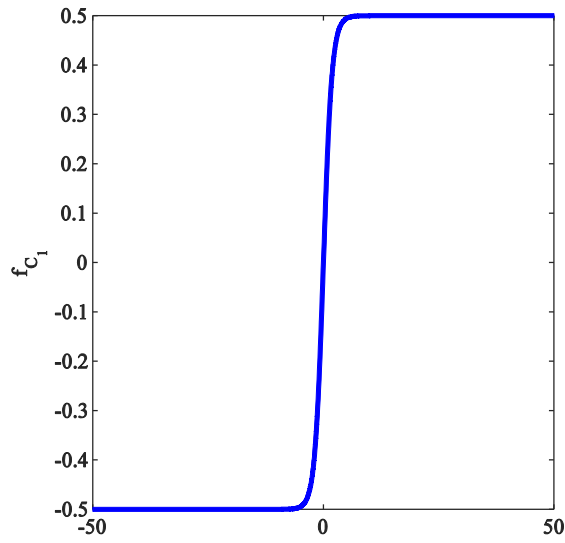
### Gráfico 2-3: Soluciones para el escenario asimétrico

Realizado por: Illicachi, Ruth. 2020

#### 3.1.3 Solución C

Las soluciones obtenidas se presentan como gráficas para el escenario superasimétrico al considerar las condiciones de borde mostradas en (75). Aquí, solamente una gráfica muestra perfil tipo kink mientras las cuatro restantes presentan perfiles lump que resultan ser el grupo de simetría residual  $SU(4) \times SO(2) \times U(1)$  que exhibe en el centro de la pared de este escenario.





**Gráfico 3-3:** Soluciones para el escenario supersimétrico

Realizado por: Illicachi, Ruth. 2020

Por último, es importante mencionar que tanto para la solución A, solución B y solución C todas las representaciones gráficas inducen incrustaciones de  $SU(5)$  en  $SO(10)$ .

## CONCLUSIONES

- Se determinó el potencial escalar de cuarto orden más general invariante bajo simetría  $Z_2$

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\text{Tr}(\phi^2) + \frac{1}{4}h\text{Tr}(\phi^2)^2 + \frac{1}{4}\lambda\text{Tr}(\phi^4) + V_0 \quad (79)$$

bajo la elección del multiplete escalar  $\phi$  como un tensor antisimétrico de segundo orden el cual es simétrico bajo  $Z_2$ .

- Se especificó las condiciones de bordes en correspondencia con la ruptura de  $SO(10) \rightarrow SU(5)$  para  $z \rightarrow \pm\infty$  en el siguiente número de ecuaciones (55) y (56).
- Se encontró las ecuaciones de movimiento correspondientes a un sistema de cinco ecuaciones acopladas para los  $f_i$  con  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , derivando la ecuación de Euler-Lagrange. Esto es

$$f_i'' = 2 \left( -m^2 + 2h \sum_{j=1}^5 f_j^2 \right) f_i + 2\lambda f_i^3 \quad (80)$$

- Se halló en relación con el problema (68) y satisfaciendo las condiciones (55) y (56), tres soluciones tipo pared de dominio que indujeron asintóticamente el rompimiento del grupo  $SO(10) \rightarrow SU(5)$  pero que se diferenciaron por el patrón de simetría que exhibieron cuando  $z = 0$ . Para el primero, el escenario simétrico, no hay ruptura de  $SO(10)$ , para el segundo, el escenario asimétrico, el grupo residual que se recuperó fue  $SO(6) \times SU(2) \times U(1)$  y finalmente, para la solución superasimétrica, la simetría residual fue  $SU(4) \times SO(2) \times U(1)$ . Asimismo, cada solución se representó gráficamente después de haber integrado numéricamente el sistema de ecuaciones presentadas para el caso acoplado (ver Gráfico 4-3, Gráfico 5-3 y Gráfico 6-3).

## RECOMENDACIONES

- Evaluar la estabilidad perturbativa para las soluciones numéricas encontradas para el caso  $h \neq 0$ .
- Buscar la generalización a gravitación de las soluciones encontradas.
- Cambiar el grupo de simetría, por ejemplo reemplazar  $SO(10)$  por  $E_6$ , y buscar soluciones tipo kink que cuando se rompan asintóticamente permitan encontrar la simetría del Modelo Estándar o una que contenga embebida la simetría del Modelo Estándar.
- Conviene recordar también que este trabajo es un primer ensayo para lograr plantear una teoría no abeliana de forma tal que induzca la simetría del Modelo Estándar sobre la pared, los escenarios más próximos a lo que se desea hacer es lo que se muestra aquí.



## BIBLIOGRAFÍA

- CHAVEZ, Rafael, et al.** *SO(10) thick branes and perturbative stability*. [en línea], 2017. *Physical Review*. Vol. 96, no. 10, p. 105002. Disponible en: <http://arxiv.org/abs/1606.03785>
- GUERRERO, Rommel.** *Los rompimientos de simetría inducidos por un kink no abeliano*. 2015. P.42.
- MELFO, Alejandra; et al.** *Self-gravitating non-abelian kinks as brane worlds*. [en línea], 2011. *Physical Review*. Vol. 84, no. 2, p. 025015. Disponible en: <http://arxiv.org/abs/1104.4857>
- MELFO, Alejandra & SENJANOVIĆ, Goran.** *Notas para un curso introductorio al Modelo Estándar de partículas elementales*. 2004. P. 77.
- POGOSIAN, Levon & VACHASPATI, Tanmay.** *Domain Walls in SU(5)*. [en línea], 2000. *Physical Review*. Vol. 62, no. 12, p. 123506. Disponible en: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0007045>
- SENJANOVIĆ, Goran; et al.** *II Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica*. 2005. P. 6.
- SENJANOVIĆ, Goran.** *Parte I: Defectos Topológicos en Cosmología*. 2002. International Centre for Theoretical Physics.
- SHIN, Edward & VOLKAS, Raymond R.** *O(10) kinks: clash of symmetries on the brane and the gauge hierarchy problem*. [en línea], 2004. *Physical Review*. Vol. 69, no. 4, p. 045010. Disponible en: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0309008>

## ANEXOS

### ANEXO A: 45 MATRICES ASOCIADAS A $SO(10)$

Bajo una representación de  $SO(N)$ , matrices antisimétricas  $N \times N$  reales cuyos elementos están definidos por  $(T_{ij})_{kl} = -\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$  se determinó las 45 matrices asociadas a  $SO(10)$  a través del siguiente código ejecutado en Wolfram Mathematica;

#### MATRICES $SO(10)$

```
Do[L[i,j] = Table[(KroneckerDelta[i,k]KroneckerDelta[j,l] - KroneckerDelta[i,l]
```

```
    KroneckerDelta[j,k]),{k,10},{l,10}],{i,1,10},{j,1,10}];
```

```
Do[If[i < j, Print[L[i,j]//MatrixForm]],{i,1,10},{j,1,10}];
```

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{81}$$









**ANEXO B:** CÓDIGO PARA OBTENER EL SISTEMA DE CINCO ECUACIONES DIFERENCIALES QUE REPRESENTEN LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA NUESTRO SISTEMA.

Con la siguiente representación del campo  $\phi$

$$\phi = (f1[z]T[1] + f2[z]T[2] + f3[z]T[3] + f4[z]T[4] + f5[z]T[5]);$$

$$d\phi = (D[f1[z], z]T[1] + D[f2[z], z]T[2] + D[f3[z], z]T[3] + D[f4[z], z]T[4] + D[f5[z], z]T[5]);$$

$$V = m^2/2 \text{Tr}[\phi \cdot \phi] + h/4 \text{Tr}[\phi \cdot \phi]^2 + \lambda/4 \text{Tr}[\phi \cdot \phi \cdot \phi]$$

$$La = 1/4 \text{Tr}[d\phi \cdot d\phi] - V$$

$$\begin{aligned} -V_0 - \frac{1}{2}m^2(-2f1[z]^2 - 2f2[z]^2 - 2f3[z]^2 - 2f4[z]^2 - 2f5[z]^2) \\ - \frac{1}{4}h(-2f1[z]^2 - 2f2[z]^2 - 2f3[z]^2 - 2f4[z]^2 - 2f5[z]^2)^2 - \frac{1}{4}\lambda(2f1[z]^4 \\ + 2f2[z]^4 + 2f3[z]^4 + 2f4[z]^4 + 2f5[z]^4) + \frac{1}{4}(-2f1'[z]^2 - 2f2'[z]^2 \\ - 2f3'[z]^2 - 2f4'[z]^2 - 2f5'[z]^2) \end{aligned}$$

$$D[f1[z], z, z] - D[V, f1[z]]$$

$$D[f2[z], z, z] - D[V, f2[z]]$$

$$D[f3[z], z, z] - D[V, f3[z]]$$

$$D[f4[z], z, z] - D[V, f4[z]]$$

$$D[f5[z], z, z] - D[V, f5[z]]$$

**Se obtiene el siguiente sistema de cinco ecuaciones diferenciales**

$$2m^2f1[z] - 2\lambda f1[z]^3 + 2hf1[z](-2f1[z]^2 - 2f2[z]^2 - 2f3[z]^2 - 2f4[z]^2 - 2f5[z]^2) + f1''[z]$$

$$2m^2f2[z] - 2\lambda f2[z]^3 + 2hf2[z](-2f1[z]^2 - 2f2[z]^2 - 2f3[z]^2 - 2f4[z]^2 - 2f5[z]^2) + f2''[z]$$

$$2m^2f3[z] - 2\lambda f3[z]^3 + 2hf3[z](-2f1[z]^2 - 2f2[z]^2 - 2f3[z]^2 - 2f4[z]^2 - 2f5[z]^2) + f3''[z]$$

$$2m^2f4[z] - 2\lambda f4[z]^3 + 2hf4[z](-2f1[z]^2 - 2f2[z]^2 - 2f3[z]^2 - 2f4[z]^2 - 2f5[z]^2) + f4''[z]$$

$$2m^2f5[z] - 2\lambda f5[z]^3 + 2hf5[z](-2f1[z]^2 - 2f2[z]^2 - 2f3[z]^2 - 2f4[z]^2 - 2f5[z]^2) + f5''[z]$$

## ANEXO C: TRANSFORMACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN A PRIMER ORDEN

Se hace la siguiente transformación debido a que el Problema de valor límite en Matlab solo admite un sistema de ecuaciones de primer orden. Esto es

- **Para  $f_1$  se tiene:**

$$2m^2 f_1 - 2\lambda f_1^3 + 2h f_1(-2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2) + f_1'' \quad (82)$$

con un cambio de variable para

$$y_1 = f_1 \quad (83)$$

$$y_2 = f_1'$$

se obtiene

$$y_1' = y_2 \quad (84)$$

$$y_2' = -2m^2 y_1 + 2\lambda y_1^3 + 2h y_1(2y_1^2 + 2y_3^2 + 2y_5^2 + 2y_7^2 + 2y_9^2)$$

- **Para  $f_2$  se tiene:**

$$2m^2 f_2 - 2\lambda f_2^3 + 2h f_2(-2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2) + f_2'' \quad (85)$$

con un cambio de variable para

$$y_3 = f_2 \quad (86)$$

$$y_4 = f_2'$$

se obtiene

$$y_3' = y_4 \quad (87)$$

$$y_4' = -2m^2 y_3 + 2\lambda y_3^3 + 2h y_3(2y_1^2 + 2y_3^2 + 2y_5^2 + 2y_7^2 + 2y_9^2)$$

- **Para  $f_3$  se tiene:**



$$2m^2 f_3 - 2\lambda f_3^3 + 2hf_3(-2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2) + f_1'' \quad (88)$$

con un cambio de variable para

$$y_5 = f_3 \quad (89)$$

$$y_6 = f_3'$$

se obtiene

$$y_5' = y_6 \quad (90)$$

$$y_6' = -2m^2 y_5 + 2\lambda y_5^3 + 2hy_5(2y_1^2 + 2y_3^2 + 2y_5^2 + 2y_7^2 + 2y_9^2)$$

- **Para  $f_4$  se tiene:**

$$2m^2 f_4 - 2\lambda f_4^3 + 2hf_4(-2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2) + f_1'' \quad (91)$$

con un cambio de variable para

$$y_7 = f_4 \quad (92)$$

$$y_8 = f_4'$$

se obtiene

$$y_7' = y_8 \quad (93)$$

$$y_8' = -2m^2 y_7 + 2\lambda y_7^3 + 2hy_7(2y_1^2 + 2y_3^2 + 2y_5^2 + 2y_7^2 + 2y_9^2)$$

- **Para  $f_5$  se tiene:**

$$2m^2 f_5 - 2\lambda f_5^3 + 2hf_5(-2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2 - 2f_1^2) + f_1'' \quad (94)$$

con un cambio de variable para

$$y_9 = f_5 \quad (95)$$

$$y_{10} = f_5'$$

se obtiene

$$y'_9 = y_{10} \tag{96}$$

$$y'_{10} = -2m^2y_9 + 2\lambda y_9^3 + 2hy_9(2y_1^2 + 2y_3^2 + 2y_5^2 + 2y_7^2 + 2y_9^2)$$

## ANEXO D: SOLUCIONES TIPO KINK AL SISTEMA-CÓDIGO DE MATLAB

Para encontrar las representaciones gráficas a las soluciones en cada uno de los tres escenarios siendo estos, simétrico, asimétrico y superasimétrico se procede a trabajar bajo el problema de valor límite con bvp4c en Matlab como se muestra a continuación

- Para la solución (A)

```
%Modelo ODE
L=1;
q=50;
h=0.3;
m=1;
f=@(z,y) [y(2);2*m^2*y(1)+2*L*y(1)^3+4*h*y(1)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(4);2*m^2*y(3)+2*L*y(3)^3+4*h*y(3)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(6);2*m^2*y(5)+2*L*y(5)^3+4*h*y(5)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(8);2*m^2*y(7)+2*L*y(7)^3+4*h*y(7)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(10);2*m^2*y(9)+2*L*y(9)^3+4*h*y(9)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2)];
%Condiciones Frontera
bc =@(ya,yb) [ya(1)+sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(3)+sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(5)+sqrt(m^2/(10*h+L));ya(7) sqrt(m^2/(10*h+L));ya(9) sqrt(m^2/(10*h+L));yb(1)-sqrt(m^2/(10*h+L));yb(3) sqrt(m^2/(10*h+L));yb(5)-sqrt(m^2/(10*h+L));yb(7)-sqrt(m^2/(10*h+L));yb(9) sqrt(m^2/(10*h+L))];
% Suposición inicial en la forma del método de solución BVP4C
exlinit=@(z) [tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L)) sqrt(m^2/(10*h+L)) tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L)) sqrt(m^2/(10*h+L)) tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L)) tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L)) sqrt(m^2/(10*h+L)) tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))];
%solinit = bvpinit(linspace(-20,20,100), [1 0 0 0]);
solinit = bvpinit(linspace(-q,q,1000), exlinit);
%Solver y Gráfico. y representa la solución de A y B
options = bvpset('RelTol',1e-4);
sol = bvp4c(f, bc, solinit,options);
zint = linspace(-q,q,1000);
yint = deval(sol,zint);
figure;
plot(zint, yint(1,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
```

```

xlabel('')
ylabel('f_{B_{1}}')
%hold on
figure;
plot(zint,yint(3,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{B_{2}}')
figure;
plot(zint,yint(5,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{B_{3}}')
figure;
plot(zint,yint(7,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{B_{4}}')
figure;
plot(zint,yint(9,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{B_{5}}')
%legend('y1','y3','y5','y7','y9')

```

- Para la solución (B)

```

%Modelo ODE
L=1;
q=50;
h=0.3;
m=1;
f=@(z,y) [y(2);2*m^2*y(1)+2*L*y(1)^3+4*h*y(1)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(4);2*m^2*y(3)+2*L*y(3)^3+4*h*y(3)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(6);2*m^2*y(5)+2*L*y(5)^3+4*h*y(5)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(8);2*m^2*y(7)+2*L*y(7)^3+4*h*y(7)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(10);2*m^2*y(9)+2*L*y(9)^3+4*h*y(9)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2)];
%Condiciones Frontera
bc=@(ya, yb) [ya(1)+sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(3)-sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(5)-sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(7)-sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(9)-sqrt(m^2/(10*h+L)); yb(1)-sqrt(m^2/(10*h+L)); yb(3)-

```

```

sqrt(m^2/(10*h+L));yb(5)-sqrt(m^2/(10*h+L));yb(7)-
sqrt(m^2/(10*h+L)); yb(9)-sqrt(m^2/(10*h+L))];
% Suposición inicial en la forma del método de solución BVP4C
exlinit=@(z) [tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))sqrt(m^2/(10*h+L))
sqrt(m^2/(10*h+L))sqrt(m^2/(10*h+L))sqrt(m^2/(10*h+L))tanh(z)*sq
rt(m^2/(10*h+L))sqrt(m^2/(10*h+L))sqrt(m^2/(10*h+L))sqrt(m^2/(10
*h+L)) sqrt(m^2/(10*h+L))];
%solinit = bvpinit(linspace(-20,20,100), [1 0 0 0]);
solinit = bvpinit(linspace(-q,q,1000), exlinit);
%Solver y Gráfico. y representa la solución de A y B
options = bvpset('RelTol',1e-4);
sol = bvp4c(f, bc, solinit,options);
zint = linspace(-q,q,1000);
yint = deval(sol,zint);
figure;
plot(zint, yint(1,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{C_{1}}')
%hold on
figure;
plot(zint,yint(3,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{C_{2}}')
figure;
plot(zint,yint(5,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{C_{3}}')
figure;
plot(zint,yint(7,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{C_{4}}')
figure;
plot(zint,yint(9,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{C_{5}}')
%legend('y1','y3','y5','y7','y9')

```

- Para la solución (C)

```

%Modelo ODE
L=1;
q=50;
h=0.3;
m=1;
f=@(z,y) [y(2);2*m^2*y(1)+2*L*y(1)^3+4*h*y(1)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(4);2*m^2*y(3)+2*L*y(3)^3+4*h*y(3)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(6);2*m^2*y(5)+2*L*y(5)^3+4*h*y(5)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(8);2*m^2*y(7)+2*L*y(7)^3+4*h*y(7)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2);y(10);2*m^2*y(9)+2*L*y(9)^3+4*h*y(9)*(y(1)^2+y(3)^2+y(5)^2+y(7)^2+y(9)^2)];
%Condiciones Frontera
bc=@(ya, yb) [ya(1)+sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(3)+sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(5)+sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(7)+sqrt(m^2/(10*h+L)); ya(9)+sqrt(m^2/(10*h+L)); yb(1)-sqrt(m^2/(10*h+L)); yb(3)-sqrt(m^2/(10*h+L)); yb(5)-sqrt(m^2/(10*h+L)); yb(7)-sqrt(m^2/(10*h+L)); yb(9)-sqrt(m^2/(10*h+L))];
% Suposición inicial en la forma del método de solución BVP4C
exlinit=@(z) [tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))
tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))          tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))
tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))          tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))
tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))          tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))
tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))          tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))
tanh(z)*sqrt(m^2/(10*h+L))];
%solinit = bvpinit(linspace(-20,20,100), [1 0 0 0]);
solinit = bvpinit(linspace(-q,q,1000), exlinit);
%Solver y Gráfico. y representa la solución de A y B
options = bvpset('RelTol',1e-4);
sol = bvp4c(f, bc, solinit,options);
zint = linspace(-q,q,1000);
yint = deval(sol,zint);
figure;
plot(zint, yint(1,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{A_{1}}')
%hold on

```

```
figure;
plot(zint,yint(3,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{A_{2}}')
figure;
plot(zint,yint(5,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{A_{3}}')
figure;
plot(zint,yint(7,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{A_{4}}')
figure;
plot(zint,yint(9,:), 'b', 'LineWidth',1.5);
xlabel('')
ylabel('f_{A_{5}}')
%legend('y1','y3','y5','y7','y9')
```



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**DIRECCIÓN DE BIBLIOTECAS Y RECURSOS PARA EL  
APRENDIZAJE Y LA INVESTIGACIÓN**



**UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS**

**REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA**

**Fecha de entrega:** 14 / 08 /2020

<b>INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)</b>
<b>Nombres – Apellidos: :</b> Ruth Micaela Illicachi Guamán
<b>INFORMACIÓN INSTITUCIONAL</b>
<b>Facultad:</b> Ciencias
<b>Carrera:</b> Biofísica
<b>Título a optar:</b> Biofísica
<b>f. Analista de Biblioteca responsable:</b> Lic. Luis Caminos Vargas Mgs.



14-08-2020

0200-DBRAI-UPT-2020