



## **ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

### **IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES A TRAVÉS DE LA ESTRUCTURA DE AUTOREGRESIÓN CON VARIABLES EXÓGENAS MEDIANTE GRADIENTE DECRECIENTE Y MÍNIMOS CUADRADOS PARA EVALUAR LA MEJOR ESTIMACIÓN**

**ANDRÉS FERNANDO MOROCHO CAIZA**

Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo, presentado ante el Instituto de Posgrado y Educación Continua de la ESPOCH como requisito parcial para la obtención del grado de:

**MAGÍSTER EN MATEMÁTICA MENCIÓN MODELACIÓN Y DOCENCIA**

Riobamba-Ecuador

Noviembre 2021

©2021, Andrés Fernando Morocho Caiza

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.



## ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

### CERTIFICACIÓN:

EL TRIBUNAL DEL TRABAJO DE TITULACIÓN CERTIFICA QUE:

El trabajo de titulación modalidad proyectos de Investigación y Desarrollo, titulado: “IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES A TRAVÉS DE LA ESTRUCTURA DE AUTOREGRESIÓN CON VARIABLES EXÓGENAS MEDIANTE GRADIENTE DECRECIENTE Y MÍNIMOS CUADRADOS PARA EVALUAR LA MEJOR ESTIMACIÓN”, de responsabilidad del señor Andrés Fernando Morocho Caiza, ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.

Ing. Luis Eduardo Hidalgo Almeida; Ph.D.

**PRESIDENTE**



Firmado electrónicamente por:  
**FRANKLIN  
MARCELO CORONEL  
MAJI**

Dr. Franklin Marcelo Coronel Maggi; Mg.

**DIRECTOR**



Firmado electrónicamente por:  
**JORGE VINICIO  
TUAPANTA DACTO**

Dr. Jorge Vinicio Tuapanta Dacto; Mg.

**MIEMBRO**



Firmado electrónicamente por:  
**FREDDY ENRIQUE  
CHAVEZ VASQUEZ**

Ing. Freddy Enrique Chávez Vásquez; Mg.

**MIEMBRO**

Riobamba, Noviembre de 2021

## DERECHOS INTELECTUALES

Yo, Andrés Fernando Morocho Caiza, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en el Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo, y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.



Firmado electrónicamente por:  
**ANDRES FERNANDO  
MOROCHO CAIZA**

---

ANDRÉS FERNANDO MOROCHO CAIZA

No. Cédula: 060420146-7

## **DECLARACIÓN DE AUTENTICIDAD**

Yo, Andrés Fernando Morocho Caiza, declaro que el presente Trabajo de Titulación Proyectos de Investigación y Desarrollo, es de mi autoría y que los resultados del mismo son auténticos y originales. Los textos constantes en el documento que provienen de otra fuente están debidamente citados y referenciados.

Como autor, asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Titulación de Maestría.



Firmado electrónicamente por:  
**ANDRES FERNANDO  
MOROCHO CAIZA**

---

**ANDRÉS FERNANDO MOROCHO CAIZA**

No. Cédula: 060420146-7

## **DEDICATORIA**

Toda esta etapa académica inició desde mi hogar donde llegué a tener buenas raíces para seguir escalando en mi vida profesional y humana, y es por esa razón que dedico este trabajo a las personas que han estado desde temprana edad a mi lado y a las que aparecieron en el transcurso de mi vida y se han convertido en mi familia.

Andrés

## **AGRADECIMIENTO**

Agradezco en primer lugar a Dios, quien me ha puesto en este mundo para ir superando cada uno de los obstáculos que se me han ido presentando y al mismo tiempo junto a él los he vencido, llegando a cumplir muchos objetivos en mi vida espiritual, académica y profesional. También quiero extender mi agradecimiento a todos mis maestros en mi trayectoria educativa porque cada uno de ellos compartieron sus conocimientos y experiencias y es esto lo que me ha permitido llegar hasta aquí. De igual manera agradezco a mi familia que me ha sabido acompañar en cada paso y que me han brindado apoyo en todas las formas posibles.

Andrés

# ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN .....	xvi
SUMMARY .....	xvii
ABREVIATURAS .....	xv

## CAPÍTULO I

1.	INTRODUCCIÓN .....	1
1.1.	Situación Problemática .....	1
1.2.	Formulación del Problema .....	2
1.3.	Preguntas Directrices .....	2
1.4.	Justificación de la Investigación .....	3
1.5.	Objetivos de la Investigación .....	4
1.5.1.	<i>Objetivo General</i> .....	4
1.5.2.	<i>Objetivos Específicos</i> .....	4
1.6.	Hipótesis .....	5

## CAPÍTULO II

2.	MARCO TEÓRICO .....	6
2.1.	Antecedentes del Problema .....	6
2.2.	Bases Teóricas .....	8
2.2.1.	<i>Sistemas dinámicos discretos</i> .....	8
2.2.1.1.	<i>Estabilidad de sistemas discretos</i> .....	14
2.2.1.2.	<i>Sistemas discretos de primer orden</i> .....	15
2.2.1.3.	<i>Sistemas discretos de segundo orden</i> .....	18
2.2.2.	<i>Identificación de sistemas dinámicos</i> .....	19
2.2.2.1.	<i>Modelos Paramétricos</i> .....	20
2.2.3.	<i>Métodos de estimación de parámetros</i> .....	26

2.2.3.1.	<i>Método de mínimos cuadrados</i> .....	28
2.2.3.2.	<i>Método de gradiente decreciente</i> .....	29
2.2.4.	<b><i>Validación de un modelo</i></b> .....	30
2.2.4.1.	<i>Criterio de mejor ajuste</i> .....	31

### CAPÍTULO III

3.	<b>METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN</b> .....	32
3.1.	<b>Selección de sistemas</b> .....	32
3.1.1.	<i>Análisis de estabilidad y causalidad de sistemas de primer orden</i> .....	33
3.1.2.	<i>Casos de sistemas de primer orden</i> .....	33
3.1.3.	<i>Análisis de estabilidad y causalidad de modelos de segundo orden</i> .....	36
3.1.4.	<i>Casos de sistemas de segundo orden</i> .....	37
3.2.	<b>Adquisición de datos de los modelos continuos seleccionados</b> .....	39
3.2.1.	<i>Espacio de estados de los modelos de primer orden</i> .....	39
3.2.2.	<i>Espacio de estados de los modelos de segundo orden</i> .....	41
3.3.	<b>Estimación de parámetros</b> .....	43
3.3.1.	<i>Estimación de parámetros mediante mínimos cuadrados</i> .....	44
3.3.2.	<i>Estimación de parámetros mediante gradiente decreciente</i> .....	46

### CAPÍTULO IV

4.	<b>RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b> .....	48
4.1.	<b>Análisis de Resultados de mínimos cuadrados</b> .....	48
4.1.1.	<i>Resultados de los modelos de primer orden con mínimos cuadrados</i> .....	48
4.1.2.	<i>Resultados de los modelos de segundo orden con mínimos cuadrados</i> .....	51
4.2.	<b>Análisis de Resultados de Gradiente Decreciente</b> .....	54
4.2.1.	<i>Resultados de los modelos de primer orden con gradiente decreciente</i> .....	55
4.2.2.	<i>Resultados de los modelos de segundo orden con gradiente decreciente</i> .....	61

<b>4.3. Comprobación de la Hipótesis .....</b>	<b>66</b>
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>69</b>
<b>RECOMENDACIONES.....</b>	<b>70</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1-3:</b> Casos de sistemas de primer orden.....	36
<b>Tabla 2-3:</b> Casos de sistemas de segundo orden .....	39
<b>Tabla 3-3:</b> Casos de sistemas de primer orden.....	45
<b>Tabla 4-3:</b> Casos de sistemas de segundo orden .....	45
<b>Tabla 5-3:</b> Casos de sistemas discretos para el método de gradiente decreciente.....	46
<b>Tabla 1-4:</b> Valores para arrancar el algoritmo de gradiente decreciente en los sistemas de primer orden. ....	60
<b>Tabla 2-4:</b> Valores para arrancar el algoritmo de gradiente decreciente en los sistemas de segundo orden. ....	66
<b>Tabla 3-4:</b> Calificación de los métodos para evaluar la identificación de los sistemas propuestos. ....	67

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1-2:</b>	Diagrama de bloques de un sistema con señal de entrada y salida en tiempo discreto .....	8
<b>Figura 2-2:</b>	Diagrama de bloques de un sistema en el dominio Z.....	16
<b>Figura 3-2:</b>	Estructura del modelo ARX.....	22
<b>Figura 4-2:</b>	Estructura del modelo ARMAX. ....	24
<b>Figura 5-2:</b>	Estructura del modelo OE.....	25
<b>Figura 6-2:</b>	Estructura del modelo B-J.....	26
<b>Figura 1-3:</b>	Filtro activo de primer orden pasa bajo. ....	34
<b>Figura 2-3:</b>	Filtro activo pasa alto de segundo orden.....	35
<b>Figura 3-3:</b>	Circuito de un servomotor de corriente directa.....	37
<b>Figura 4-3:</b>	Filtro activo pasa banda de Sallen-Key.....	38
<b>Figura 5-3:</b>	Diagrama de bloques del modelo $G1s$ .....	40
<b>Figura 6-3:</b>	Diagrama de bloques del modelo $G2s$ .....	40
<b>Figura 7-3:</b>	Respuesta de los sistemas de primer orden ante una entrada escalón. (imagen superior es el modelo $G1s$ y la imagen inferior es el modelo $G2s$ ) .....	41
<b>Figura 8-3:</b>	Diagrama de bloques del modelo $G3s$ .....	42
<b>Figura 9-3:</b>	Diagrama de bloques del modelo $G4s$ .....	42
<b>Figura 10-3:</b>	Respuesta de los sistemas de segundo orden ante una entrada escalón. (imagen superior es el modelo $G3s$ y la imagen inferior es el modelo $G4s$ ). ....	43
<b>Figura 1-4:</b>	Respuesta de salida del modelo $G1s$ y su correspondiente señal modelada con mínimos cuadrados.....	49
<b>Figura 2-4:</b>	Respuesta del modelo $G1s$ y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 100\text{rads}$ . ....	49
<b>Figura 3-4:</b>	Respuesta del modelo $G1s$ y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 1000\text{rads}$ . ....	50
<b>Figura 4-4:</b>	Respuesta del modelo $G1s$ y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 104\text{rads}$ . ....	50
<b>Figura 5-4:</b>	Respuesta de salida del modelo $G3s$ y su correspondiente señal modelada con mínimos cuadrados.....	51

<b>Figura 6-4:</b>	Respuesta del modelo $G3s$ y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal. ....	52
<b>Figura 7-4:</b>	Respuesta de salida del modelo $G4s$ y su correspondiente señal modelada con mínimos cuadrados.....	52
<b>Figura 8-4:</b>	Respuesta del modelo $G4s$ y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 0.038rad/s$ . ....	53
<b>Figura 9-4:</b>	Respuesta del modelo $G4s$ y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 0.6rad/s$ .....	53
<b>Figura 10-4:</b>	Respuesta del modelo $G4s$ y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 52.1rad/s$ . ....	54
<b>Figura 11-4:</b>	Respuesta de salida del modelo $G1s$ y su correspondiente señal modelada con gradiente decreciente ante una entrada escalón (La figura superior es la respuesta de salida y la inferior es la evolución de la función de costo).....	55
<b>Figura 12-4:</b>	Respuesta del modelo $G1s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 100[rad/s]$ . ....	56
<b>Figura 13-4:</b>	Respuesta del modelo $G1s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 1000rad/s$ . ....	56
<b>Figura 14-4:</b>	Respuesta del modelo $G1s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 10000rad/s$ . ....	57
<b>Figura 15-4:</b>	Respuesta de salida del modelo $G2s$ y su correspondiente señal modelada con gradiente decreciente ante una entrada escalón (La figura superior es la respuesta de salida y la inferior es la evolución de la función de costo).....	58
<b>Figura 16-4:</b>	Respuesta del modelo $G2s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 100[rad/s]$ . ....	58
<b>Figura 17-4:</b>	Respuesta del modelo $G2s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 1000rad/s$ . ....	59
<b>Figura 18-4:</b>	Respuesta del modelo $G2s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 10000rad/s$ . ....	59
<b>Figura 19-4:</b>	Respuesta de salida del modelo $G3s$ y su correspondiente señal modelada con gradiente decreciente ante una entrada escalón (La figura superior es la respuesta de salida y la inferior es la evolución de la función de costo).....	61
<b>Figura 20-4:</b>	Respuesta del modelo $G3s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal. ....	62

<b>Figura 21-4:</b>	Respuesta de salida del modelo $G4s$ y su correspondiente señal modelada con gradiente decreciente ante una entrada escalón.....	63
<b>Figura 22-4:</b>	Respuesta del modelo $G4s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 0.038rads$ . .....	64
<b>Figura 23-4:</b>	Respuesta del modelo $G4s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 0.6rads$ .....	64
<b>Figura 24-4:</b>	Respuesta del modelo $G4s$ y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia $\omega_{in} = 52.1rads$ . .....	65
<b>Figura 25-4:</b>	Comparación de los sistemas modelados para el procedimiento. ....	68
<b>Figura 26-4:</b>	Comparación de los sistemas modelados para el resultado obtenido. ....	68

## ABREVIATURAS

ARX: Autorregresivo con variables exógenas (Auto-Regressive with Exogenous variables)

ARMAX: Autorregresivo de promedio móvil con variables exógenas (Auto-Regressive Moving Average with Exogenous variables)

BJ: Box-Jenkins

h: Respuesta al impulso de un sistema dinámico

IAE: Integral del Error Absoluto (Integral Absolute Error)

ISE: Integral del Error Cuadrático (Integral Squared Error)

J: función de costo

LS: Mínimos cuadrados (Least Squares)

OE: Error de salida (Output Error)

Ts: Tiempo de muestreo (Sample Time)

X: Señal de entrada a un sistema dinámico

Y: Señal de salida de un sistema dinámico

## RESUMEN

El objetivo fue identificar sistemas dinámicos lineales a través de la estructura de autoregresión con variables exógenas mediante gradiente decreciente y mínimos cuadrados para evaluar la mejor estimación. Los sistemas dinámicos que se eligieron fueron de primer orden como filtros pasa bajo y pasa alto del tipo activo que son muy empleados en electrónica, comunicaciones y procesamiento digital de señales; también se eligieron sistemas de segundo orden como el de un servomotor de corriente directa y un filtro pasa banda que también tienen mucha aplicación en diferentes áreas. En el proceso de identificación se utilizó el método de mínimos cuadrados para lograr una minimización de la función de costo y así estimar los parámetros del sistema a modelarse. De igual manera, se empleó el método de gradiente decreciente mediante la aproximación de la derivada y el ajuste de parámetros propios como el aprendizaje y el incremento para realizar la modelación de los sistemas propuestos en ecuaciones en diferencia o su correspondiente función de transferencia. Una vez obtenidos los sistemas modelados a través de los dos métodos mencionados se observó que el método de mínimos cuadrados no pudo realizar la identificación donde la salida del sistema se expresa en función de valores presentes y que únicamente debe depender de valores del pasado tanto de la salida como de la entrada, en cambio el método de gradiente no presentó estos inconvenientes. Se comprobó la hipótesis mediante una ponderación con respecto al resultado y al procedimiento en el desarrollo de los algoritmos de programación de cada método de estimación de parámetros para los cuatro sistemas planteados y que son comunes en el campo de la electrónica. Se concluyó que el método de gradiente decreciente es mejor para modelar estos tipos de sistemas con respecto a mínimos cuadrados. Finalmente, se establecen estrategias para inicializar todos los parámetros que involucran en el algoritmo de gradiente decreciente y facilitar el proceso de modelación.

**Palabras claves:** <IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS>, < AUTORREGRESIVO CON VARIABLES EXÓGENAS (ARX)>, <MÍNIMOS CUADRADOS>, <GRADIENTE DECRECIENTE>, <MODELACIÓN >, <SISTEMAS DINÁMICOS >.

Firmado digitalmente  
por LUIS ALBERTO  
CAMINOS VARGAS  
Nombre de  
reconocimiento (DN):  
c=EC, I=RIOBAMBA,  
serialNumber=0602766  
974, cn=LUIS ALBERTO  
CAMINOS VARGAS  
Fecha: 2021.11.25  
10:30:04 -05'00'

LUIS  
ALBERTO  
CAMINOS  
VARGAS



0117-DBRAI-UPT-IPEC-2021

## ABSTRACT

The main objective of this research was to identify lineal dynamic systems through auto-regression with external variables, done by decreasing gradient and least squares in order to evaluate the estimation. The dynamic systems chosen were those of first order such as low-pass and high-pass filters of active type which are commonly used in Electronics, Communications, and Digital Processing of Signals. Moreover, second order systems were also chosen such as the power drive unit of direct current and a band-pass filter that also has a wide application in different areas. In the process of identifying, the least squares method was applied with the aim of minimizing the cost function and to estimate the parameters of the system to be modelled. Likewise, the decreasing gradient method was put into place, through means of the approximation of the derivative and adjusting the parameters like learning and increment in order to achieve the modelling of the proposed system, in different equations or its corresponding transferring function. Once obtained the modelled systems through the said methods it was observed that the least square method could not identify the area where the system outcome its expressed in present values and only depends on past values, this for both outcome and income, meanwhile the gradient method did not present these issues. The hypothesis was accepted through the weighing with respect to the result and the process of developing the programming algorithms for each method of weighing parameters for the four set systems, which are common in the Electronics field. Concluding that the decreasing gradient method is better in the modelling of these type of systems in comparison to that of the least squares. Finally, strategies to initialize all the parameters that are part of the algorithm of decreasing gradient have been established in order to facilitate the modelling process.

**Key words:** <SYSTEMS IDENTIFICATION>, <ARX>, <LEAST SQUARES>, <DECREASING GRADIENT>, <MODELLING >, <DINAMIC SYSTEMS >.

# CAPÍTULO I

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1. Situación Problemática

La presencia de varios métodos de identificación de sistemas dinámicos ha generado un inconveniente por desconocer cual método utilizar. Entre los diferentes métodos de identificación de sistemas están los métodos paramétricos y dentro de esta clasificación se ubica la estructura de autoregresión con variables exógenas y para la estimación de los parámetros del sistema se pueden utilizar varios métodos, entre ellos están los analíticos y computacionales.

Los sistemas dinámicos lineales presentan una variedad de casos de acuerdo con el orden y tipo del sistema. También, se tiene sistemas con diferentes propiedades importantes como es la causalidad y la estabilidad. Incluso a partir de estas propiedades son útiles para entender el origen de los filtros de respuesta finita al impulso y los filtros de respuesta infinita al impulso; dichos filtros son útiles en el procesamiento digital de sistemas.

En una estructura autorregresiva con variable exógena, el predictor para encontrar los parámetros del sistema es una regresión lineal. Entonces, para encontrar el vector de parámetros mediante un método de estimación, se utiliza comúnmente el método de mínimos cuadrados porque es un método eficaz y preferido por algunos investigadores. Este método conlleva a una serie de pasos analíticos un poco complejos y además como se basa en la derivada para encontrar un valor mínimo global entre los mínimos locales que se pueden presentar. Esto puede llevar a que este valor minimice la función de costo, pero no es el valor indicado para caracterizar el sistema dinámico en cuestión.

En el presente trabajo, se desea conocer si el método del gradiente decreciente es suficiente para identificar cada uno de los casos de acuerdo con el orden de un sistema. Por lo que se requiere investigar si al realizar identificación de diferentes casos de sistemas estables de primer y segundo orden mediante los métodos de mínimos cuadrados y gradiente decreciente, se podría establecer cuál de ellos es mejor para todos los casos de sistemas.

## **1.2. Formulación del Problema**

¿Se podría establecer que la técnica del gradiente decreciente permite caracterizar a todos los casos de sistemas estables de primer y segundo orden sin tener problemas de un mínimo global mediante una misma función de costo con respecto al método de mínimos cuadrados?

## **1.3. Preguntas Directrices**

¿Cómo se puede interpretar la invariabilidad en el tiempo y la estabilidad de un sistema dinámico mediante definiciones matemáticas para seleccionar los sistemas a modelarse?

¿Cómo es la estructura de autoregresión con variables exógenas para la identificación de sistemas dinámicos lineales?

¿Cómo determinar los parámetros de un sistema dinámico lineal a través de un proceso analítico?

¿Cómo desarrollar el algoritmo computacional para determinar los parámetros de un sistema dinámico lineal con el método del gradiente decreciente?

¿Cuál método es el indicado para la caracterización del sistema de acuerdo con el orden y a sus casos existentes?

#### **1.4. Justificación de la Investigación**

Modelar sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo de acuerdo con los diferentes casos del orden de un sistema estable a través de una estructura de autoregresión con variables exógenas mediante los métodos de mínimos cuadrados y gradiente decreciente permite tener una idea más clara de la mejor identificación según la dinámica del sistema.

Los diferentes sistemas para analizar se relacionan con ejemplos clásicos de electrónica y procesamiento digital de señales. Además, se pretende facilitar el proceso de análisis del método de mínimos cuadrados en la estructura de autoregresión con variables exógenas basado en una función de costo para la estimación de los parámetros del sistema. También, se desarrollará el algoritmo de programación para el método del gradiente decreciente para minimizar la misma función de costo en el proceso de estimación de parámetros del modelo a identificarse a partir de datos muestreados como la señal de entrada y salida.

El presente trabajo de investigación es importante porque permite evaluar las dos técnicas de estimación de parámetros en diferentes sistemas estables de primer y segundo orden. Además, integra conocimientos de diferentes asignaturas como Análisis Funcional para conocer el origen de las señales y los sistemas y como se analizan posteriormente; Método Numéricos para abordar la estimación de parámetros mediante gradiente decreciente; Modelos Matemáticos para conocer el tipo, orden, linealidad, causalidad y estabilidad de un sistema dinámico; y finalmente Estadística para la evaluación del mejor modelo obtenido.

## **1.5. Objetivos de la Investigación**

### ***1.5.1. Objetivo General***

Identificar sistemas dinámicos lineales a través de la estructura de autoregresión con variables exógenas mediante gradiente decreciente y mínimos cuadrados para evaluar la mejor estimación.

### ***1.5.2. Objetivos Específicos***

- a) Interpretar la invariabilidad en el tiempo y la estabilidad de un sistema dinámico mediante definiciones matemáticas para seleccionar los sistemas a modelarse.
- b) Estudiar la estructura de autoregresión con variables exógenas mediante análisis matemático para la identificación de sistemas dinámicos lineales.
- c) Desarrollar la estimación de los parámetros de sistemas dinámicos mediante mínimos cuadrados ante un predictor de un modelo de regresión lineal para identificar el modelo del sistema.
- d) Programar un algoritmo computacional mediante gradiente decreciente al criterio cuadrático del error para estimar los parámetros del sistema a modelarse.
- e) Evaluar los métodos implementados en la estructura de autoregresión con variables exógenas para la determinación de una mejor caracterización del modelo.

## **1.6. Hipótesis**

El método del gradiente decreciente permitirá caracterizar a todos los diferentes casos más usuales de electrónica en sistemas discretos del tipo lineales e invariantes en el tiempo de primer y segundo orden con respecto al método de mínimos cuadrados.

## CAPÍTULO II

### 2. MARCO TEÓRICO

#### 2.1. Antecedentes del Problema

La modelación de sistemas dinámicos es un tema muy amplio para abordarlo y se ha vuelto bastante útil en el mundo del control. Un objetivo es realizar la identificación a partir del menor número posible de observaciones como lo plantea Sanandaji et al. (2011, p. 6) en el trabajo denominado “*Compressive System Identification of LTI and LTV ARX Models*”, en el cual, los autores orientan la identificación de sistemas en el campo de detección de compresión. Donde su principal novedad técnica es plantear el problema de identificación como la recuperación de una señal de bloques dispersos a partir de un conjunto indeterminado de ecuaciones lineales. Los hallazgos del estudio muestran que en los casos en los que el sistema LTI tiene posiblemente muchas entradas con diferentes retrasos desconocidos, la identificación simultánea del modelo ARX y la estimación del retraso de entrada es posible a partir de un pequeño número de observaciones.

En el proceso de modelación es necesario conocer sobre la cantidad de datos que se necesitan para muestrear un sistema, para lo cual Weyer (2000, p. 7) menciona que los tamaños de muestra se obtienen utilizando generalizaciones de la teoría de minimización de riesgos a procesos débilmente dependientes. El artículo se denomina “*Finite sample properties of system identification of ARX models under mixing conditions*”. Con un análisis más detallado mostró que el número de puntos de datos requeridos crece como máximo a una tasa polinómica en el orden del modelo y, en muchos casos, no más rápido que cuadráticamente.

Comúnmente es conocido que las estructuras de identificación como ARMAX, OE son mejores en comparación con ARX pero en el artículo de Amran et al. (2020, p. 6) manifiestan en su artículo denominado “*Simulation and modeling of two-level DC/DC boost converter using ARX, ARMAX,*

*and OE model structures*” que la estructura ARX produjo un mejor modelo en términos de estabilidad para el análisis de bucle abierto. Para llegar a esta conclusión, procesó los datos de las señales del convertidor en función de la respuesta al impulso de los voltajes de entrada y salida que estaban en el dominio del tiempo.

La modelación de sistemas no se emplea únicamente en el sector industrial, como se muestra en el trabajo realizado por Rachad et al. (2015, p. 1), el mismo que se denomina “*System Identification of Inventory System Using ARX and ARMAX Models*”. En este artículo presentan el modelo matemático de un sistema de inventario de un almacén de mercancías de una empresa distribuidora utilizando un enfoque de identificación del sistema. Para la elaboración del estudio consideran los artículos pedidos a los proveedores y los artículos enviados a los clientes, como las entradas del sistema y el nivel de existencias como salida. También trabajan con tres clases de artículos de frecuencia de alta rotación, de media rotación y baja rotación. Bajo las tres categorías de artículos el modelo ARMAX es superior presentando un menor número de parámetros del sistema y menor error de predicción. Es necesario indicar que para concluir este resultado el criterio de minimización para encontrar los parámetros fue mínimos cuadrados.

Dentro de la electrónica, Salah-Eddine et al. (2020, p.8) en su artículo denominado “*Microcontroller Based Data Acquisition and System identification of a DC Servo Motor Using ARX, ARMAX, OE, and BJ Models*”, los autores realizan una modelación de un servo motor de CD mediante estructuras de modelos paramétricos. Para lograr los objetivos propuestos, obtuvieron los datos de la respuesta al escalón del sistema a partir de una tarjeta de adquisición con microcontrolador. El protocolo empleado es el RS232 por el cual llevan los datos hasta el computador. Para la validación de los modelos utilizan el criterio del error cuadrático medio y el criterio del error de predicción final basado en la teoría de Akaike. Además, concluyen que las estructuras ARMAX, BJ y OE presentan un mejor ajuste para caracterizar un servomotor con una función de costo del error cuadrático.

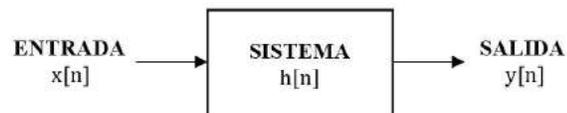
Por medio del estudio en el modelo de inventarios y de la identificación del servo motor DC, se conoce la mejor estructura para modelos paramétricos bajo el criterio de mínimos cuadrados para encontrar los parámetros del sistema, pero Amran et al. contradice mediante otra aplicación. Una interrogante que puede nacer es que sucede si se emplea otra estrategia como mínimos cuadrados o gradiente decreciente. Posiblemente, conduzca a necesitar únicamente de una estructura ARX para

identificación de sistemas de primer y segundo orden y así obtener el mejor ajuste. Por tal motivo es que se plantea el presente trabajo de titulación.

## 2.2. Bases Teóricas

### 2.2.1. *Sistemas dinámicos discretos*

Un sistema dinámico discreto es representado mediante ecuaciones en diferencia. A un sistema se lo considera un proceso que presenta señales de entrada y salida. La señal de entrada en función de un tiempo discreto es transformada de alguna manera provocando una respuesta al sistema llamada señal de salida de tiempo discreto como se puede observar en la Figura 1-2. (Oppenheim & Willsky, 1997, p. 38).



**Figura 1-2:** Diagrama de bloques de un sistema con señal de entrada y salida en tiempo discreto  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

Una señal en tiempo discreto se lo identifica comúnmente con la siguiente simbología  $x[n]$ ,  $x[k]$ . Donde la variable independiente tiempo “n” o “k” son números enteros. De igual manera, a la entrada de un sistema se lo puede considerar como  $x[n]$ , a la señal de salida se lo identifica como  $y[n]$  y al sistema se lo conoce como  $h[n]$ .

Las señales al ser representadas por funciones de acuerdo a Alvarado et al. (2010, p. 189), se las puede representar como vectores de un espacio vectorial porque cumplen con las propiedades de la ley de composición interna y la ley de composición externa. En base a su estructura se puede construir otra más elaborada como son los espacios de Hilbert. Un espacio de Hilbert (conocido también como espacio H) es un espacio vectorial con producto escalar. El producto escalar es una aplicación de

pares de vectores en el campo de los escalares para este caso se considera el campo de los complejos y debe cumplir con ciertas propiedades como se menciona en la siguiente definición.

**Definición 1.** Sea  $H$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos, un producto escalar sobre  $H$  es una aplicación  $(\cdot | \cdot)$  de  $H \times H$  en  $\mathbb{C}$  tal que:

- $(x|x) \geq 0, \forall x \in H$
- $(x|x) = 0$ , si y sólo si  $x = 0$
- $(x|y) = \overline{(y|x)}, \forall x, y \in H$
- $((\alpha x + \beta y)|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z), \forall x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

El espacio vectorial que cumpla con la Definición 1 es considerado como un espacio prehilbertiano. En la definición 2 se menciona cuando se trata de un espacio de Hilbert.

**Definición 2.** Un espacio prehilbertiano que es completo para la distancia inducida por el producto escalar es un espacio de Hilbert. Todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert, este es un espacio de Hilbert.

Un producto escalar puede ser cualquier definición que cumpla con las propiedades de la Definición 1. Las diferentes definiciones que se planteen para un producto escalar generan distintos espacios de Hilbert, con métrica y norma distinta. En la Definición 3 se muestra las propiedades que debe cumplir una norma.

**Definición 3.** La norma de  $x \in H$  es  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ , se cumple:

- $\|x\| > 0$
- $\|x\| = 0$ , si y sólo si  $x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in H, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

Definiendo  $d(x, y) = \|x - y\|$  se obtiene una distancia en  $H$ .

En base a las tres definiciones anteriores, se menciona el espacio  $l_2$ , que es un espacio de Hilbert, propio para señales en tiempo discreto. El producto escalar empleado será el siguiente:

$$(x|y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] \quad (1)$$

Este producto escalar presenta la similitud existente entre dos señales porque su valor es grande cuando la señal  $x$  e  $y$  son similares, por el contrario, el valor del producto escalar es pequeño cuando estas señales son distintas. Un caso particular del producto escalar de la ecuación (1) es la función de ambigüedad temporal,  $r_x[k]$ , representada por la ecuación siguiente:

$$r_x[k] = (x, x_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n-k] \quad (2)$$

En el caso que  $k = 0$  y teniendo en cuenta las propiedades de los números complejos se tendría la expresión de la energía de una señal en función de su tiempo discreto y que puede ser una función real o compleja. Dicha expresión se observa a continuación:

$$E\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (3)$$

Por lo tanto, la norma inducida de acuerdo con la ecuación (1) se presenta a continuación:

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} = \sqrt{E\{x[n]\}} \quad (4)$$

Esto significa que la norma para el producto escalar de la ecuación (1) es la raíz cuadrada de la energía de una señal. Y como todo espacio de Hilbert presenta una distancia y se la conoce como distancia euclídea, la misma que se muestra a continuación:

$$d(x|y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2} \quad (5)$$

Todo espacio vectorial tiene una base para la generación de cada uno de los elementos, en este caso, las señales de tiempo discreto que son los elementos del espacio vectorial analizado; se pueden representar mediante una base que viene a ser la función delta de Kronecker  $\delta$ . Es conocido también, que un espacio vectorial no tiene una sola base. Por lo tanto, las señales discretas se las puede también representar una función de otras señales como puede ser la función escalón unitario, entre otras. Por tal razón, una señal en tiempo discreto se puede representar bajo el mismo producto escalar y con su base básica como es la función delta de Kronecker. Dicha expresión se observa a continuación:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] = x[n] * \delta[n] \quad (6)$$

De la ecuación (6), se puede dar otra interpretación desde el punto de vista de análisis de señales. Una señal en función del tiempo discreto se representa a partir de la suma de convolución entre la misma señal y la delta de Kronecker.

Tomando el concepto de sistema de acuerdo con Oppenheim, se puede representar en la siguiente expresión la salida de un sistema:

$$y[n] = T(x[n]) \quad (7)$$

En donde el operador  $T(\cdot)$  representa una transformación que realiza el sistema a la señal de entrada discreta. Además, para que la transformación sea lineal debe cumplir las siguientes propiedades de acuerdo con la Definición 4. (Kendall & Kendall, 1993, p.125)

**Definición 4.** Sea  $X, Y$  dos espacios lineales, entonces un operador lineal es una función  $T: X \rightarrow Y$ , donde cada elemento de  $X$  le corresponde un único elemento de  $Y$ , además cumple con las condiciones siguientes:

- $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in X$
- $T(\alpha x) = \alpha T(x), \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in X$

De forma resumida se expresa como  $\forall \alpha_i \in \mathbb{C}, \forall x_i \in X$  se cumple que:

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(x_i) \quad (8)$$

En base a la definición de sistemas de la ecuación (7), a la representación de una señal discreta por medio de una función impulso de la ecuación (6) y de la definición de un operador de transformación lineal resumido en la ecuación (8); la salida de un sistema se representa de la siguiente forma:

$$y[n] = T(x[n]) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T(\delta[n - k])$$

Considerando  $h_k[n] = T(\delta[n - k])$ , conocida como la respuesta del sistema lineal al impulso unitario desplazado. La salida  $y[n]$  del sistema lineal a la entrada  $x[n]$  se convierte en una combinación lineal ponderada de estas respuestas básicas. La respuesta  $y[n]$  se define a continuación:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n] \quad (9)$$

La linealidad es una propiedad de los sistemas, otra de ellas es la invariabilidad en el tiempo. En el libro de Kamen et al. (2008, p. 135) de Fundamentos de Señales y Sistemas, menciona que un sistema es invariante en el tiempo cuando cumple la siguiente definición:

**Definición 5.** Un sistema es invariante si y solo si dada una entrada  $x[n]$  con su salida correspondiente  $y[n]$ , se cumple que:

- $T(x[n - n_0]) = y[n - n_0]$ , para cualquier valor de  $n_0$

Caso contrario se dice que el sistema es variante.

Aplicando la propiedad de invarianza a la ecuación (9), se tiene que  $h_k[n]$  es una versión desplazada en tiempo de  $h_0[n]$  (que es lo mismo en otra notación  $h_0[n] = h[n]$ ); lo que implica decir de manera inmediata que  $h_k[n] = h_0[n - k] = h[n - k]$ . Por lo tanto, un sistema discreto lineal invariante en el tiempo se expresa a continuación:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] = x[n] * h[n] \quad (10)$$

La ecuación (10) lleva a decir que la respuesta  $y[n]$  de un sistema discreto lineal invariante en el tiempo se representa mediante la suma de convolución entre la señal de entrada  $x[n]$  y la respuesta al impulso del sistema  $h[n]$ . Por lo expuesto, se dice que un sistema LTI (Linear Time-Invariant) está determinado completamente por su respuesta al impulso.

Otra propiedad que presentan los sistemas, en general, es la causalidad. En el mismo libro de Kamen (2008, p. 136) presentan la siguiente definición:

**Definición 6.** Un sistema es causal si y sólo si su respuesta al impulso  $h[n]$  cumple:

- $h[n] = 0, \forall n < 0$

Si fuera para  $\forall n > 0$  sería un sistema anticausal.

Aplicando la Definición 6 a la ecuación (10), se tiene la expresión de la respuesta a un sistema LTI causal expresada como:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] h[n - k] \quad (11)$$

La ecuación (11) se interpreta que la salida  $y[n]$  de un sistema LTI discreto y causal depende solo de los valores presentes y pasados de la entrada  $x[n]$ .

### 2.2.1.1. Estabilidad de sistemas discretos

La estabilidad es otra propiedad importante de los sistemas. De acuerdo a Oppenheim & Willsky (1997, p. 49) en su libro de Señales y Sistemas, define de manera formal la estabilidad de sistemas. Si la entrada  $x[n]$  a un sistema estable es limitada (la magnitud no crece en forma ilimitada), entonces la salida  $y[n]$  también debe ser limitada. De otra manera, se entiende que ante una entrada acotada a un sistema estable su salida también debe ser acotada. En los sistemas físicos la estabilidad resulta por la presencia de mecanismos que disipan energía.

Bajo la anterior definición de estabilidad se determina las condiciones en las cuales un sistema LTI es estable. Se considera una entrada  $x[n]$  limitada en magnitud, lo que implica que  $|x[n]| < B$  para toda  $n$ , aplicada a un sistema LTI con respuesta al impulso unitario  $h[n]$  de la ecuación (11).

Para lo cual se tiene que:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n - k] \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| |x[n - k]| = B \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| \rightarrow |y[n]| \leq B \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|$$

Para que la salida  $y[n]$  sea acotada implica que la respuesta al impulso unitario es absolutamente sumable, esto es:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h[k] < \infty \quad (12)$$

Al estar  $y[n]$  acotada y la entrada también, entonces es una condición suficiente y necesaria para que el sistema LTI discreto sea estable. Dicho de otra manera, si a un sistema LTI discreto se le aplica una entrada como la delta de Kronecker su respuesta debe extinguirse en el tiempo para que al sumar todos los datos de la respuesta sea un valor finito.

### 2.2.1.2. Sistemas discretos de primer orden

De acuerdo a Lathi (2005, p. 102) en su libro “*Linear Systems and Signals*”, una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes viene definido de la siguiente manera.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (13)$$

Normalmente,  $N$  se selecciona para ser igual o mayor que  $M$  para evitar polos triviales. (Proakis & Manolakis, 2007, p. 294). Al despejar la salida  $y[n]$  se puede abrir la sumatoria de la parte izquierda de la ecuación (13), quedando de la siguiente manera:

$$a_0 y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \rightarrow y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$

En el caso de considerar que  $N = 0$ , la salida  $y[n]$  es no recursiva porque no depende de valores previos de la salida, como se puede observar en la ecuación (14).

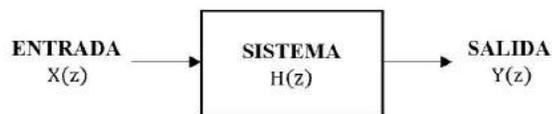
$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k] = \sum_{k=0}^M c_k x[n-k] \quad (14)$$

Donde  $c_k = \frac{b_k}{a_0}$  y como se puede observar en la ecuación (14) no depende de valores anteriores de la salida  $y[n]$ . Además, esta ecuación no recursiva (14), no necesita de condiciones auxiliares para determinar  $y[n]$ .

De la ecuación (14), se puede determinar la respuesta al impulso  $h[n]$  que es  $c_k$  con una duración de tiempo finito  $0 \leq n \leq M$ ; por tal motivo, se le denomina sistema de respuesta finita al impulso (FIR).

En el caso que  $N \geq 1$ , la ecuación se denomina recursiva y aumenta el orden de la ecuación de diferencias y por consecuencia necesita de condiciones iniciales. Para que el sistema sea causal, la ecuación (13) debe cumplir que la entrada  $x[n] = 0$  para un  $n < n_0 = 0$  (se considera  $n_0 = 0$ , cuando no se contempla tiempos de retardo en el sistema), entonces la salida  $y[n] = 0$  bajo la misma condición.

Al considerar que la transformada Z de la entrada  $x[n]$ , la salida  $y[n]$  y la respuesta al impulso  $h[n]$  es  $X(z)$ ,  $Y(z)$ ,  $H(z)$  respectivamente y mediante la propiedad de convolución el sistema de la Figura 1-2, se puede también representar como en la Figura 2-2.



**Figura 2-2:** Diagrama de bloques de un sistema en el dominio Z.  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

En el tiempo discreto la salida  $y[n]$  se representaba como una convolución entre la entrada  $x[n]$  y la respuesta al impulso  $h[n]$ . Por otro lado, en el dominio Z, la salida  $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$  es la multiplicación entre la entrada  $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$  y la respuesta a la frecuencia  $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$ . A este último término se le conoce también como función de transferencia y viene expresado comúnmente como una función racional en Z y se puede observar al aplicar la transformada Z a la ecuación (13).

$$\mathcal{Z} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \right\} \rightarrow \sum_{k=0}^N a_k \mathcal{Z}\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^M b_k \mathcal{Z}\{x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \rightarrow Y(z) \left[ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right] = X(z) \left[ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right]$$

Finalmente, la función de transferencia de un sistema discreto LTI en el dominio de Z viene dado como en la ecuación siguiente:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (15)$$

Para sistemas causales, la función de transferencia  $H(z)$  debe estar expresada como un polinomio de potencias negativas, entonces cuando se expresa como una función racional, el orden del numerador no debe ser mayor al del denominador. (Hsu, 2015, p. 124)

Entonces, un sistema lineal invariante en el tiempo discreto y causal de primer orden se representa, de manera general, mediante la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 a_k y[n-k] &= \sum_{k=0}^1 b_k x[n-k] \rightarrow a_0 y[n] + a_1 y[n-1] \\ &= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \end{aligned} \quad (16)$$

La ecuación (16), se puede expresar en términos de Z aplicando la transformada Z o empleando la ecuación (15).

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1}} = \frac{\beta_1 z + \beta_0}{\alpha_1 z + \alpha_0} \quad (17)$$

Donde,  $\beta_1 = b_0, \beta_0 = b_1$  y de forma similar para los coeficientes del denominador. Se realiza el cambio para que el subíndice del coeficiente coincida con el exponente de la variable Z.

### 2.2.1.3. Sistemas discretos de segundo orden

Un sistema lineal invariante en el tiempo discreto y causal de segundo orden se puede representar de forma general, mediante la ecuación (13).

$$\sum_{k=0}^2 a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^2 b_k x[n-k]$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

De igual manera este sistema de segundo orden en función del tiempo discreto puede ser representado en función de la variable Z mediante la ecuación (15).

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{\beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0} \quad (18)$$

Donde,  $\beta_2 = b_0, \beta_1 = b_1, \beta_0 = b_2$  y de forma similar para los coeficientes del denominador. Se realiza el cambio para que el subíndice del coeficiente coincida con el exponente de la variable Z.

Con respecto al denominador de la ecuación (18) se pueden presentar tres casos cuando las raíces son reales y diferentes, reales e iguales e imaginarias. Además, los casos para sistemas de segundo orden se aumentan al combinarse de diferente manera con el numerador.

### ***2.2.2. Identificación de sistemas dinámicos***

El término identificación también se lo conoce con el nombre de análisis experimental. De acuerdo a Isermann & Munchhof (2019, p. 6), define a la identificación como el desarrollo de modelos matemáticos mediante la medición de la entrada y salida de sistemas de composición arbitraria. Una ventaja importante es el hecho de que los mismos métodos de análisis experimentales se pueden aplicar a sistemas diversos y arbitrariamente complejos. Sin embargo, midiendo únicamente la entrada y la salida, solo se obtienen modelos que gobiernan el comportamiento de la entrada y la salida del sistema, es decir, los modelos en general no describen la estructura interna precisa del sistema. Estos modelos de entrada-salida son aproximaciones y aún son suficientes para muchas áreas de aplicación.

Para encontrar el modelo de un proceso existe la modelación teórica y el análisis experimental pero el análisis de un sistema no puede ser completamente teórico ni completamente experimental. Para beneficiarse de las ventajas de ambos enfoques, rara vez se utiliza solo el modelado teórico (que conduce a los llamados modelos de caja blanca) o solo el modelado experimental (que conduce a los llamados modelos de caja negra), sino más bien una mezcla de ambos a lo que se llama modelos de caja gris. Esta es una combinación bastante adecuada de los dos enfoques, que está determinada por el ámbito de aplicación del modelo y el sistema en sí.

Los modelos matemáticos que describen el comportamiento dinámico de los procesos se pueden dar como funciones que relacionan la entrada y la salida o como funciones que relacionan estados internos. En el primer caso, los parámetros del modelo se incluyen explícitamente en la ecuación, en el segundo caso, no. De acuerdo a Leondes (1987, p. 31), menciona que los parámetros de un sistema desempeñan un rol importante en el proceso de identificación; por tal motivo, los modelos matemáticos se clasificarán en primer lugar por tipo de modelo como modelos paramétricos y modelos no paramétricos. Los primeros son ecuaciones que contienen explícitamente los parámetros del proceso; como por ejemplo las ecuaciones en diferencia o la función de transferencia. Los modelos no paramétricos proporcionan una relación entre una determinada entrada y la respuesta correspondiente mediante una tabla o curva característica muestreada; como por ejemplo la respuesta al impulso o la respuesta en frecuencia.

### 2.2.2.1. Modelos Paramétricos

Estos métodos se basan en una estructura de modelo específica y si se asumen correctamente, se esperan resultados más precisos. Para realizar este procedimiento es necesario tener un conocimiento a priori. Luego que se conoce la estructura a aplicar en un proceso de identificación es necesario aplicar un método de estimación de parámetros. Los métodos de estimación de parámetros se basan en ecuaciones en diferencias cuando se trata de sistemas en tiempo discreto. Los métodos se basan en la minimización de determinadas señales de error mediante métodos de regresión estadística y se han complementado con métodos especiales para sistemas dinámicos. (Internacional Centre for Mechanical Science, 1988, p. 131)

Hay una serie de técnicas de estimación de parámetros bien conocidas que se han aplicado con éxito al problema de identificación. Incluyen los métodos de máxima verosimilitud, mínimos cuadrados, correlación cruzada, variable instrumental y aproximación estocástica. También, hay otro método como mínimos cuadrados. Es uno muy clásico con el que los investigadores científicos de muchas disciplinas están familiarizados. Además, el método de mínimos cuadrados es atractivo porque ofrece simplicidad conceptual y aplicabilidad a una amplia gama de situaciones en las que otras teorías de estimación estadística pueden ser difíciles de aplicar, pero exhibe propiedades estadísticas que son tan buenas como las de probabilidad máxima. método para la mayoría de las situaciones prácticas. Además, los algoritmos de identificación por mínimos cuadrados pueden relacionarse fácilmente con muchos otros algoritmos de identificación, haciendo posible un tratamiento unificado del problema de identificación del sistema. (Hsia, 1977, p. 4)

A continuación, se estudiará las diferentes estructuras para la identificación de sistemas a través de la ecuación del modelo de error. Se detallan las más comunes.

#### **Estructura del modelo ARX**

De acuerdo a Ljung (1987, p. 71), menciona que probablemente la relación entrada-salida más simple de un sistema, se obtiene describiéndola como una ecuación de diferencia lineal, así como:

$$\begin{aligned} y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_{n_a} y[n-n_a] \\ = b_1 x[n-1] + \dots + b_{n_b} x[n-n_b] + e[n] \end{aligned} \quad (19)$$

Donde  $e[n]$  es ruido blanco y entra como un error directo en la ecuación de diferencia. La ecuación (19) es llamada como modelo de ecuación de error y es similar a (13), sólo que se supone que un sistema real no es estrictamente causal, lo que significa que la entrada real  $x[n]$  no puede tener un efecto directo sobre la salida  $y[n]$ . Por tanto, el polinomio comienza con  $k = 1$ .

Los parámetros de ajuste para la ecuación (19) son:

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b}]^T \quad (20)$$

Sea  $\mathcal{Z}\{y[n]\} = Y(z)$ ,  $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z)$ ,  $\mathcal{Z}\{e[n]\} = E(z)$ ; entonces al aplicar la transformada  $Z$  a ambos lados de la ecuación (19), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_{n_a} y[n-n_a]\} &= \mathcal{Z}\{b_1 x[n-1] + \dots + b_{n_b} x[n-n_b] + e[n]\} \\ [1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}] Y(z) &= [b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}] X(z) + E(z) \\ A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \ , \ B(z) &= b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b} \end{aligned} \quad (21)$$

De forma más compacta:

$$A(z)Y(z) = B(z)X(z) + E(z) \quad \rightarrow \quad Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}X(z) + \frac{1}{A(z)}E(z)$$

O expresado de manera similar:

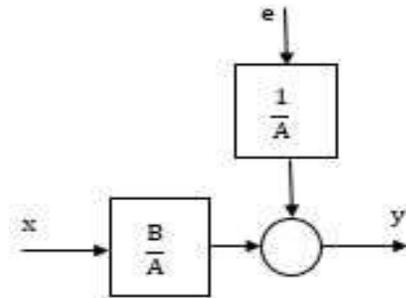
$$A(z)y[n] = B(z)x[n] + e[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \frac{B(z)}{A(z)}x[n] + \frac{1}{A(z)}e[n]$$

Donde se considera lo siguiente:

$$G(z, \theta) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad H(z, \theta) = \frac{1}{A(z)} \quad (22)$$

La expresión (19) es llamado también un modelo ARX (Auto-Regressive with eXogenous inputs), donde AR se refiere a la parte auto regresiva  $A(z)y[n]$  y X corresponde a la entrada exógena  $B(z)x[n]$  o entrada extra.

Mediante la ecuación (22), se puede construir el siguiente diagrama de bloques de la estructura ARX.



**Figura 3-2:** Estructura del modelo ARX.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

En la Figura 3-2, se observa que quizás no sea el modelo más natural desde un punto de vista físico: se supone que el ruido blanco pasa por la dinámica del denominador del sistema antes de ser agregado a la salida. El conjunto de modelos de ecuación de error tiene una propiedad muy importante que lo convierte en una opción principal en muchas aplicaciones: el predictor define una regresión lineal, como se observa en la ecuación (23).

Sea el vector  $\varphi[n] = [-y[n-1] \ \dots \ -y[n-n_a] \ x[n-1] \ \dots \ x[n-n_b]]^T$ , conocido como el vector regresión, entonces el modelo del predictor es una regresión lineal de la forma:

$$\hat{y}[n|\theta] = \theta^T \varphi[n] = \varphi^T[n]\theta \quad (23)$$

## Estructura del modelo ARMAX

El modelo de la ecuación (19) no permite describir las propiedades de la perturbación. Se puede agregar flexibilidad, expresando el error como un promedio móvil de ruido blanco. (Eykhoff, 1978, p. 117). Esto conlleva a:

$$\begin{aligned} y[n] + a_1y[n-1] + \dots + a_{n_a}y[n-n_a] \\ = b_1x[n-1] + \dots + b_{n_b}x[n-n_b] + e[n] + c_1e[n-1] + \dots \\ + c_{n_c}e[n-n_c] \end{aligned} \quad (24)$$

Sea  $C(z) = 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c}$  y luego de aplicar la transformada Z a la ecuación (24), se puede plantear lo siguiente:

$$A(z)Y(z) = B(z)X(z) + E(z) \rightarrow Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}X(z) + \frac{C(z)}{A(z)}E(z)$$

O expresado de manera similar:

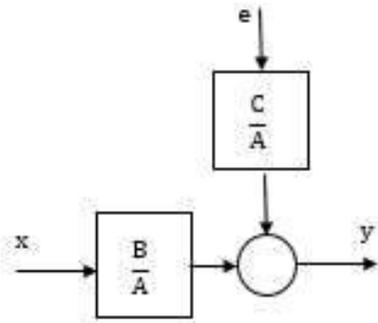
$$A(z)y[n] = B(z)x[n] + C(z)e[n] \rightarrow y[n] = \frac{B(z)}{A(z)}x[n] + \frac{C(z)}{A(z)}e[n]$$

Donde se considera lo siguiente:

$$G(z, \theta) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad H(z, \theta) = \frac{C(z)}{A(z)} \quad (25)$$

La expresión (24) representa un modelo ARMAX (Auto-Regressive Moving Average with eXogenous inputs), en donde la parte  $C(z)e[n]$  representa un promedio móvil y añadido las mismas características del ARX.

Mediante la ecuación (25), se puede construir el siguiente diagrama de bloques de la estructura ARMAX.



**Figura 4-2:** Estructura del modelo ARMAX.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021.

El modelo de la Figura 4-2, de acuerdo Nelles (2001, p. 47) ha llegado a ser una herramienta estándar en teoría de control para describir sistemas y diseño de controladores. Presenta un predictor pseudolineal, pero no se mencionará en el presente trabajo.

### Estructura del modelo error de salida

El modelo error de salida se lo conoce simplemente como modelo OE (Output Error). Si se supone que la relación entre la entrada y la salida sin perturbación “w” puede ser expresada como una ecuación lineal de diferencias y las perturbaciones consisten de mediciones de ruido blanco (Pintelon & Schoukens, 2001, p. 93); entonces se representa como:

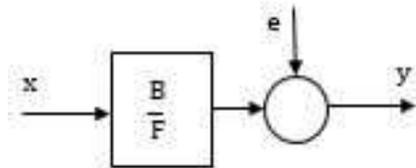
$$w[n] + f_1 w[n - 1] + \dots + f_{n_f} w[n - n_f] = b_1 x[n - 1] + \dots + b_{n_b} x[n - n_b] \quad (26)$$

$$y[n] = w[n] + e[n]$$

Donde  $f_1, \dots, f_{n_f}$  son los valores de la función de densidad de probabilidad de la perturbación. Al aplicar la transformada Z a la ecuación (26) y considerando que  $F(z) = 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n_f} z^{-n_f}$ , se tiene expresado de la siguiente manera:

$$y[n] = \frac{B(z)}{F(z)}x[n] + e[n] \quad (27)$$

Mediante la ecuación (27) se representa a continuación su correspondiente diagrama de bloques.



**Figura 5-2:** Estructura del modelo OE.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021.

El modelo de la Figura 5-2 representa el diagrama de bloques de una estructura del modelo error de salida. Este modelo también presenta un predictor para encontrar sus correspondientes parámetros. Los parámetros para este modelo se definen a continuación:

$$\theta = [b_1 \ \dots \ b_{n_b} \ f_1 \ \dots \ f_{n_f}]^T \quad (28)$$

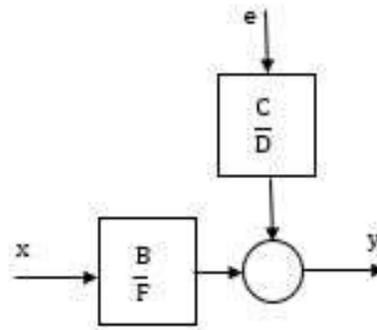
Obviamente, la ecuación (28) no es la misma para el vector de los parámetros de los modelos anteriores.

### Estructura del modelo Box-Jenkins

Este modelo se basa en la estructura anterior de error de salida y su diferencia es agregar flexibilidad, expresando el error como un promedio móvil de ruido blanco. La salida de esta estructura se representa de la siguiente forma:

$$y[n] = \frac{B(z)}{F(z)}x[n] + \frac{C(z)}{D(z)}e[n] \quad (29)$$

El modelo de la ecuación (29) según Yankov (2013, p. 134) esta es la parametrización de dimensión finita más natural y a partir de la cual se desprenden todas las anteriores.



**Figura 6-2:** Estructura del modelo B-J.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021.

La Figura 6-2 muestra la estructura de un modelo de error de salida en un diagrama de bloques. El predictor de este modelo es definido de una forma más compleja. El polinomio  $D(z)$  del modelo OE viene dado como:

$$D(z) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d}$$

Las funciones de transferencia  $G$  y  $H$  que multiplican a los términos  $x[n]$  y  $e[n]$  respectivamente en la ecuación (29), se parametrizan independientemente como funciones racionales.

Cada una de estas estructuras presentan parámetros los cuales se identifican mediante algún método de estimación. Entre ellos, se tiene mínimos cuadrados como método analítico, el mismo que se analizará en la siguiente sección.

### 2.2.3. Métodos de estimación de parámetros

Una vez que se conoce los sistemas a identificar y se aplica diferentes tipos de estructuras basada en parámetros viene la parte de encontrar dichos parámetros; las diferentes formas de encontrarlos dependen de las variadas maneras de organizar la búsqueda y de distintos puntos de vista sobre lo que

se debe buscar. En la presente sección, se trata acerca de los métodos para la búsqueda de los parámetros de un sistema; los métodos que se aplican en el presente trabajo son mínimos cuadrados y gradiente decreciente. Para el ajuste de los parámetros del sistema es necesario la selección de una función de costo.

De acuerdo a Wang & Garnier (2014, p. 53) en su libro de System Identification, define a la función de costo como una expresión matemática para evaluar el desempeño de la velocidad de ajuste de un parámetro o conjunto de datos. Se busca que la función sea aditiva y que no se auto compense; por tal motivo, se suele emplear una función par como la función cuadrática, el valor absoluto, entre otras.

La función de costo “J”, se la conoce también con el nombre de función de criterio. Para el presente trabajo, la función de costo es un indicador para evaluar el error entre la señal medida y el predictor.

Sea  $y[n]$  la salida de un sistema en tiempo discreto y  $\hat{y}[n]$  el predictor para encontrar la estimación de los parámetros de una estructura de identificación; entonces el error de predicción  $\varepsilon[n]$ , se determina como:

$$\varepsilon[n] = y[n] - \hat{y}[n]$$

En consecuencia, la función de costo de acuerdo con el criterio del error cuadrático se expresa como:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon^2 \quad (30)$$

La ecuación (30) permite estimar los parámetros de las estructuras de identificación, mencionadas anteriormente, mediante un método de minimización.

### 2.2.3.1. Método de mínimos cuadrados

De acuerdo a Ljung (1997, p. 176) el método de mínimos cuadrados se desarrolla a partir de la parametrización lineal y el criterio cuadrático y su única característica es ser una función cuadrática en el vector de parámetros  $\theta$ . La estimación de los parámetros de una estructura ARX de la ecuación (19), se lo puede realizar a través de mínimos cuadrados; para lo cual se empieza reemplazando el predictor de la ecuación (23) en la función de costo (30).

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [y[n] - \varphi^T[n]\theta]^2 \quad (31)$$

La ecuación (31) se le conoce como el criterio de mínimos cuadrados para la regresión lineal del predictor de la estructura ARX y en forma vectorial se expresa en la ecuación (32).

Sea el vector  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}$  y el predictor  $\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}[0, \theta] \\ \hat{y}[1, \theta] \\ \vdots \\ \hat{y}[N, \theta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^T[0] \\ \varphi^T[1] \\ \vdots \\ \varphi^T[N] \end{bmatrix} \theta = \mathbf{\Phi}\theta$ ; entonces la función de

costo en función de los vectores  $\mathbf{y}$  e  $\hat{\mathbf{y}}$ , se representa como:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2N} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T \cdot (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2N} (\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\theta)^T \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\theta) \quad (32) \\ \frac{1}{2N} (\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\theta)^T \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\theta) &= \frac{1}{2N} (\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{\Phi}\theta - \theta^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y} + \theta^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\theta) \\ \frac{1}{2N} (\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\theta)^T \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{\Phi}\theta) &= \frac{1}{2N} [\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{y})^T \theta + \theta^T \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\theta] \end{aligned}$$

La minimización se realiza derivando la ecuación de costo con respecto al parámetro  $\theta$  e igualando a cero.

$$\frac{d}{d\theta} (J) = \frac{1}{2N} [-2\mathbf{\Phi}^T \mathbf{y} + 2\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}\theta] = 0 \rightarrow \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T \theta = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y}$$

$$\theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \quad (33)$$

Al derivar la ecuación (31) con respecto al parámetro  $\theta$ , se obtiene un término que permite conocer el orden del sistema a identificarse.

$$R = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi[n] \varphi^T[n] \quad (34)$$

De igual manera, se puede expresar en función de vectores y la ecuación (35) representa el determinante de la matriz generada.

### 2.2.3.2. Método de gradiente decreciente

El gradiente decreciente o descendente es un método numérico que pretende determinar la dirección de variación de los parámetros que definen una función de costo y que disminuya hasta alcanzar un mínimo global. El algoritmo de gradiente se puede utilizar para encontrar la solución óptima para problemas de optimización cuadrática y problemas de optimización no lineal. Puede manejar no solo los sistemas de regresión lineal con el vector de información conocido, sino también los sistemas lineales y no lineales con el vector de información desconocido. (Ding et al., 2019, p. 6)

En la ecuación (35) se define el gradiente decreciente.

$$\theta[n] = \theta[n - 1] - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} (J(\theta)) \quad (35)$$

Donde  $J(\theta)$  es la función de costo,  $\theta[n]$  es el parámetro para minimizar y  $\alpha$  es el factor de aprendizaje. En la ecuación (35) se puede aproximar la derivada de la función de costo, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(J(\theta)) \cong \Delta J(\theta) = J(\theta + \epsilon) - J(\theta - \epsilon)$$

Donde  $\epsilon$  es un valor muy pequeño y en ocasiones parten con el mismo valor del aprendizaje,  $J(\theta + \epsilon)$  es la función de costo en incremento y  $J(\theta - \epsilon)$  es la función de costo en decremento. Al reemplazar esta aproximación de la derivada de la función de costo en la ecuación (35); la búsqueda del parámetro  $\theta[n]$  se define como:

$$\theta[n] = \theta[n - 1] - \alpha \Delta J(\theta) \quad (36)$$

Para el problema de la minimización, es el mínimo global lo que interesa. Es obvio que una característica inherente de las rutinas de búsqueda iterativas es que solo se puede garantizar la convergencia a una solución local del problema. Para encontrar la solución global, generalmente no hay otra forma que iniciar la rutina de minimización iterativa en diferentes valores iniciales factibles y comparar los resultados. Una posibilidad importante es utilizar algún procedimiento de estimación preliminar para producir un buen valor inicial para la minimización. (Ljung, 1987, p. 338)

#### **2.2.4. Validación de un modelo**

Una vez obtenido los parámetros de la estructura de un modelo de identificación es necesario validar el modelo obtenido. Si un modelo pasa las pruebas de validación, debería ser un modelo aceptable, incluso si no da el mínimo global de la función de criterio.

De acuerdo a Kunusch (2003, p. 26) menciona que la validación de un modelo tiene varios aspectos a considerar y debe responder a tres preguntas básicas: ¿Se adapta lo suficientemente bien el modelo a los datos observados?, ¿Es el modelo lo suficientemente adecuado para nuestro propósito? y ¿Describe el modelo al sistema real?. El autor también menciona que en una aplicación de identificación el mayor problema a la hora de enfrentarse con el modelo lo presentan los datos en si mismo; por lo que las técnicas de validación tienen a centrarse en responder las primeras dos preguntas a través del conocimiento previo, el análisis de los datos y experiencia en el uso de modelos.

#### 2.2.4.1. Criterio de mejor ajuste

El criterio del mejor ajuste se basa en una razón entre la varianza de la salida del modelo “ $y_m$ ” y la salida real del sistema con la energía de la salida real. El mejor ajuste se mide por el coeficiente de determinación denotado  $R^2$ , expresado por:

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |y[n] - y_m[n]|^2}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |y[n]|^2} \quad (37)$$

El coeficiente de la ecuación (37), se puede expresar en porcentaje en caso de que se desee. Cuando su valor se encuentre más cercano a la unidad representa que el modelo encontrado tiene un mejor ajuste.

## CAPÍTULO III

### 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El diseño de investigación que se utilizó, para este trabajo de titulación, fue experimental, porque su variable independiente se aplicó a un predictor de regresión lineal para ajustar los parámetros de un sistema dinámico de una estructura ARX y así se logró la mejor identificación.

El método de investigación que se utilizó al inicio fue el método deductivo ya que será necesario primero entender toda la teoría relacionada a la identificación de sistemas dinámicos a través de una estructura ARX y de métodos de estimación de parámetros. Luego se continuó con el método explicativo el cual facilitó realizar una relación causa-efecto para el procesamiento digital de los datos adquiridos de cada uno de los modelos a identificados.

Por lo tanto, en el presente capítulo se inició seleccionando los casos de sistemas de primer y segundo orden; esta selección se lo realizó con sistemas comunes en el área de la electrónica en tiempo continuo. Posteriormente, se realizó el proceso de identificación en tiempo discreto de cada uno de los casos seleccionados mediante la estructura ARX y con los dos métodos de estimación de parámetros como son gradiente decreciente y mínimos cuadrados.

#### 3.1. Selección de sistemas

A partir de la ecuación (13), se plantean los posibles modelos de primer y segundo orden bajo la estructura ARX para caracterizar los sistemas representados en tiempo continuo. Para realizar la selección de estos es necesario verificar la estabilidad y plantear las condiciones respectivas. En el análisis de estabilidad, se puede realizar mediante programación con comandos directos o por el contrario mediante análisis matemático como se observa en la sección 3.1.1 y 3.1.3

### 3.1.1. Análisis de estabilidad y causalidad de sistemas de primer orden

Un sistema general de primer orden se definió en la ecuación (17) del capítulo anterior. Esta ecuación es la respuesta al impulso en el dominio Z. Para conocer el sistema en tiempo discreto se aplica la transformada Z inversa. Como se muestra a continuación:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 \pm a_1 z^{-1}} = \frac{b_0}{a_0} \left( \frac{1}{1 \pm \frac{a_1}{a_0} z^{-1}} \right) + \frac{b_1}{a_0} \left( \frac{1}{1 \pm \frac{a_1}{a_0} z^{-1}} \right) z^{-1}$$
$$h[n] = \frac{b_0}{a_0} \left( \pm \frac{a_1}{a_0} \right)^n u[n] + \frac{b_1}{a_0} \left( \pm \frac{a_1}{a_0} \right)^{n-1} u[n-1], \quad a_0 \neq 0 \quad (38)$$

Donde  $u[n]$  es la función escalón unitario en tiempo discreto. Esta función es causal de acuerdo con la definición 6 del capítulo anterior. Por lo tanto, el sistema  $h[n]$  de primer orden de la ecuación (38) es causal.

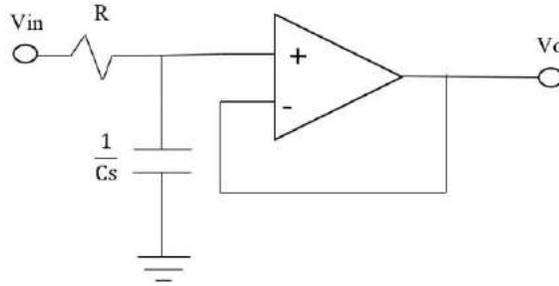
La estabilidad del sistema de primer orden de la ecuación (38), se lo verifica con la ecuación (12) del capítulo anterior. Entonces, para que la sumatoria converja debe cumplir con la siguiente restricción:

$$\left| \frac{a_1}{a_0} \right| < 1 \quad \rightarrow \quad |a_1| < |a_0| \quad (39)$$

Como se puede observar en la ecuación (39), para la estabilidad de un sistema de primer orden, como se define en (17), únicamente depende de los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$ . Estos coeficientes precisan el valor del polo del sistema y que no es necesario el valor del cero para analizar la estabilidad. Estas consideraciones son necesarias tener en cuenta para el momento de inicializar los valores de los parámetros.

### 3.1.2. Casos de sistemas de primer orden

Un primer modelo de primer orden para considerar es el de un filtro pasa bajo activo como se muestra en la Figura 1-3.



**Figura 1-3:** Filtro activo de primer orden pasa bajo.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

La función de transferencia del sistema de primer orden para el circuito de la Figura 1-3, viene dada por la ecuación (40).

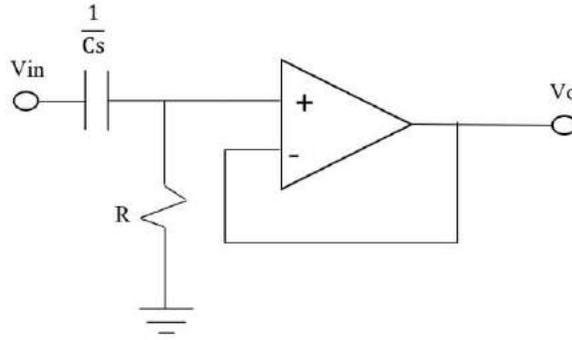
$$V_0(s) = \frac{R \left( \frac{1}{Cs} \right)}{R + \frac{1}{Cs}} V_{in}(s) = \frac{1}{RCs + 1} V_{in}(s) \rightarrow \frac{V_0(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

Donde  $\omega_c = \frac{1}{RC}$  es la frecuencia de corte del filtro pasa bajo expresada en  $\left[ \frac{\text{rad}}{s} \right]$ . Como valor arbitrario se escoge de  $1000 \left[ \frac{\text{rad}}{s} \right]$ .

$$G_1(s) = \frac{1000}{s + 1000} \quad (40)$$

Mediante la expresión (40), se busca modelar en tiempo discreto mediante una función de transferencia en el dominio Z. Dicha modelación se realiza con una estructura ARX.

Un segundo modelo se utiliza un circuito de un filtro pasa altos activo de primer orden, como se observa en la Figura 2-3.



**Figura 2-3:** Filtro activo pasa alto de segundo orden.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

La función de transferencia del circuito de la Figura 2-3 se expresa en la ecuación (40). Esta expresión se encuentra representada en el dominio de la transformada de Laplace.

$$V_0(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} V_{in}(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} V_{in}(s) \rightarrow \frac{V_0(s)}{V_{in}(s)} = \frac{s}{s + \omega_c}$$

Donde  $\omega_c = \frac{1}{RC}$  es la frecuencia de corte del filtro pasa bajo expresada en  $\left[\frac{\text{rad}}{s}\right]$ . Como valor arbitrario se escoge de  $1000\left[\frac{\text{rad}}{s}\right]$ .

$$G_2(s) = \frac{s}{s + 1000} \quad (41)$$

Los modelos continuos de las ecuaciones (40) y (41) son muy utilizados en diferentes campos como puede ser electrónica de potencia y procesamiento digital de señales. En la Tabla 1-3, se reúnen los dos modelos en tiempo continuo con su respectiva descripción. Estos modelos se van a caracterizar en tiempo discreto mediante una estructura ARX bajo una función de transferencia en el dominio Z.

**Tabla 1-3:** Casos de sistemas de primer orden

No.	Modelo Continuo	Descripción
1	$G_1(s) = \frac{1000}{s + 1000}$	Filtro pasa bajo con frecuencia de corte: $\omega_c = 1000$
2	$G_2(s) = \frac{s}{s + 1000}$	Filtro pasa alto con frecuencia de corte: $\omega_c = 1000$

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

### 3.1.3. Análisis de estabilidad y causalidad de modelos de segundo orden

Un sistema general de primer orden se definió en la ecuación (17) del capítulo anterior. Esta ecuación es la respuesta al impulso en el dominio Z. Siguiendo el mismo procedimiento de sistemas de primer orden, se tiene que la función de transferencia se puede abrir en fracciones parciales por ende es necesario analizar únicamente el polinomio del denominador.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0}{a_0} + \frac{\left(b_1 - \frac{b_0 a_1}{a_0}\right)z + \left(b_2 - \frac{b_0 a_2}{a_0}\right)}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{b_0}{a_0} + \frac{A}{z - p_1} + \frac{B}{z - p_2}$$

$$h[n] = \frac{b_0}{a_0} \delta[n] + A(p_1)^{n-1} u[n-1] + B(p_2)^{n-1} u[n-1] \quad (42)$$

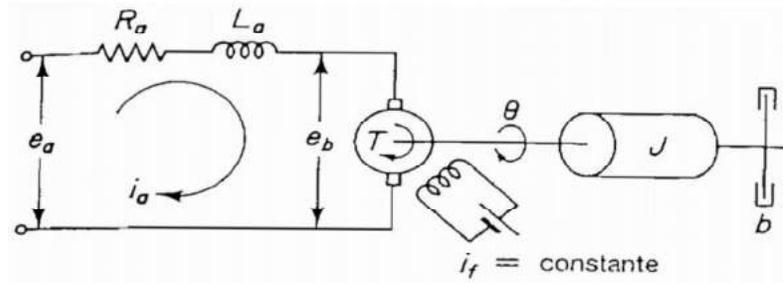
Donde  $p_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}$  y  $p_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}$  son los polos de la función de transferencia de segundo orden. Las constantes A y B son producto de las funciones parciales; pero para el análisis de causalidad y estabilidad del sistema no es de importancia conocer sus valores respectivos. Como se puede observar en la ecuación (42), el sistema es causal y para que sea estable debe cumplir lo siguiente:

$$|p_1| < 1, \quad |p_2| < 1 \quad (43)$$

En la ecuación (43) se puede determinar que la estabilidad de un sistema de segundo orden, los polos de dicho sistema deben estar contenidos en un círculo de radio unitario.

### 3.1.4. Casos de sistemas de segundo orden

Como primer modelo se tiene un sistema tipo servo el cual se puede observar en la Figura 3, estos sistemas son de segundo orden y son muy empleados en la industria.



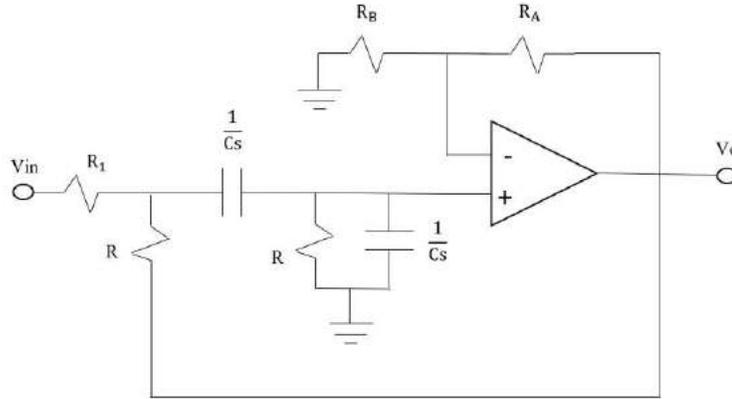
**Figura 3-3:** Circuito de un servomotor de corriente directa.  
Fuente: (Panchi, 1999)

Donde el modelo del servo, luego de un análisis de la parte eléctrica y mecánica, se reduce a la función de transferencia de la ecuación (44). Para el presente trabajo se utiliza valores arbitrarios.

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} = \frac{1.17}{s(0.12s + 1)} \quad (44)$$

Donde  $K_m$  es la constante de ganancia del motor y  $T_m$  es la constante de tiempo del motor. Las dos constantes se relacionan con los elementos que constituyen el circuito del servomotor.

Un siguiente modelo de segundo orden es un filtro activo pasa banda denominado cédula de Sallen-Key, el mismo que puede ser observar en la Figura 4-3.



**Figura 4-3:** Filtro activo pasa banda de Sallen-Key.  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

La función de transferencia en continuo mediante la transformada de Laplace se expresa en la ecuación (45).

$$\frac{V_0(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{R^2}{R+R_1}kCs}{1 + \frac{RC}{R+R_1}[R_1(3-k) + 2R]s + \frac{R_1}{R+R_1}(RC)^2s^2}$$

Donde  $k = \frac{R_A+R_B}{R_B}$ ; además, considerando que las resistencias son iguales el sistema se reduce a:

$$\frac{V_0(s)}{V_{in}(s)} = \frac{2RCs}{1 + \frac{3}{2}RCs + \frac{1}{2}(RC)^2s^2} = \frac{\frac{4}{(RC)^2}s}{s^2 + \frac{3}{RC}s + \frac{2}{(RC)^2}}$$

Considerando valores arbitrarios de resistencia  $R = 10[k\Omega]$  y capacitancia  $C = 100[\mu F]$ , se tiene que:

$$\frac{V_0(s)}{V_{in}(s)} = \frac{4s}{s^2 + 3s + 2} \quad (45)$$

La ecuación (45) representa un sistema continuo de un filtro pasa banda, donde el rango de frecuencias que permite pasar el circuito es  $[0.383, 5.21] \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Una vez que se realice la identificación de este sistema se debe probar para frecuencias dentro y fuera del rango indicado.

En la Tabla 2-3 se enlista los dos modelos en continuo mediante la transformada de Laplace con su respectiva descripción.

**Tabla 2-3:** Casos de sistemas de segundo orden

No.	Modelo continuo	Descripción
1	$G_3(s) = \frac{1.17}{s(0.12s + 1)}$	Modelo en continuo mediante la transformada de Laplace de un servomotor de corriente directa.
2	$G_4(s) = \frac{4s}{s^2 + 3s + 2}$	Modelo en continuo mediante la transformada de Laplace de un filtro pasa banda.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Las ecuaciones (39) y (43) ayudan a inicializar los parámetros en el método de gradiente decreciente para una función de transferencia en el dominio Z, considerando que se mantenga la estabilidad de los sistemas.

### 3.2. Adquisición de datos de los modelos continuos seleccionados

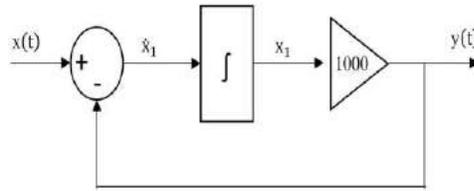
El primer paso es adquirir los datos de entrada y salida de cada uno de los modelos. Para este proceso se realizará mediante programación con la ayuda de las ecuaciones del espacio de estados. En la presente sección, se detalla el espacio de estados para cada uno de los modelos seleccionados en el proceso de identificación de sistemas. La adquisición de los datos se lo realiza a partir del espacio de estados es para evitar implementar cada uno de los sistemas en la vida real y ahí almacenar los datos de entrada y salida. Lo que se pretende es evaluar los métodos de estimación de parámetros especificados inicialmente para encontrar un modelo en tiempo discreto y por ende su correspondiente función de transferencia en el dominio Z.

#### 3.2.1. Espacio de estados de los modelos de primer orden

El espacio de estados del modelo  $G_1(s)$  de la Tabla 1-3, se representa en la ecuación (46).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x - 1000 * x_1 \\ y = 1000 * x_1 \end{cases} \quad (46)$$

Donde  $x_1$  es la variable de estado. La ecuación (46) representa el espacio de estado y fue obtenido a partir del diagrama de bloques del modelo  $G_1(s)$ , como se observa en la Figura 5-3.



**Figura 5-3:** Diagrama de bloques del modelo  $G_1(s)$ .

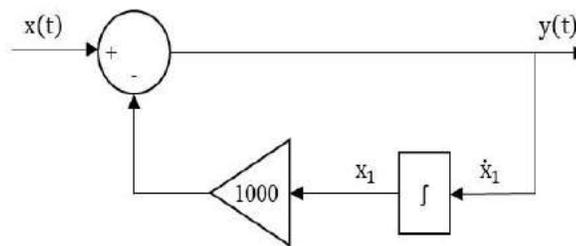
Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Mediante la ecuación (46), se puede realizar la adquisición de datos del modelo continuo para el proceso de identificación. La respuesta del sistema ante una entrada escalón se puede observar en la Figura 7-3.

El espacio de estados del modelo  $G_2(s)$  de la Tabla 1-3, se representa en la ecuación (47).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x - 1000 * x_1 \\ y = \dot{x}_1 \end{cases} \quad (47)$$

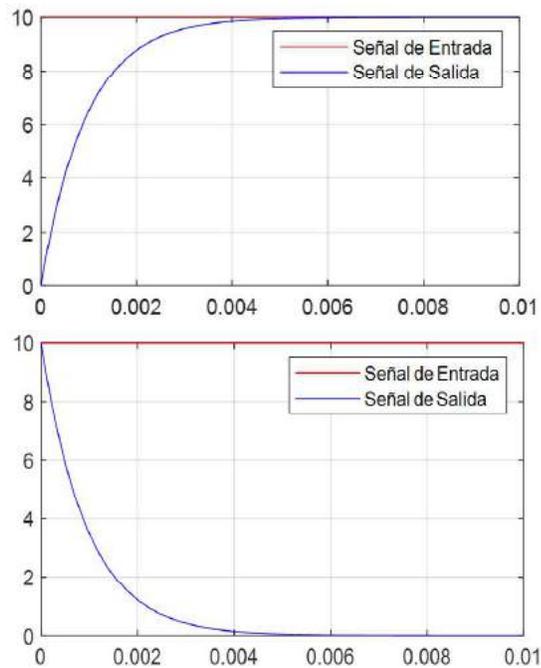
La ecuación (47) fue obtenida a partir del diagrama de bloques de la Figura 6-3. Dicho diagrama se construyó con la ecuación diferencial del sistema.



**Figura 6-3:** Diagrama de bloques del modelo  $G_2(s)$ .

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Para los modelos  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  se aplica una señal escalón de entrada para el proceso de adquisición de datos o incluso puede ser otra señal de entrada. Las respuestas de ambos modelos se pueden observar en la Figura 7-3. La imagen superior representa la respuesta del modelo  $G_1(s)$  y la imagen inferior es el modelo  $G_2(s)$ .



**Figura 7-3:** Respuesta de los sistemas de primer orden ante una entrada escalón. (imagen superior es el modelo  $G_1(s)$  y la imagen inferior es el modelo  $G_2(s)$ )  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

En el Algoritmo 1 se detallan los pasos a realizar para la adquisición de datos de los modelos seleccionados tanto para primer orden como para segundo orden.

**Algoritmo 1.** Adquisición de datos mediante espacio de estados

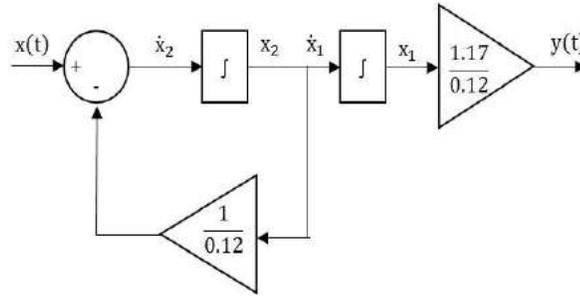
- a) Definir el vector tiempo “t” y medir su longitud “N”.
- b) Construir el vector de entrada “x”, en este caso una señal escalón.
- c) Inicializar el vector de salida “y” en cero.
- d) Actualizar el vector de salida “y” a partir de las ecuaciones de estado del modelo continuo.

### 3.2.2. *Espacio de estados de los modelos de segundo orden*

El espacio de estados para el modelo  $G_3(s)$  seleccionado, se representa en la ecuación (48).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x - \frac{1}{0.12}x_2 \\ y = \frac{1.17}{0.12}x_1 \end{cases} \quad (48)$$

El espacio de estados de la ecuación (48) nacen a partir del diagrama de bloques de la Figura 8-3.



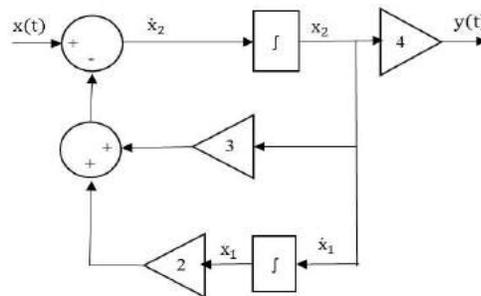
**Figura 8-3:** Diagrama de bloques del modelo  $G_3(s)$ .

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

El espacio de estados para el modelo  $G_4(s)$  seleccionado, se representa en la ecuación (49).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x - 2x_1 - 3x_2 \\ y = 4x_2 \end{cases} \quad (49)$$

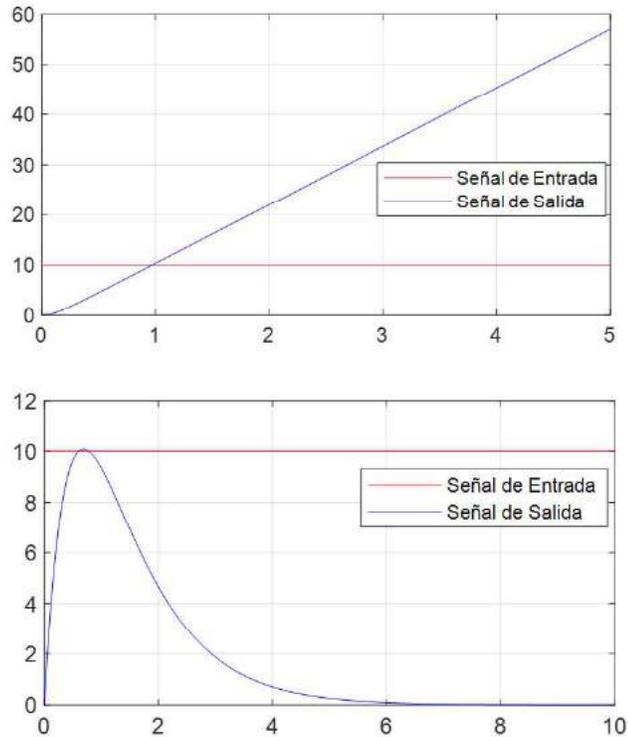
El espacio de estados de la ecuación nace a partir del diagrama de bloques de la Figura 8-3.



**Figura 9-3:** Diagrama de bloques del modelo  $G_4(s)$ .

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

En la Figura 10-3 se visualiza la señal de salida de los sistemas de segundo orden ante una entrada escalón.



**Figura 10-3:** Respuesta de los sistemas de segundo orden ante una entrada escalón. (imagen superior es el modelo  $G_3(s)$  y la imagen inferior es el modelo  $G_4(s)$ ).

**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

La adquisición de los datos de los modelos de segundo orden seleccionados se los puede hacer mediante programación implementado el Algoritmo 1.

### 3.3. Estimación de parámetros

En la sección 3.3.1 se verifica cuales sistemas se pueden ajustar a una estructura ARX para realizar el proceso de estimación de parámetros y así obtener la función de transferencia en el dominio Z de los modelos seleccionados.

Por otro lado, en la sección 3.3.2 se propone una función de transferencia en el dominio Z, donde los parámetros que se generen serán encontrados mediante el método de gradiente decreciente para minimizar la función de costo.

### 3.3.1. Estimación de parámetros mediante mínimos cuadrados

En la ecuación (19) del capítulo 2, se expresa la estructura ARX mediante una ecuación de diferencias de manera general. En esta ecuación se observa que la salida  $y[n]$  se despeja fácilmente y que depende de valores pasados tanto de la entrada  $x[n]$  y de su correspondiente salida.

Por tal motivo, para un sistema de primer orden bajo una estructura ARX sin ceros triviales se representa en la ecuación (50).

$$y[n] + a_1y[n - 1] = b_1x[n - 1] \quad (50)$$

A partir de la ecuación (50) se construye la función de transferencia para un tiempo discreto mediante la transformada Z. Esta función de transferencia se presenta en la ecuación (51).

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1}} \quad (51)$$

En cambio, para un sistema de segundo orden la forma general de una ecuación en diferencia sin ceros triviales y bajo una estructura ARX de la ecuación (19) del capítulo anterior, se observa en la ecuación (52).

$$y[n] + a_1y[n - 1] + a_2y[n - 2] = b_1x[n - 1] + b_2x[n - 2] \quad (52)$$

Su correspondiente función de transferencia en el dominio Z se define como:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (53)$$

En la Tabla 3-3 se presenta el modelo en continuo y su correspondiente modelo discreto en ARX, el cual se identifica mediante el método de estimación de parámetros como es mínimos cuadrados. En el siguiente capítulo, análisis de resultados, se justifica por qué el modelo  $G_2(s)$  no presenta un modelo equivalente en el dominio Z bajo una estructura ARX.

**Tabla 3-3:** Casos de sistemas de primer orden

No.	Modelo Continuo	Modelo discreto en ARX
1	$G_1(s) = \frac{1000}{s + 1000}$	$G_1(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$
2	$G_2(s) = \frac{s}{s + 1000}$	No permite bajo una estructura ARX.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Para el modelo  $G_1(z)$  de la Tabla 3-3, el vector de parámetros  $\theta$  contiene dos elementos como son los coeficientes  $a_1$  y  $b_1$ .

En la Tabla 4-3 se recoge los modelos en continuo de segundo orden para un tiempo continuo con su correspondiente modelo en el dominio Z.

**Tabla 4-3:** Casos de sistemas de segundo orden

No.	Modelo continuo	Modelo discreto en ARX
1	$G_3(s) = \frac{1.17}{s(0.12s + 1)}$	$G_3(z) = \frac{b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$
2	$G_4(s) = \frac{4s}{s^2 + 3s + 2}$	$G_4(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Para el modelo  $G_3(z)$ , el vector de parámetros contiene a los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  y  $b_1$ . Mientras que  $G_4(z)$  presenta cuatro elementos en el vector  $\theta$ , los cuales son  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$ .

El método de mínimos cuadrados se basa en estimar el vector de parámetros mediante la ecuación (33) de la sección 2.2.3.1 en el capítulo anterior. El Algoritmo 2 presenta los pasos para realizar la programación del presente método de estimación de parámetros.

**Algoritmo 2.** Estimación de parámetros mediante mínimos cuadrados

- Adquisición de datos de entrada “x” y salida “y” como vectores de dimensión  $N \times 1$ .
- Generar los vectores de retardo para los vectores de salida y entrada (por ejemplo, si el modelo es el  $G_4(z)$ , los retardos son  $y[n - 1]$ ,  $y[n - 2]$ ,  $x[n - 1]$ ,  $x[n - 2]$ )
- Construir la matriz  $\Phi$  con los retardos.
- Calcular el vector  $\theta$  con la ecuación (33).

### 3.3.2. Estimación de parámetros mediante gradiente decreciente

El gradiente decreciente debido a la manipulación que permite con la función de costo y los parámetros de estimación se plantea para los modelos continuos de primer orden a través de la ecuación (17). En cambio, para los modelos continuos de segundo orden se puede plantear una función de transferencia mediante la ecuación (18).

**Tabla 5-3:** Casos de sistemas discretos para el método de gradiente decreciente

No.	Modelo Continuo	Modelo discreto
1	$G_1(s) = \frac{1000}{s + 1000}$	$H_1(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1}}$
2	$G_2(s) = \frac{s}{s + 1000}$	
3	$G_3(s) = \frac{1.17}{s(0.12s + 1)}$	$H_2(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$
4	$G_4(s) = \frac{4s}{s^2 + 3s + 2}$	

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

En la Tabla 5-3 se observa los modelos discretos para cada sistema continuo. Como el gradiente decreciente permite trabajar con todos los parámetros de un sistema discreto, lo que se interpreta que la salida del sistema depende tanto de valores actuales y del pasado de la entrada y la salida. El tener más parámetros, lo vuelve un poco más complejo al momento de procesarlo. Las complicaciones se presentan porque la función de costo está en función de cuatro y seis parámetros de  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$  respectivamente.

Como primer punto del método de gradiente decreciente es generar un modelo inicial de partida. Para esto, es necesario tener en cuenta las condiciones de estabilidad y causalidad de un sistema discreto. Por lo tanto, para inicializar un modelo de primer orden discreto se debe considerar la ecuación (39), caso contrario el algoritmo del gradiente decreciente no permite llegar a minimizar la función de costo.

Por otro lado, para inicializar un sistema discreto de segundo orden hay que tener en cuenta la ecuación (43). Luego de tener un modelo inicial es necesario considerar una función de costo y para este método se mantiene con la misma del método de mínimos cuadrados, dicha función se define en la ecuación (31).

En el Algoritmo 3 se describen los pasos para desarrollar el método del gradiente decreciente a través de programación.

**Algoritmo 3.** Estimación de parámetros mediante gradiente decreciente

- a) Adquisición de datos de entrada “x” y salida “y” como vectores de dimensión  $N \times 1$ .
- b) Construir un vector de parámetros con los coeficientes de  $H_1(z)$  o  $H_2(z)$  dependiendo el caso.
- c) Generar un modelo inicial “ $y_m$ ” teniendo en cuenta las condiciones de estabilidad de acuerdo con el orden del sistema y el vector de parámetros  $\theta$ .
- d) Establecer la función de costo “J” que puede ser la ecuación (31).
- e) Declarar un valor alfa de aprendizaje y un valor de incremento, ambos valores pueden empezar siendo muy pequeños (por ejemplo 0.0001).
- f) Calcular los nuevos valores del vector  $\theta$  mediante la ecuación (36).
- g) Calcular nuevamente el modelo  $y_m$  con los nuevos valores del vector  $\theta$ .
- h) Verificar si la función de costo está siendo minimizada para regresar al paso f. Realizar este proceso hasta que valor se desee ser minimizada o cuantas iteraciones se le permita al programa.
- i) En el caso que la función de costo no esté siendo minimizada terminar la programación.

## CAPÍTULO IV

### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente capítulo, se presentan los resultados obtenidos en el proceso de identificación de sistemas bajo la estructura ARX y con dos métodos de estimación de parámetros. Para lo cual, se ha visto necesario separar en dos secciones como son 4.1 y 4.2 que corresponden análisis de resultados con el método de mínimos cuadrados y gradiente decreciente respectivamente. Finalmente, se realizará la demostración de la hipótesis mediante la prueba Chi-cuadrado.

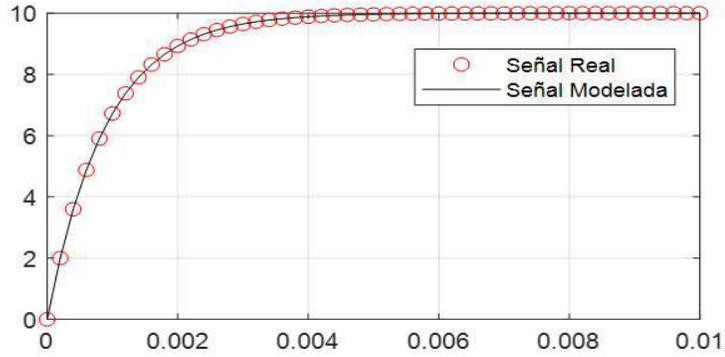
#### 4.1. Análisis de Resultados de mínimos cuadrados

En la sección 4.1.1 se muestra el inconveniente de modelar un filtro pasa alto debido a que el grado del denominador es igual al del numerador en su función de transferencia para un sistema de tiempo continuo. En cambio, con un filtro pasa bajo no se presentan estos inconvenientes.

Por otro lado, en la sección 4.1.2 se detallan los resultados en el proceso de identificación de los sistemas de segundo orden seleccionados en el presente trabajo. Para estos sistemas si se pudo realizar una identificación bajo una estructura ARX y con el método de mínimos cuadrados.

##### *4.1.1. Resultados de los modelos de primer orden con mínimos cuadrados*

En el sistema del filtro pasa bajo de primer orden no se presentó ningún inconveniente con la función de transferencia en el dominio Z que se muestra en la Tabla 3-3. Luego de implementar el Algoritmo 2 de la sección 3.3.1, el método de mínimos cuadrados para el modelo  $G_1(s)$  presentó la siguiente identificación.

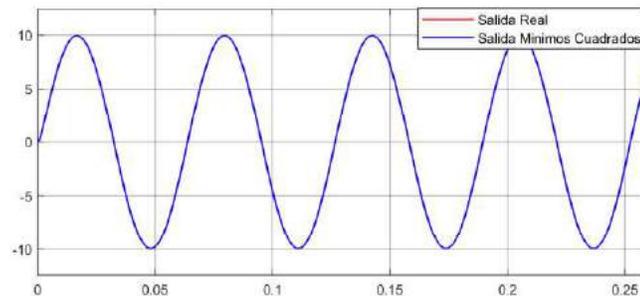


**Figura 1-4:** Respuesta de salida del modelo  $G_1(s)$  y su correspondiente señal modelada con mínimos cuadrados.  
Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Como se observa en la Figura 1-4, el método de mínimos cuadrados ayudó a encontrar los parámetros del modelo en la estructura ARX. La función de transferencia en el dominio Z, se presenta en la ecuación (54).

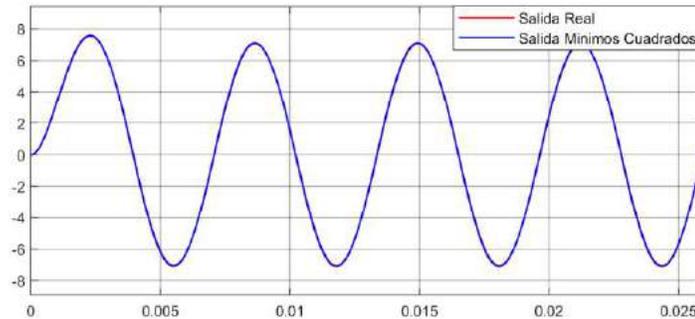
$$G_1(z) = \frac{0.0200000000000007z^{-1}}{1 - 0.9799999999999993z^{-1}} \quad (54)$$

Para evaluar el modelo identificado, ecuación (54), se le aplica una entrada senoidal de amplitud  $A = 10$  y frecuencia de entrada  $\omega_{in} = 100 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ . Como se trata de un filtro pasa bajo la misma entrada debe encontrarse en la salida del sistema. En la Figura 2-4 se observa la respuesta del sistema y se compara con la salida real.



**Figura 2-4:** Respuesta del modelo  $G_1(s)$  y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 100 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ .  
Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

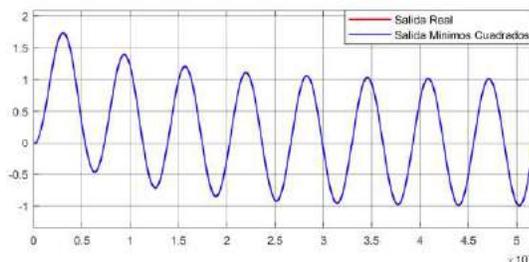
Para continuar con la verificación del modelo, se utiliza una entrada senoidal de la misma amplitud 10, pero con una frecuencia de entrada de  $\omega_{in} = 1000 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ . Como ya es conocido la salida del filtro pasa bajo, cuando la frecuencia de corte es igual a la de entrada, debe ser similar a la entrada, pero con una amplitud disminuida en  $\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.07$ . En la Figura 3-4 se observa este suceso y se compara con la señal real.



**Figura 3-4:** Respuesta del modelo  $G_1(s)$  y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 1000 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ .

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Para terminar con la evaluación del modelo  $G_1(z)$ , recién identificado, se le aplica una entrada senoidal de frecuencia de  $\omega_{in} = 10^4 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ . De acuerdo con lo que dice la teoría, cuando la frecuencia de entrada es superior a la de corte, entonces la salida del filtro pasa bajo debe ser nula en amplitud. Dicha consecuencia se puede observar en la Figura 4-4.



**Figura 4-4:** Respuesta del modelo  $G_1(s)$  y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 10^4 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ .

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

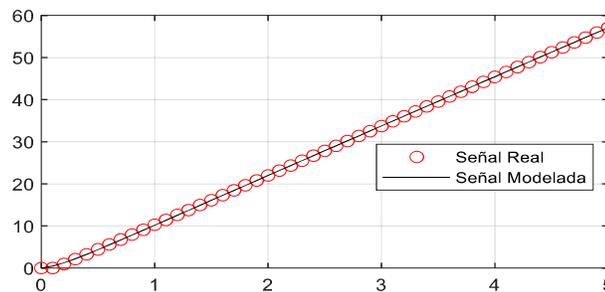
El modelo  $G_2(s)$ , al tratar de ajustarse mediante la ecuación (51) correspondiente a una función de transferencia de primer orden bajo una estructura ARX, presentó una anulación de un parámetro  $b_1 = 0$ , lo que implica que la función de transferencia siempre es nula. Entonces, no puede realizar una identificación con el método de mínimos cuadrados bajo la estructura de autoregresión con variable exógena.

#### 4.1.2. Resultados de los modelos de segundo orden con mínimos cuadrados

El modelo  $G_3(s)$  se caracterizó con la ecuación (53) y presentó que el parámetro  $b_1 = 0$  y por ende su función de transferencia en el dominio  $Z$  se reduce a:

$$G_3(z) = \frac{0,0975}{z^2 - 1.166666666665191z + 0.166666666665165} \quad (55)$$

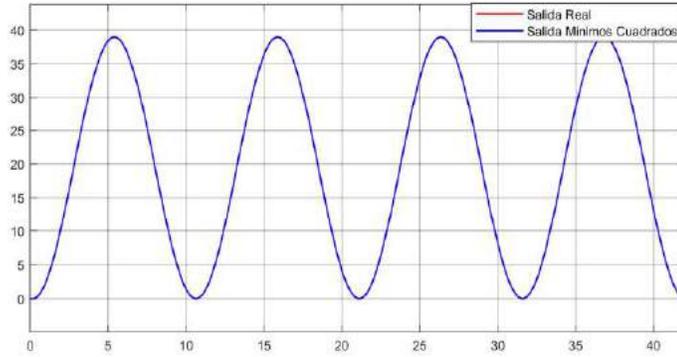
La ecuación (55) representa la función de transferencia en el dominio  $Z$  modelada y en la Figura 5-4 se observa la respuesta del sistema real y del sistema modelado.



**Figura 5-4:** Respuesta de salida del modelo  $G_3(s)$  y su correspondiente señal modelada con mínimos cuadrados.

**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

La Figura 6-4 muestra la respuesta del sistema real y del sistema identificado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal. Las dos señales se encuentran sobrepuestas. En este caso no es necesario establecer un cierto valor de frecuencia debido a que se trata de un motor de corriente continua y no de un filtro como en el caso anterior.



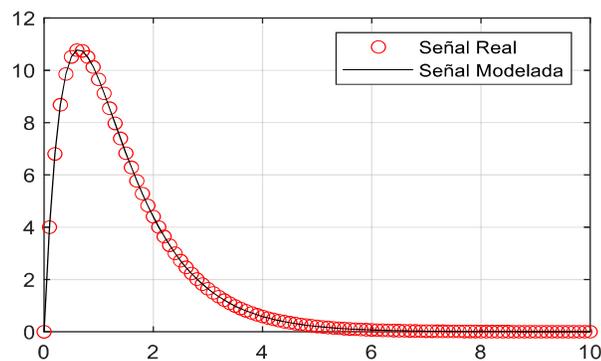
**Figura 6-4:** Respuesta del modelo  $G_3(s)$  y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Con la ecuación (53) se caracterizó el sistema  $G_4(s)$  y se pudieron encontrar los cuatro elementos del vector de parámetros. La función de transferencia en el dominio Z modelada del filtro pasa banda se expresa en la ecuación (56).

$$G_4(z) = \frac{0.0004z - 0.0004}{z^2 - 1.999699726z + 0.999699746} \quad (56)$$

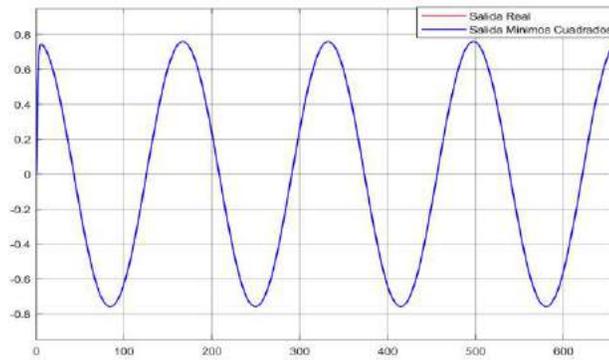
La ecuación (56) representa la función de transferencia en el dominio Z modelada mediante el método de mínimos cuadrados. Para su análisis se aplica una señal senoidal de entrada de amplitud  $A = 10$ , su amplitud es irrelevante, a diferentes frecuencias de entrada.



**Figura 7-4:** Respuesta de salida del modelo  $G_4(s)$  y su correspondiente señal modelada con mínimos cuadrados.

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

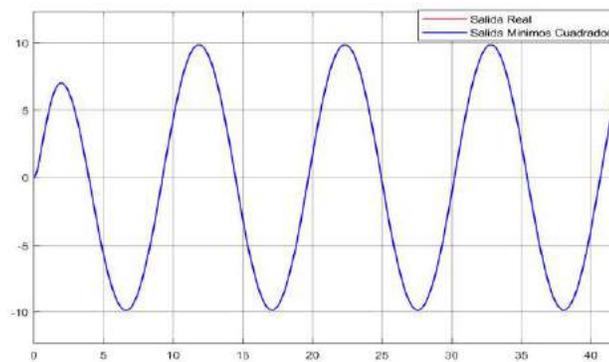
La primera señal de prueba es una onda senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 0.038 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ , que es una frecuencia antes del rango del ancho de banda del filtro. La respuesta ante esta entrada se puede observar en la Figura 8-4. Se espera que ante esta frecuencia de entrada la salida sea idealmente nula evitando que entre una frecuencia fuera del rango.



**Figura 8-4:** Respuesta del modelo  $G_4(s)$  y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 0.038 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ .

**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

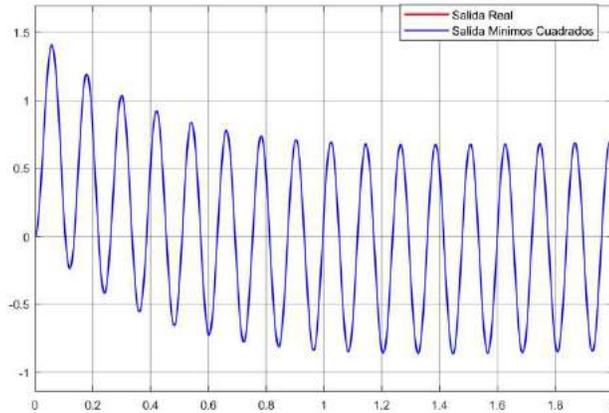
Como segunda prueba se escoge una señal senoidal de frecuencia de entrada  $\omega_{in} = 0.6 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ . En la Figura 9-4 se observa la respuesta del sistema ante esta señal de entrada. Como la frecuencia de entrada se encuentra dentro del rango del filtro se espera que la respuesta sea la misma señal de entrada.



**Figura 9-4:** Respuesta del modelo  $G_4(s)$  y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 0.6 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ .

**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

Finalmente, se experimenta con una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 52.1 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ . En la Figura 10-4 se puede observar la respuesta del sistema real y del modelo ante esta señal de entrada. Para la salida del sistema se espera que la señal sea nula porque se encuentra por encima del rango de frecuencia del filtro.



**Figura 10-4:** Respuesta del modelo  $G_4(s)$  y su respectivo sistema modelado con mínimos cuadrados ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 52.1 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ .

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

## 4.2. Análisis de Resultados de Gradiente Decreciente

En la sección 4.2.1 se muestran los resultados de identificación de sistemas de primer orden de los dos modelos seleccionados aplicando el método de gradiente decreciente para la estimación de los parámetros.

En la presente sección se utiliza el Algoritmo 3 del capítulo anterior para la identificación de los sistemas planteados. La estrategia para que el método de gradiente decreciente pueda minimizar la función de costo es establecer un modelo inicial. El valor de la función de costo inicial debe ser lo más pequeño posible para realizar el ajuste de los parámetros. Lograr encontrar un modelo inicial puede tardar varios minutos e incluso horas, el proceso se vuelve tedioso cuando el tiempo de muestro de las señales de entrada y salida son un valor sumamente pequeño.

Encontrar un modelo inicial con un pequeño valor de función de costo es fundamental para que el algoritmo pueda trabajar y lograr estimar los parámetros del sistema. Mientras menor sea el número de parámetros es mejor para que el algoritmo realice una minimización de la función de costo. Una

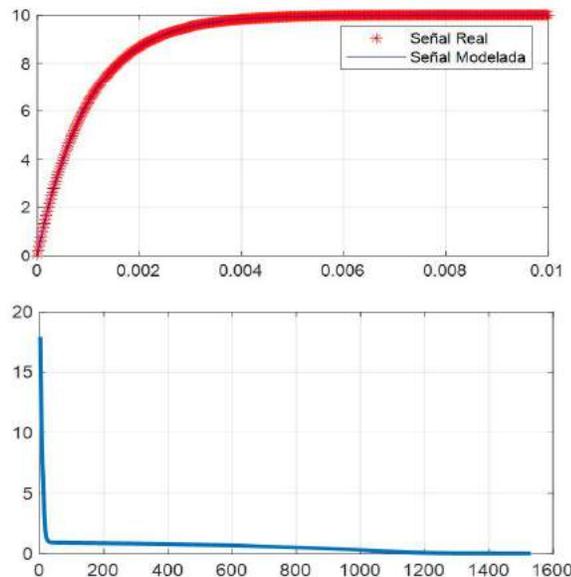
vez que se logra conseguir un buen modelo inicial se prosigue modificando los valores del aprendizaje “ $\alpha$ ” y del incremento “ $\epsilon$ ”.

Después de modificar los valores de “ $\alpha$ ” y “ $\epsilon$ ”, se verifica si el algoritmo puede ajustar el sistema modelado con la señal real. En caso de que no se haya logrado ajustar el modelo, se debe nuevamente buscar otro modelo inicial para hacer arrancar otra vez el algoritmo. Todo este proceso se realiza para cada uno de los sistemas a identificarse.

En la sección 4.2.2 se presentan de igual manera los resultados de la modelación de sistemas de segundo orden de los modelos continuos seleccionados y se mantiene el mismo procedimiento para encontrar un modelo inicial.

#### 4.2.1. Resultados de los modelos de primer orden con gradiente decreciente

Los coeficientes de la función de transferencia  $H_1(z)$  de la Tabla 5-3 se encontraron con el Algoritmo 3 y se expresa el modelo identificado en la ecuación (57).



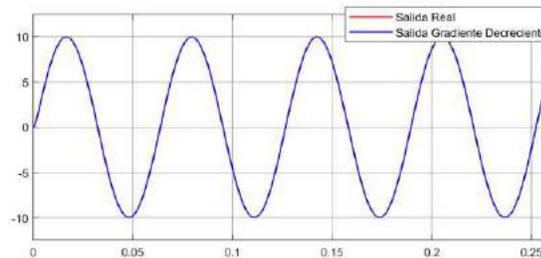
**Figura 11-4:** Respuesta de salida del modelo  $G_1(s)$  y su correspondiente señal modelada con gradiente decreciente ante una entrada escalón (La figura superior es la respuesta de salida y la inferior es la evolución de la función de costo).

**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

En la Figura 11-4 se observa la evolución de la función de costo y que termina el proceso de ajuste antes de las 1600 iteraciones.

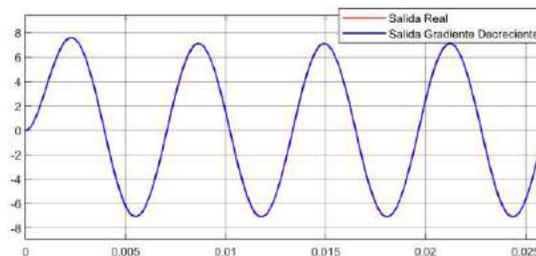
$$H_1(z) = \frac{0.003401131307619z + 0.015829824535012}{0.960958668921340z - 0.941726983893381} \quad (57)$$

Para las siguientes pruebas se le aplica una entrada senoidal de amplitud  $A = 10$  al modelo identificado de la ecuación (57). En el primer caso, la frecuencia de la señal de entrada al sistema es  $\omega_{in} = 100[\text{rad/s}]$  y su respuesta se puede observar en la Figura 12-4. Las dos señales tanto de la salida real como del sistema modelado están sobrepuestas.



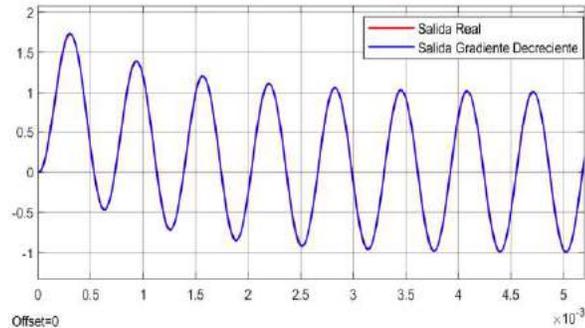
**Figura 12-4:** Respuesta del modelo  $G_1(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 100[\text{rad/s}]$ .  
Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Como segunda prueba se aplica una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 1000 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$  y como se observa en la Figura 13-4 siguen las señales sobrepuestas tanto la salida real como la salida del modelo recién identificado.



**Figura 13-4:** Respuesta del modelo  $G_1(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 1000 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ .  
Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Finalmente, como última prueba se aplica una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 10000 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$  y se puede ver en la Figura 14-4 que la señal se extingue cumpliendo con negar la entrada a señales de frecuencias mayores a la de corte.

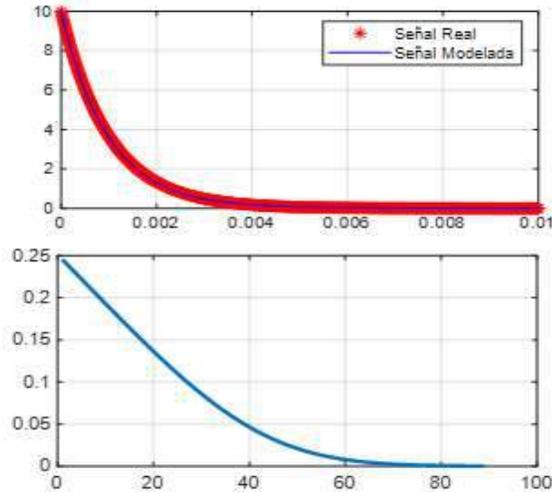


**Figura 14-4:** Respuesta del modelo  $G_1(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 10000 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ .

**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

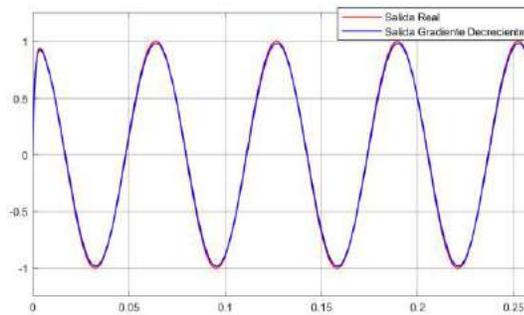
Cuando se desee probar el funcionamiento para frecuencias muy superiores a  $10000 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$  es necesario tener en cuenta el tiempo de muestreo del sistema identificado. No se puede muestrear con un tiempo muy grande al periodo de la señal de entrada porque no permite tener información del sistema.

El modelo  $G_2(s)$  también fue identificado mediante el método de gradiente decreciente. Debido a que se trata de un filtro pasa alto es necesario evaluarlo para una entrada senoidal en al menos tres casos cuando la frecuencia de entrada es mayor, igual y menor a la frecuencia de corte del sistema.



**Figura 15-4:** Respuesta de salida del modelo  $G_2(s)$  y su correspondiente señal modelada con gradiente decreciente ante una entrada escalón (La figura superior es la respuesta de salida y la inferior es la evolución de la función de costo).  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

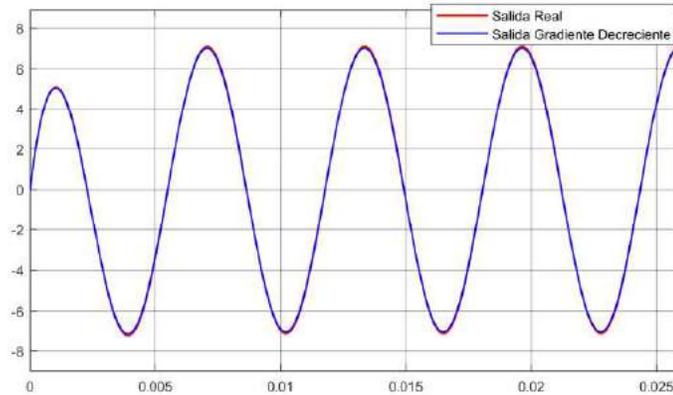
En la Figura 15-4 se observa la señal modelada y la señal real del sistema  $G_2(s)$  y además se presenta la evolución de la función de costo en su proceso de minimización. También se puede observar que el proceso de identificación terminó antes de las 100 iteraciones.



**Figura 16-4:** Respuesta del modelo  $G_2(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 100[rad/s]$ .  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

En la Figura 16-4 se observar la respuesta real y modelada mediante gradiente decreciente del sistema de primer orden que corresponde a un filtro pasa alto. Para esta prueba, se utilizó una señal de entrada

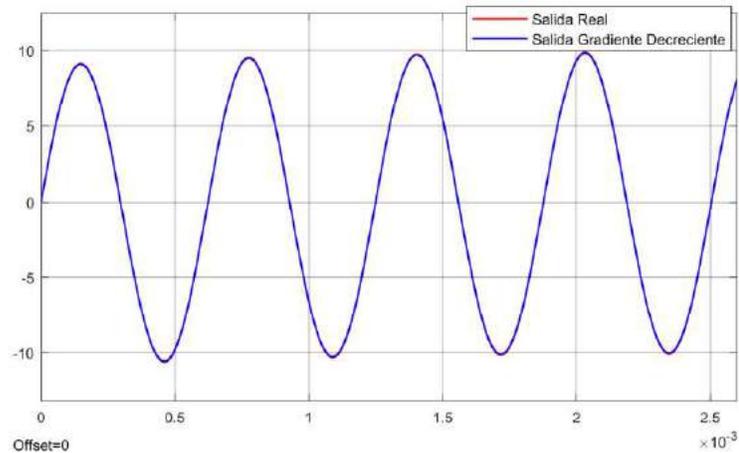
senoidal de amplitud  $A = 10$  y frecuencia de entrada  $\omega_{in} = 100[\text{rad/s}]$ . La señal de salida debe ser nula por el tipo de sistema y es justamente esto lo que se observa.



**Figura 17-4:** Respuesta del modelo  $G_2(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 1000 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ .

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

En la Figura 17-4 se observa la respuesta del sistema real y modelado del filtro pasa alto ante una entrada senoidal de amplitud  $A = 10$  y frecuencia de entrada  $\omega_{in} = 1000[\text{rad/s}]$ . Por medio de esta prueba, se espera que la respuesta del sistema no alcance la amplitud de la señal de entrada.



**Figura 18-4:** Respuesta del modelo  $G_2(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 10000 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ .

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

Finalmente, se aplica una entrada senoidal de amplitud  $A = 10$  y frecuencia de entrada  $\omega_{in} = 10000$ [rad/s], ante el sistema real y modelado del filtro pasa alto. La señal de salida se esperó que sea idéntica a la de entrada.

En la Tabla 1-4 se observan los valores del aprendizaje, del incremento, el modelo inicial para que el algoritmo de gradiente decreciente realice el proceso de minimización de la función de costo y entregue los valores de los parámetros del modelo  $H_2(z)$  de la ecuación (58). Además, esta tabla muestra los valores de la función de costo inicial y final.

**Tabla 1-4:** Valores para arrancar el algoritmo de gradiente decreciente en los sistemas de primer orden.

Modelo	Descripción	Valores
$G_1(s) = \frac{1000}{s + 1000}$	Vector de parámetros inicial	$\theta = [0.01, 0.02, 1, -0.9]$
	Aprendizaje	$\alpha = 0.13$
	Incremento	$\varepsilon = 10^{-5}$
	Tiempo de muestreo	$t_s = 0.00002$ [s]
	Número de iteraciones	1530
	Valor de la Función de costo inicial	$J_0 = 19.993$
	Valor de la Función de costo final	$J_f = 3.7(10^{-5})$
$G_2(s) = \frac{s}{s + 1000}$	Vector de parámetros inicial	$\theta = [0.991, -0.991, 1, -0.982]$
	Aprendizaje	$\alpha = 0.1$
	Incremento	$\varepsilon = 10^{-5}$
	Tiempo de muestreo	$t_s = 0.00001$ [s]
	Número de iteraciones	89
	Valor de la Función de costo inicial	$J_0 = 0.3264$
	Valor de la Función de costo final	$J_f = 2.6(10^{-4})$

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

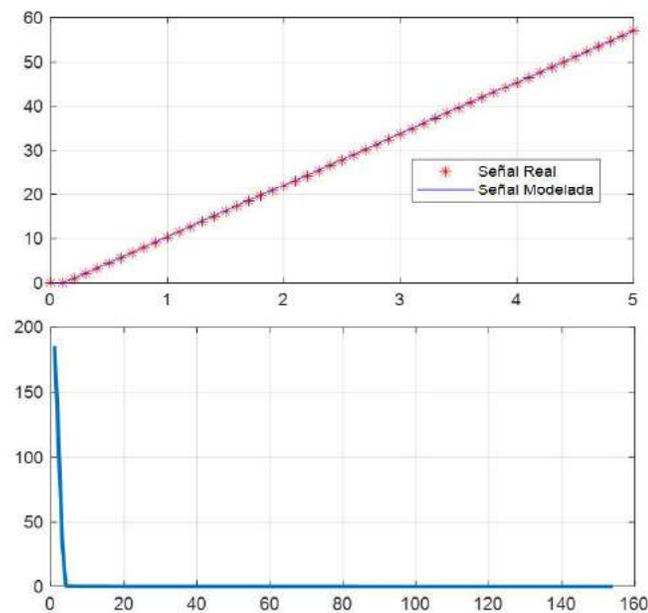
Los valores de la Tabla 1-4 se fueron hallando de acuerdo con la evolución de la función de costo, toma tiempo estar inicializando estos valores porque es necesario empezar con un modelo donde su error cuadrático medio sea en el orden de las decenas para que el método encuentre los parámetros para un buen modelo. Además, esta tabla recoge los dos modelos identificados.

$$H_2(z) = \frac{0.991038216903074z - 0.991020805506037}{0.996027682192273z - 0.985969885748067} \quad (58)$$

Como se puede notar mediante el método de gradiente decreciente se pudo encontrar los valores de los coeficientes de la función de transferencia  $H_2(z)$ , lo que no se pudo lograr mediante mínimos cuadrados por la estructura que debía seguir el modelo.

#### 4.2.2. Resultados de los modelos de segundo orden con gradiente decreciente

En la Figura 19-4 se observa como el sistema modelado se ajusta al sistema  $G_3(s)$  y la evolución de la función de costo. Además, se puede apreciar que con menos de 160 iteraciones el método de gradiente decreciente logra encontrar los coeficientes del sistema  $H_3(z)$ .



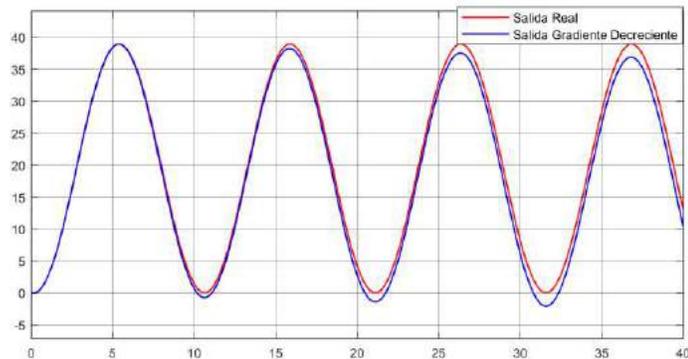
**Figura 19-4:** Respuesta de salida del modelo  $G_3(s)$  y su correspondiente señal modelada con gradiente decreciente ante una entrada escalón (La figura superior es la respuesta de salida y la inferior es la evolución de la función de costo).

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

En la ecuación (59) se observa el modelo identificado en el dominio  $Z$  para el modelo del servomotor de corriente directa encontrado a partir de la minimización de la función de costo por el método de gradiente decreciente.

$$H_3(z) = \frac{0.102528773876749}{z^2 - 1.129910944071272z + 0.130220132669145} \quad (59)$$

Una vez obtenido el sistema modelado se le pone a prueba mediante una entrada senoidal y su respuesta se observa en la Figura 20-4, en esta ocasión el método de mínimos cuadrados tiene una ligera diferencia con la señal real. Para este sistema como no es un filtro de los que se ha venido analizando no es necesario evaluar ante varias frecuencias. Pero es necesario indicar que no se puede evaluar para frecuencias que no se encuentren acorde con el tiempo de muestreo en el proceso de identificación.

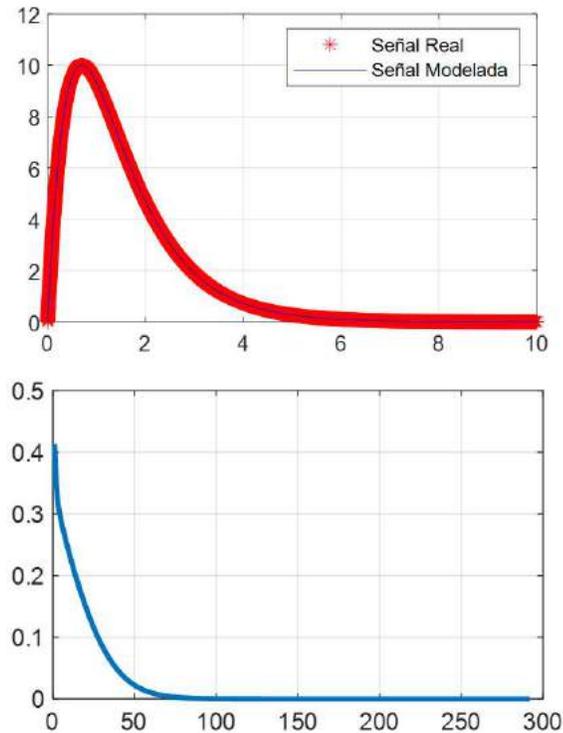


**Figura 20-4:** Respuesta del modelo  $G_3(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal.

**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

En la búsqueda de un modelo inicial para el algoritmo de gradiente decreciente en el sistema  $G_3(s)$  no fue muy complicado debido a que su tiempo de muestreo es alto ( $t_s = 0.1 [s]$ ), pero para el siguiente sistema  $G_4(s)$  se complicó encontrar un modelo inicial porque su tiempo de muestreo es muy pequeño ( $t_s = 0.0001 [s]$ )

En el sistema  $G_4(s)$  se necesitó utilizar un tiempo de muestreo pequeño para poder evaluar el sistema modelado con entradas senoidales de diferente frecuencia debido a que se trata de un filtro pasa banda. En la Figura 21-4 se observa la respuesta del modelo identificado y la evolución de la función de costo. Además, se puede apreciar que el método de gradiente decreciente estimó los parámetros del sistema  $H_4(z)$ .

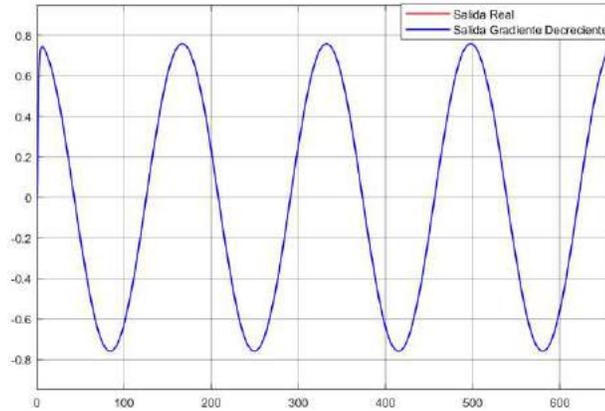


**Figura 21-4:** Respuesta de salida del modelo  $G_4(s)$  y su correspondiente señal modelada con gradiente decreciente ante una entrada escalón.  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

En la ecuación (60) se expresa el sistema modelado en el dominio  $Z$  mediante el método de gradiente decreciente. Este sistema representa un filtro pasa banda por lo cual es necesario evaluar ante una entrada senoidal de diferentes frecuencias. Como se necesita evaluar para diferentes frecuencias es por tal motivo que el tiempo de muestreo debía ser muy pequeño ( $t_s = 0.0001$  [s]).

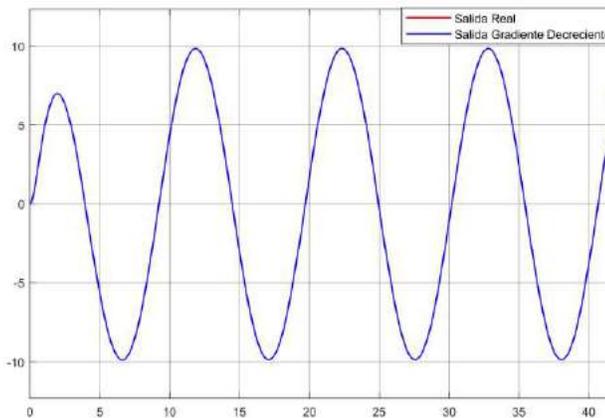
$$H_4(z) = \frac{0.000399999999202z - 0.0004000000001062}{z^2 - 1.999699715001674z + 0.999699734998370} \quad (60)$$

La primera prueba es ante una entrada senoidal de amplitud  $A = 10$  y frecuencia  $\omega_{in} = 0.038$   $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ . En la Figura 22-4 se observa la respuesta del sistema modelado y real ante dicha entrada. Esta frecuencia está por debajo del ancho de banda del filtro, por tal motivo, se espera que la señal de salida sea casi nula.



**Figura 22-4:** Respuesta del modelo  $G_4(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 0.038 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ .  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

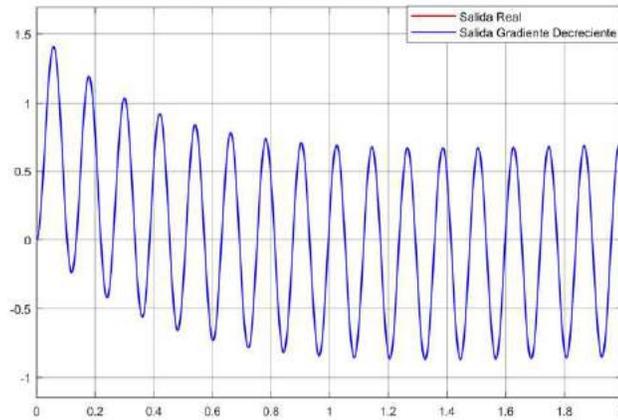
Como segunda prueba se aplica al sistema modelado de la ecuación (60) una entrada senoidal de amplitud  $A = 10$  y frecuencia  $\omega_{in} = 0.6 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ . En la Figura 23-4 se observa la respuesta del sistema modelado ante dicha entrada. Esta frecuencia se encuentra dentro del ancho de banda del filtro, por tal motivo se espera que la misma señal de entrada se encuentre a la salida.



**Figura 23-4:** Respuesta del modelo  $G_4(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 0.6 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ .  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

Finalmente, se aplica una señal de prueba del tipo senoidal de igual amplitud que en los dos casos anteriores, pero de frecuencia  $\omega_{in} = 52.1 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ . En la Figura 24-4 se observa la respuesta del sistema

modelado ante dicha entrada. Esta frecuencia se encuentra por encima del ancho de banda del filtro, por tal razón se espera que la respuesta sea nula.



**Figura 24-4:** Respuesta del modelo  $G_4(s)$  y su respectivo sistema modelado con gradiente decreciente ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega_{in} = 52.1 \left[ \frac{rad}{s} \right]$ .  
**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

En la Tabla 2-4 se pueden observar los valores de arranque para el algoritmo de gradiente decreciente tanto para el modelo  $G_3(s)$  y  $G_4(s)$ . Se puede observar en esta tabla que el vector de parámetros del modelo  $G_4(s)$  necesitó que casi sea el mismo sistema real para arrancar con el proceso de minimización de la función de costo, por tal motivo tomó mucho tiempo llegar a ese modelo inicial. En este caso, necesitó que el modelo inicial arranque con un error cuadrático medio de aproximadamente 0,5.

Por otro lado, el tercer sistema que corresponde al motor de corriente directa no fue necesario arrancar con un modelo inicial donde su error cuadrático medio sea del orden de las decenas, así que no se puede establecer una regla general para empezar con un modelo inicial y así que el algoritmo de gradiente decreciente encuentre el mejor modelo.

**Tabla 2-4:** Valores para arrancar el algoritmo de gradiente decreciente en los sistemas de segundo orden.

Modelo	Descripción	Valores
$G_3(s) = \frac{1.17}{s(0.12s + 1)}$	Vector de parámetros inicial	$\theta = [0.09, -1.1, 0.16]$
	Aprendizaje	$\alpha = 0.01$
	Incremento	$\varepsilon = 10^{-4}$
	Tiempo de muestreo	$t_s = 0.1 [s]$
	Número de iteraciones	154
	Valor de la Función de costo inicial	$J_0 = 237.79$
	Valor de la Función de costo final	$J_f = 0.006968$
$G_4(s) = \frac{4s}{s^2 + 3s + 2}$	Vector de parámetros inicial	$\theta = [0.0004, -0.0004, -1.99969971, 0.99969974]$
	Aprendizaje	$\alpha = 10^{-8}$
	Incremento	$\varepsilon = 10^{-10}$
	Tiempo de muestreo	$t_s = 0.0001 [s]$
	Número de iteraciones	291
	Valor de la Función de costo inicial	$J_0 = 0.5614$
	Valor de la Función de costo final	$J_f = 2.77(10^{-6})$

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

### 4.3. Comprobación de la Hipótesis

Con base a las pruebas realizadas, el método de mínimos cuadrados no funcionó para todos los casos planteados, en cambio el método de gradiente decreciente si consiguió identificar los cuatro sistemas. Por tal motivo, el método de gradiente decreciente sería más conveniente aplicarlo para poder caracterizar los siguientes sistemas: filtro pasa bajo y alto de primer orden, servomotor y filtro pasa banda.

Cabe señalar que para el análisis de resultados se tomó en cuenta el *procedimiento* y el *resultado* del proceso de identificación. Entendiéndose al procedimiento como la facilidad de implementar el algoritmo de programación del método de mínimos cuadrados y gradiente decreciente. En cambio, el resultado es la similitud entre la gráfica de salida del modelo con la real para cada método de estimación de parámetros.

Para cuantificar el procedimiento y el resultado de cada uno de los cuatro sistemas planteados se utilizó la siguiente escala:

- Procedimiento:
  - 3 es la mayor facilidad de implementación del algoritmo.
  - 2 es la poca facilidad de implementación del algoritmo.
  - 1 es la mayor complejidad de implementación del algoritmo.
- Resultado:
  - 3 es la similitud total de la gráfica de salida del modelo con la real.
  - 2 es la similitud parcial de la gráfica de salida del modelo con la real
  - 1 es la ausencia de similitud de la gráfica de salida del modelo con la real

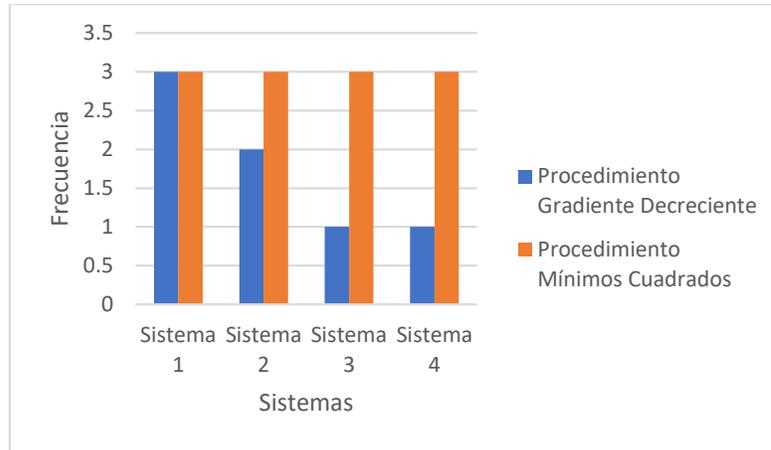
Los resultados se muestran en la Tabla 3-4.

**Tabla 3-4:** Calificación de los métodos para evaluar la identificación de los sistemas propuestos.

MÉTODO DE ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS	CUANTIFICACIÓN		
	Sistemas	Procedimiento	Resultado
Gradiente Decreciente	1	3	3
	2	2	3
	3	1	3
	4	1	3
Mínimos Cuadrados	1	3	3
	2	3	1
	3	3	3
	4	3	3

Realizado por: Morocho, Andrés, 2021

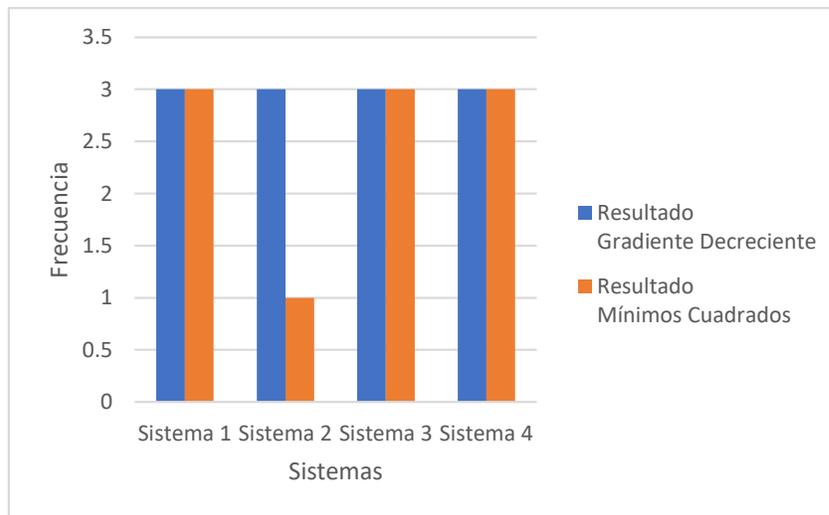
Para una mejor visualización de los resultados de la Tabla 3-4, los mismos se lo presenta en un diagrama de barras, ver Figura 25-4, tanto para el procedimiento como para el resultado de los dos métodos de estimación de parámetros.



**Figura 25-4:** Comparación de los sistemas modelados para el procedimiento.

**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

En la Figura 25-4, se observa que en los cuatro sistemas planteados se presentó una mayor facilidad al momento de realizar el algoritmo mediante mínimos cuadrados, en cambio para el método de gradiente decreciente la facilidad de implementar el algoritmo se dió únicamente en el primer sistema mientras que para los otros disminuyó.



**Figura 26-4:** Comparación de los sistemas modelados para el resultado obtenido.

**Realizado por:** Morocho, Andrés, 2021

En la Figura 26-4, se observa que en los sistemas 1, 3 y 4 los resultados presentaron una similitud total de la gráfica de salida del modelo con respecto a la real tanto para el método de mínimos cuadrados como del gradiente decreciente, mientras que para el caso 2 sólo el de mínimos cuadrados no lo logró.

## CONCLUSIONES

- a) La invariabilidad en el tiempo de los sistemas se verificó al observar que en cualquier instante cada uno de los sistemas propuestos tanto de primer y segundo orden se comportaron con la misma dinámica que los caracteriza.
- b) Una estructura de autoregresión con variable exógena es aplicable a sistemas causales, esto es que el orden del numerador debe ser menor con respecto al denominador, y también el sistema debe ser invariante en el tiempo en la forma que sus coeficientes de los polinomios de la función de transferencia sean constantes.
- c) Las funciones de transferencia de cada uno de los sistemas continuos planteados se expresaron en forma matricial mediante un modelo de regresión lineal y como función de costo el error cuadrático medio para caracterizar tres de los cuatro sistemas planteados. En este caso no fue posible para el filtro pasa alto de primer orden porque este sistema tiene el mismo orden para el numerador y el denominador.
- d) El algoritmo del método de gradiente decreciente presentó dificultades para encontrar un modelo inicial para cada sistema e incluso su dificultad aumentó al incrementar el orden del sistema. Además, no se pudo establecer una regla general para el modelo inicial porque en los sistemas de primer orden, el error cuadrático medio estaba oscilando en un valor de las decenas; en cambio para el tercer sistema de segundo orden el error era inferior a la unidad y para el último sistema el error oscilaba en un valor de las centenas.
- e) El método de gradiente decreciente modeló todos los sistemas planteados a pesar que presenta dificultades para inicializarlo mientras que el método de mínimos cuadrados no logró caracterizar el filtro pasa altos pero este método al ser programado no presenta dificultades si el orden del sistema aumenta.

## RECOMENDACIONES

- a) En el caso de conocer que los datos adquiridos pueden ser representados mediante una estructura de autoregresión con variables exógenas se recomienda utilizar directamente el método de mínimos cuadrados para la estimación de los parámetros del sistema debido a la inmediatez de su proceso de identificación.
- b) Al momento de realizar una modelación en tiempo discreto es necesario tener en cuenta la frecuencia máxima con la que se va a emplear en la entrada del sistema a modelarse para considerar el valor del tiempo de muestreo.
- c) Cuando un modelo fue identificado en tiempo discreto es muy importante tener en cuenta el tiempo de muestreo de los datos que fueron procesados para la identificación del sistema. Por tal razón, si se emplea entradas adquiridas con otro tiempo de muestreo para evaluar el modelo identificado no va a funcionar.
- d) Para obtener un modelo inicial en el método de gradiente decreciente es necesario verificar si se ha logrado de entrada un valor pequeño de la función de costo y a partir de ahí se puede modificar los valores de aprendizaje y de incremento. Por lo cual es necesario tener paciencia para ajustar cada parámetro.

## BIBLIOGRAFÍA

- Alvarado, C., & Villamar, C. (2010). *Aplicación del modelo anfis a la sintetización de notas musicales y señales de voz*. 7. <http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/16119>
- Amran, M. A. N., Bakar, A. A., Jalil, M. H. A., Wahyu, M. U., & Gani, A. F. H. A. (2020). Simulation and modeling of two-level DC/DC boost converter using ARX, ARMAX, and OE model structures. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, 18(3), 1172–1179. <https://doi.org/10.11591/ijeecs.v18.i3.pp1172-1179>
- Ding, F., Pan, J., Alsaedi, A., & Hayat, T. (2019). Gradient-based iterative parameter estimation algorithms for dynamical systems from observation data. *Mathematics*, 7(5). <https://doi.org/10.3390/math7050428>
- Eykhoff, P. (1978). System identification; Advances and case studies. In *IEEE Transactions on Automatic Control* (Vol. 23, Issue 4). <https://doi.org/10.1109/tac.1978.1101781>
- Hsia, T. C. (1977). *System Identification Least-Squares Methods* (pp. 1–168). Lexington Books.
- Hsu, H. P. (2015). *Señales y Sistemas* (Segunda Ed). McGrawHill.
- Internacional Centre for Mechanical Sciencie. (1988). Application of System Identification in Engineering. In H. Natke (Ed.), *Application of System Identification in Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2628-8>
- Isermann, R., & Munchhof, M. (2019). Identification of Dynamic Systems an Introduction with Applications. In *Journal of Chemical Information and Modelling* (Vol. 53, Issue 9). Springer Heidelberg Dordrecht London New York.
- Kamen, E. W., & S., H. B. (2008). *Fundamentos de Señales y Sistemas usando la Web y MATLAB* (Tercera Ed). Prentice Hall.
- Kendall, K. E., & Kendall, J. E. (1993). *Análisis y Diseño de Sistemas* (Tercera Ed).
- Kunusch, C. (2003). Identificación De Sistemas Dinámicos. In *Universidad Nacional de la Plata*. Universidad Nacional de la Plata.

- Lathi, B. P. (2005). Linear Systems and Signals. In *Linear Systems and Signals*.
- Leondes, C. T. (1987). Control and Dynamic System: Advances in Theory and Applications. In *System Identification and Adaptive Control* (Vol. 25, Issue P1). Academic Press.
- Levin, R., & Rubin, D. (2005). *Estadística para Administración y Economía* (séptima ed). Prentice Hall.
- Ljung, L. (1987). *System identification: Theory for the User* (Primera). Prentice Hall.
- Ljung, L. (1997). System Identification. *Prentice Hall International*. <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:316967/FULLTEXT01.pdf>[http://scholar.google.com/scholar?q=system+identification+1989+soderstrom%2C+t&btnG=&hl=en&as\\_sdt=0%2C5#1](http://scholar.google.com/scholar?q=system+identification+1989+soderstrom%2C+t&btnG=&hl=en&as_sdt=0%2C5#1)
- Nelles, O. (2001). Nonlinear System Identification. In *Nonlinear System Identification*. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04323-3>
- Oppenheim, A. V., & Willsky, A. S. (1997). *Señales y Sistemas* (P. Roig (ed.); Segunda Ed). Prentice Hall.
- Pintelon, R., & Schoukens, J. (2001). *System Identification - A Frequency Domain Approach*. IEEE Press.
- Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007). *Tratamiento digital de señales* (Cuarta Ed). Prentice Hall. <https://books.google.com.mx/books?id=8rhdNQAACAAJ&dq=tratamiento+digital+d+e+señales+4+ed+proakis&hl=en&sa=X&ved=0ahUKEwj5m9Wi5-DeAhURCawKHZluCg8Q6AEIKTAA>
- Rachad, S., Nsiri, B., & Bensassi, B. (2015). System Identification of Inventory System Using ARX and ARMAX Models. *International Journal of Control and Automation*, 8(12), 283–294. <https://doi.org/10.14257/ijca.2015.8.12.26>
- Salah-Eddine, M., Sadki, S., & Bensassi, B. (2020). Microcontroller based data acquisition and system identification of a DC servo motor using ARX, ARMAX, OE, and BJ models. *Advances in Science, Technology and Engineering Systems*, 5(6), 507–513.

<https://doi.org/10.25046/aj050660>

- Sanandaji, B. M., Vincent, T. L., Wakin, M. B., Tóth, R., & Poolla, K. (2011). Compressive System Identification of LTI and LTV ARX Models. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, 50, 791–798. <https://doi.org/978-1-61284-801-3/11>
- Walpole, R., Myers, R., & Myers, S. (2007). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (Octava Edi). PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
- Wang, L., & Garnier, H. (2014). *System Identification, Environmental Modelling, and Control System Design* (Liuping Wang & G. Hugues (eds.)). Springer London Dordrecht Heidelberg New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-974-1>
- Weyer, E. (2000). Finite sample properties of system identification of ARX models under mixing conditions. *Automatica*, 36(9), 1291–1299. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(00\)00039-X](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(00)00039-X)
- Yankov, K. (2013). Data Structure of Models in System Identification. *Proceedings of the International Conference on Information Technologies, September*, 312–328.

# ANEXOS



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**DIRECCIÓN DE BIBLIOTECAS Y RECURSOS DEL APRENDIZAJE  
UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y DOCUMENTAL**

**REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA**

**Fecha de entrega:** 29 / 11 / 2021

<b>INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)</b>
<b>Nombres – Apellidos:</b> <i>Andrés Fernando Morocho Caiza</i>
<b>INFORMACIÓN INSTITUCIONAL</b>
<i>Instituto de Posgrado y Educación Continua</i>
<b>Título a optar:</b> <i>Magíster en Matemática Mención Modelación y Docencia</i>
<b>f. Analista de Biblioteca responsable:</b> <i>Lic. Luis Caminos Vargas Mgs.</i>

**LUIS  
ALBERTO  
CAMINOS  
VARGAS**

Firmado digitalmente  
por LUIS ALBERTO  
CAMINOS VARGAS  
Nombre de  
reconocimiento (DN):  
c=EC, I=RIOBAMBA,  
serialNumber=0602766  
974, cn=LUIS ALBERTO  
CAMINOS VARGAS  
Fecha: 2021.11.29  
08:49:34 -05'00'



0117-DBRAI-UPT-IPEC-2021