



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA BIOFÍSICA

LOCALIZACIÓN DE GRAVEDAD SOBRE UNA PARED DOBLE
AUTOGRAVITANTE

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar el grado académico de:

BIOFÍSICO

AUTOR: JAVIER ALEJANDRO BARRAZUETA SALAZAR

DIRECTOR: Mat. LUIS MARCELO CORTÉZ BONILLA, MSc.

Riobamba – Ecuador

2022

© 2022, **Javier Alejandro Barraqueta Salazar**

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho del Autor.

Yo, JAVIER ALEJANDRO BARRAZUETA SALAZAR, declaro que el presente trabajo de integración curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este trabajo de integración curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 27 de enero de 2022



Javier Alejandro Barrazueta Salazar

110474026-9

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA BIOFÍSICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el trabajo de integración curricular; Tipo: Proyecto de Investigación **LOCALIZACIÓN DE GRAVEDAD SOBRE UNA PARED DOBLE AUTOGRAVITANTE**, realizado por el señor: **JAVIER ALEJANDRO BARRAZUETA SALAZAR**, ha sido minuciosamente revisado por los miembros del trabajo de integración curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos y legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Biof. María Fernanda Heredia Moyano, MSc. PRESIDENTE DEL TRIBUNAL	_____	2022-02-21
Mat. Luis Marcelo Cortéz Bonilla, MSc. DIRECTOR DE TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR	_____	2022-02-21
Dr. Richard Williams Pachacama Choca, MSc. MIEMBRO DEL TRIBUNAL	_____	2022-02-21

DEDICATORIA

A todas las personas que previamente han incursionado en el campo de la física dedicado a la investigación de este tipo de soluciones.

A mi profesor Rommel Guerrero, quien es parte de esa contribución, y mi completo apoyo durante el desarrollo de esta tesis.

A todos los interesados en aprender sobre este tema, o continuar el hilo de investigación, del cual esta tesis forma una pequeña parte.

A mi madre, por su apoyo en mi vida personal y profesional, y en la edición de este documento.

Javier

AGRADECIMIENTO

A la ESPOCH, por su esfuerzo para permanecer a la vanguardia científica y tecnológica a través de la apertura de carreras como la de Biofísica.

A la Facultad de Ciencias, por gestionar la presencia de muy respetables docentes y profesionales de las ciencias, nacionales y extranjeros, con quienes he tenido la oportunidad de compartir amistad y conocimiento del que me siento honrado.

Con especial deferencia al profesor Rommel Guerrero, verdadero y único director de este trabajo de tesis, quien me ayudó desde las bases a concretar esta investigación mediante tutorías en línea desde fuera del país, correcciones e invaluable paciencia, por creer en mí; y por proveerme un acercamiento de primera mano a la investigación científica que él lleva a cabo.

Javier

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE GRÁFICOS.....	ix
ÍNDICE DE ANEXOS.....	x
RESUMEN.....	xi
SUMMARY.....	xii
INTRODUCCIÓN.....	1

CAPÍTULO I

1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL.....	2
1.1. Antecedentes.....	2
1.2. Planteamiento del problema.....	3
1.2.1. <i>Enunciado del problema</i>	3
1.2.2. <i>Formulación del problema</i>	3
1.3. Justificación.....	4
1.4. Objetivos.....	4
1.4.1. <i>Objetivo general</i>	4
1.4.2. <i>Objetivos específicos</i>	4
1.5. Marco teórico.....	5
1.5.1. <i>Solución pared de dominio</i>	5

CAPÍTULO II

2. MARCO METODOLÓGICO.....	9
2.1. Sistema Einstein-campo escalar y paredes de dominio.....	9
2.1.1. <i>Paredes de dominio</i>	9
2.1.2. <i>Sistema acoplado Einstein-campo escalar</i>	9
2.1.3. <i>Simplificación del sistema Einstein-campo escalar</i>	10
2.1.4. <i>Curvatura del Bulk</i>	11
2.1.5. <i>Teoría de gravitación de Einstein sobre la pared de dominio</i>	12
2.2. Perturbaciones gravitacionales.....	14
2.2.1. <i>Potencial mecánico-cuántico</i>	14

CAPÍTULO III

3.	MARCO DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	17
3.1.	Solución en coordenadas conformes	18
3.1.1.	<i>Forma analítica de la solución en coordenadas conformes</i>	18
3.1.1.1.	Factor métrico	18
3.1.1.2.	Campo escalar	18
3.1.1.3.	Potencial de autointeracción	18
3.1.1.4.	Densidad de energía	18
3.1.2.	<i>Perturbaciones gravitacionales sobre la pared</i>	19
3.1.2.1.	Potencial mecánico-cuántico.....	19
3.1.3.	<i>Forma gráfica de la solución en coordenadas conformes</i>	20
3.1.3.1.	Factor métrico	20
3.1.3.2.	Campo escalar	21
3.1.3.3.	Potencial de autointeracción	22
3.1.3.4.	Densidad de energía	23
3.1.4.	<i>Perfil de las perturbaciones gravitacionales sobre la pared</i>	24
3.1.4.1.	Potencial mecánico-cuántico.....	24
3.2.	Solución en coordenadas de longitud propia	25
3.2.1.	<i>Forma analítica de la solución en coordenadas de longitud propia</i>	25
3.2.1.1.	Factor métrico	25
3.2.1.2.	Potencial de autointeracción	25
3.2.1.3.	Campo escalar	26
3.2.1.4.	Densidad de energía	26
3.2.2.	<i>Perturbaciones gravitacionales sobre la pared</i>	26
3.2.2.1.	Potencial mecánico-cuántico.....	26
3.2.3.	<i>Forma gráfica de la solución en coordenadas de longitud propia</i>	28
3.2.3.1.	Factor métrico	28
3.2.3.2.	Campo escalar	29
3.2.3.3.	Potencial de autointeracción	30
3.2.3.4.	Densidad de energía	31
3.2.4.	<i>Perfil de las perturbaciones gravitacionales sobre la pared</i>	32
3.2.4.1.	Potencial mecánico-cuántico.....	32

CONCLUSIONES	34
RECOMENDACIONES	35
BIBLIOGRAFÍA	
ANEXOS	

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1-1:	Una pared de dominio en el eje z	6
Gráfico 2-1:	Potencial de autointeracción.....	7
Gráfico 1-3:	Factor métrico en coordenadas conformes, para $s = 1,3,5$	20
Gráfico 2-3:	Campo escalar en coordenadas conformes, para $s = 1,3,5$	21
Gráfico 3-3:	Potencial de autointeracción para $s = 1,3,5$	22
Gráfico 4-3:	Densidad de energía en coordenadas conformes, para $s = 1,3,5$	23
Gráfico 5-3:	Potencial mecánico-cuántico en coordenadas conformes, para $s = 1,3,5$	24
Gráfico 6-3:	Factor métrico en coordenadas de longitud propia, para $p = 1,3,5,7$	28
Gráfico 7-3:	Campo escalar en coordenadas de longitud propia, para $p = 1,3,5,7$	29
Gráfico 8-3:	Potencial de autointeracción para $p = 1,3,5,7$	30
Gráfico 9-3:	Densidad de energía en coordenadas de longitud propia, para $p = 1,3,5,7$	31
Gráfico 10-3:	Potencial mecánico-cuántico en coordenadas de longitud propia, para $p = 1,3,5,7$	32

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO A: NUEVA SOLUCIÓN EN COORDENADAS DE LONGITUD PROPIA

ANEXO B: CÓDIGO EN WOLFRAM MATHEMATICA 12.3 STUDENT EDITION, PARA
LA GRAFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES Y SUS PERFILES
GRAVITACIONALES

RESUMEN

El objetivo de esta investigación fue localizar gravedad en una pared de dominio doble; sus objetivos fueron ampliar la lista sobre los defectos topológicos del tipo pared de dominio doble, y el de aportar al estudio de los ya existentes. Se recuperó una pared de dominio previamente reportada en la literatura y se encontró una nueva pared de dominio doble estática, en coordenadas de longitud propia. Para graficar las paredes, y para una mejor visualización de las soluciones, se usó Wolfram Mathematica 12.3 Student Edition. Los resultados consistieron en dos soluciones cuyos campos escalares interpolan asintóticamente entre los mínimos de sus correspondientes potenciales de autointeracción. La nueva solución se expresó como una familia de paredes de dominio, en coordenadas de longitud propia. Las observaciones realizadas a cada solución se enfocaron en las gráficas resultantes del factor métrico, potencial de autointeracción, campo escalar, densidad de energía y potencial mecánico-cuántico. Como conclusiones se obtuvo que ambas soluciones son físicamente diferentes, y poseen una estructura interna donde se puede localizar gravedad newtoniana estándar. Con respecto a la nueva solución en coordenadas de longitud propia, se recomienda encontrar una expresión general para el factor métrico, calcular el valor de la constante cosmológica, y hacer un análisis detallado de sus características gravitacionales.

Palabras clave: <FÍSICA>, <FLUCTUACIONES GRAVITACIONALES>, <PAREDES DE DOMINIO>, <TEORÍA DE CAMPOS>, <EINSTEIN-KLEIN-GORDON>.

**LEONARDO
FABIO
MEDINA
NUSTE**

Firmado digitalmente por
LEONARDO FABIO MEDINA NUSTE
Nombre de reconocimiento (DN):
c=EC, o=BANCO CENTRAL DEL
ECUADOR, ou=ENTIDAD DE
CERTIFICACION DE INFORMACION-
ECBCE, l=QUITO,
serialNumber=0000621480,
cn=LEONARDO FABIO MEDINA
NUSTE
Fecha: 2022.04.18 12:26:07 -05'00'



0706-DBRA-UTP-2022

SUMMARY

The aim of this research was to locate gravity in a double domain wall; its objectives were to extend the list of topological defects of double domain wall type, and to contribute to the study of existing ones. A domain wall previously reported in the literature was recovered and a new static double domain wall was found, in proper length coordinates. Wolfram Mathematica 12.3 Student Edition was used to plot the walls, and for a better visualisation of the solutions. The results consisted of two solutions whose scalar fields interpolate asymptotically between the minima of their corresponding self- interaction potentials. The new solution was expressed as a family of domain walls, in coordinates of proper length. Observations made on each solution focused on the resulting plots of the metric factor, self-interaction potential, scalar field, energy density and quantum-mechanical potential. As conclusions it was obtained that both solutions are physically different and have an internal structure where standard Newtonian gravity can be located. Regarding to the new solution in proper length coordinates, it is recommended to find a general expression for the metric factor, to calculate the value of the cosmological constant, and to make a detailed analysis of its gravitational characteristics.

Keywords: <PHYSICS>, <GRAVITATIONAL FLUCTUATIONS>, <DOMAIN WALLS>, <FIELD THEORY>, <EINSTEIN-KLEIN-GORDON>.

CARMITA
EULALIA ROJAS
CASTRO



Digitally signed by
CARMITA EULALIA
ROJAS CASTRO
Date: 2022.04.25
22:06:15 -05'00'

INTRODUCCIÓN

Los defectos topológicos del tipo pared de dominio doble en teoría de campos son contados, y por lo tanto es mucho lo que aún se puede incursionar en este tema. Esto dio pie al presente trabajo, cuyos objetivos fueron recuperar una de estas soluciones ya conocidas, en coordenadas conformes, y encontrar una nueva, en coordenadas de longitud propia.

Para recuperar la primera solución, se tomó la forma analítica de la misma, ya planteada en otra investigación, y, con el objetivo de exponer la segunda, se expresaron el factor métrico, campo escalar, densidad de energía, y potencial de autointeracción en coordenadas de longitud propia, para luego llevar a cabo el análisis gravitacional mediante el potencial mecánico-cuántico obtenido a partir de la ecuación de Schrödinger que siguen las fluctuaciones. Las gráficas se generaron en el software Wolfram Mathematica 12.3 Student Edition. Cabe resaltar que la segunda solución es físicamente diferente de la primera.

Para exponer el presente trabajo, se ha dividido el contenido en tres capítulos. El primero se denomina “Marco teórico referencial”, en donde se exponen las bases contextuales que soportan a los objetivos también incluidos en el capítulo, y además se hace un repaso de lo que es el potencial de autointeracción, y el papel que cumple el campo escalar en una pared de dominio. El segundo se denomina “Marco metodológico”, que contiene la obtención de la pared de dominio, en coordenadas conformes, a partir del sistema acoplado Einstein – campo escalar, precisando cómo se consiguieron el factor métrico, campo escalar, densidad de energía, y potencial de autointeracción, así como el comportamiento de las fluctuaciones gravitacionales sobre la pared. El tercero y último es el “Marco de resultados y discusión de los resultados”, donde se muestra la nueva solución, y se realizan observaciones sobre las gráficas de ambas soluciones. Posteriormente se levantan las conclusiones y recomendaciones acorde a los objetivos planteados. Finalmente, en los anexos se explica con más detalle la obtención de la nueva solución.

CAPÍTULO I

1. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

En el primer capítulo de este trabajo se da una introducción teórica y problemática del tema de investigación, incluyendo antecedentes, planteamiento del problema, justificación y objetivos, culminando con las bases teóricas de lo que es una pared de dominio y del potencial y campo escalar asociados a esta, que son descritas en el capítulo 3 de las notas de Goran Senjanović.

1.1. Antecedentes

Randall y Sundrum (1999, p.5) son los primeros en manifestar que, sobre una pared de dominio, de grosor infinitamente fino, es posible localizar gravedad en correspondencia con el potencial newtoniano, y abre la posibilidad de hablar sobre dimensiones adicionales extendidas.

El artículo de Martin Gremm (2000, p.4) es el primero que hace referencia a una pared de dominio estática con grosor finito, como solución al sistema acoplado Einstein – campo escalar, llevando a cabo perturbaciones sobre la métrica demostrando la localización de gravedad en la pared. Además, establece que la constante cosmológica cinco dimensional debe ser negativa para que el modo cero de las fluctuaciones gravitacionales sea normalizable.

Bazeia (2003, pp.1,4,6) es el primero en reportar una solución del tipo pared de dominio doble, llevando a cabo la localización de gravedad y observando que la densidad de energía presenta un par de picos alrededor del origen, y el potencial mecánico – cuántico un par de pozos, también alrededor del origen. Aquí, el modo cero confinado entre las subparedes presenta la misma densidad de probabilidad, lo cual significa que es igualmente probable determinar gravedad newtoniana en cualquier región cuatro dimensional entre las subparedes.

Melfo, Pantoja y Skirzewski (2002, p.6) son los segundos en reportar una pared de dominio doble, en coordenadas de calibre, como una generalización de una pared delgada escalada previamente obtenida por R. Guerrero, en coordenadas conformes; y también realizan el análisis de sus características gravitacionales.

Castillo-Felisola, Melfo, Pantoja y Ramírez (2004, pp.5,7) hacen el análisis de localización de gravedad y el cálculo del potencial gravitacional de la pared de dominio reportada por Melfo, Pantoja y Skirzewski.

El artículo de Guerrero, Rodríguez y Torrealba (2005, p.2) plantea un método para hallar nuevas soluciones al sistema acoplado Einstein – campo escalar, y también reporta una pared de dominio irregular, debido a que exhibe una singularidad (de coordenada) en la métrica. Esta singularidad podría removerse con una transformación de coordenadas adecuada.

Guerrero, Rodríguez, Torrealba y Ortiz (2006, p.6) reportan una pared doble asimétrica obtenida a partir del método indicado por Guerrero, Rodríguez y Torrealba. La ruptura de la simetría implica que es más probable conseguir al modo cero en una de las subparedes y, por lo tanto, la intensidad de la interacción gravitacional es menor en la subpared donde la probabilidad de hallar el modo cero es menor. Esto favorece una realización del problema de jerarquía de masas. En la tesis de Susana Zoghbi (2006, pp.5,6,8,21) se estudia el espectro de fluctuaciones gravitacionales en diferentes paredes de dominio, y se demuestra que las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica describen la dinámica de las paredes. También presenta las características de dos soluciones: una estática y otra dinámica.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Enunciado del problema

En las teorías con dimensiones adicionales extendidas los defectos topológicos del tipo pared de dominio son de interés ya que generan escenarios donde el modo cero de las fluctuaciones métricas resulta localizado en el sector 4D de la configuración en correspondencia con la interacción gravitacional estándar.

Tales defectos topológicos se pueden obtener como soluciones al sistema acoplado Einstein-Klein-Gordon en D dimensiones, donde el potencial de autointeracción exhibe por lo menos dos mínimos y el campo escalar del modelo interpola asintóticamente entre ellos. Es bien conocido que en el sector 4D de estos escenarios es posible localizar el modo cero de las excitaciones gravitacionales en correspondencia con potencial gravitacional estándar.

En este trabajo se propone determinar soluciones del tipo pared de dominio al acoplamiento Einstein – campo escalar. A partir de las ecuaciones de movimiento del sistema, se planteará un problema de contorno cuya solución se determinará integrando analíticamente las ecuaciones. También se estudiará las fluctuaciones gravitacionales y la localización del modo cero del espectro.

1.2.2. Formulación del problema

¿Cuál sería una nueva solución del tipo pared de dominio doble estática, al sistema acoplado Einstein – campo escalar, que permita estudiar las fluctuaciones gravitacionales?

1.3. Justificación

Las fluctuaciones gravitacionales de un escenario escalar pared de dominio se caracterizan por un modo cero localizado en el sector 4 dimensional de la estructura y una torre de modos masivos que se propagan libremente por todo el espacio-tiempo. Mientras el estado base está en correspondencia con el potencial de Newton, los modos masivos generan correcciones a la interacción gravitacional estándar. En este sentido, las paredes de dominio son escenarios donde se puede reproducir la interacción gravitacional estándar.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Localizar gravedad sobre una pared de dominio doble autogravitante.

1.4.2. Objetivos específicos

- Encontrar una nueva solución estática de tipo pared de dominio doble, al sistema acoplado Einstein – campo escalar.
- Graficar el campo escalar, el potencial de autointeracción, y la densidad de energía de la solución encontrada.
- Realizar perturbaciones sobre la métrica de la pared de dominio doble.

1.5. Marco teórico

1.5.1. Solución pared de dominio

Goran Senjanović (2002, p.17) asume un lagrangiano, sin gravitación, de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2, \quad (1.1)$$

con simetría discreta $D: \phi \rightarrow -\phi$ (lo cual implica que es invariante bajo esta transformación simétrica).

Con esto, se pretende hallar una solución para el campo escalar ϕ de forma tal que este interpole entre los mínimos del potencial V .

Estos mínimos del potencial están en

$$\langle \phi \rangle^2 = v^2 \text{ o } \langle \phi \rangle = \pm v. \quad (1.2)$$

De acuerdo con Goran Senjanović (2002, p.20), la solución a encontrar es estática en el plano $x - y$. Entonces, supone que $\phi(\vec{x}, t)$ solo depende de z , y basándose en la ecuación de Euler – Lagrange

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (1.3)$$

obtiene

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (1.4)$$

Multiplicando (1.4) por $\frac{d\phi}{dz}$ da como resultado

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 \right] = \frac{dV}{dz} \quad (1.5)$$

o

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 - V = C, \quad (1.6)$$

donde C es una constante.

Por otra parte, Goran indica que la energía por unidad de área para la pared de dominio es

$$\frac{E}{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (1.7)$$

La intención es dar con una solución que tenga una energía finita bien definida. Para ello, se pide que

$$V(\phi) \rightarrow 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \rightarrow 0$$

$$z \rightarrow \pm\infty \quad \quad \quad z \rightarrow \pm\infty.$$

Tal como se puede observar en el gráfico 1 – 1:

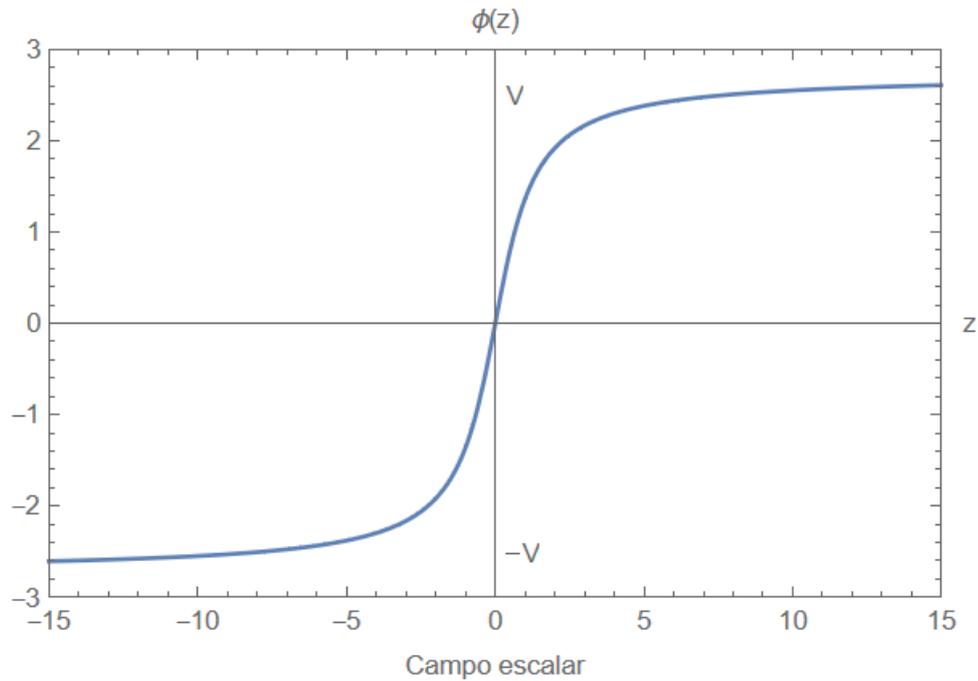


Gráfico 1 – 1. Una pared de dominio en el eje z

Realizado por: Javier, A. Barraqueta, S. 2021.

Esto implica $C = 0$ en la ecuación (1.6), obteniéndose

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \pm\sqrt{2V}. \quad (1.8)$$

Sustituyendo (1.8) en (1.7) e integrando para escribir la energía por unidad de área:

$$\frac{E}{S} = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \frac{dz}{d\phi} 2V = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2V}. \quad (1.9)$$

Para un V dado, (1.8) y (1.9) proveen la forma y la energía de la solución.

Lo anterior se puede relacionar mecánicamente con una partícula moviéndose en un potencial $U = -V$, de la siguiente manera.

$$\phi \leftrightarrow x;$$

$$\frac{d\phi}{dz} \leftrightarrow \frac{dx}{dt}. \quad (1.10)$$

Ya que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx}, \quad (1.11)$$

Y comparando (1.11) con (1.4), se tiene que $U = -V$, entonces el potencial puede escribirse como $V = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$ (nótese que es el término potencial en (1.1)), así como lo muestra el gráfico 2 – 1.

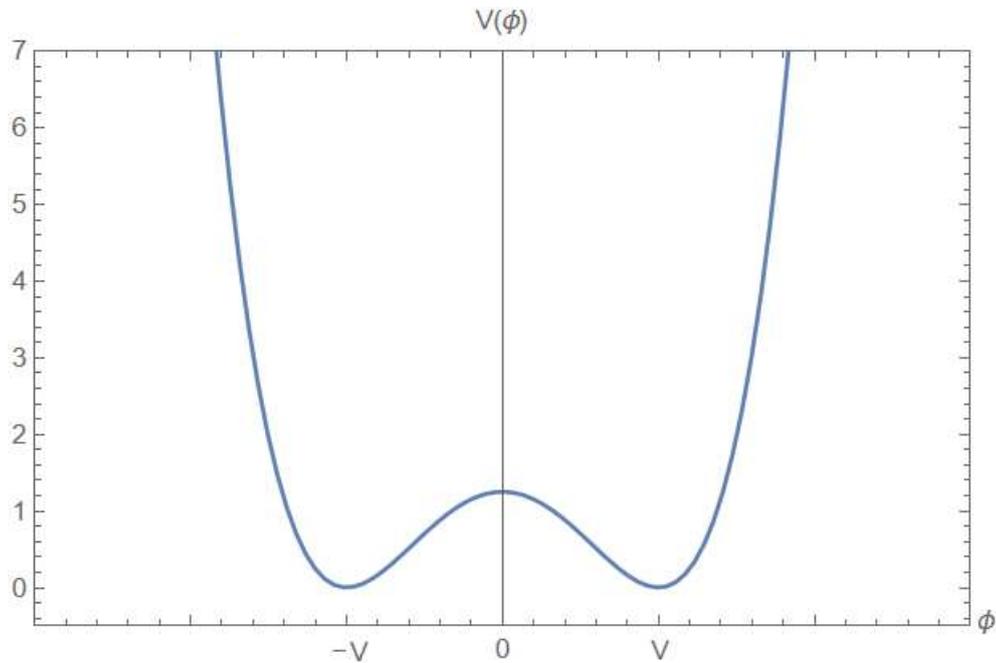


Gráfico 2 – 1. Potencial de autointeracción

Realizado por: Javier, A. Barrabzuela, S. 2021.

“La solución que se busca con $\phi(-\infty) = -v$; $\phi(+\infty) = +v$; $\frac{d\phi}{dz}(\pm\infty) = 0$ corresponde al movimiento de una partícula que comienza con velocidad cero en $x(-\infty) = -v$ y llega con igual velocidad nula a $x(+\infty) = +v$.” (Senjanović, 2002, p.22).

Introduciendo la forma de V en (1.8) se obtiene

$$\frac{d\phi}{dz} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(\phi^2 - v^2). \quad (1.12)$$

Y, si se elige $\phi(\pm\infty) = \pm v$, se obtiene la solución de una pared de dominio.

$$\phi_{cl} = v \cdot \tanh\left(\frac{z}{\delta}\right);$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} v^{-1}, \tag{1.13}$$

donde δ es el espesor de la pared, y ϕ_{cl} es el campo escalar clásico.

CAPÍTULO II

2. MARCO METODOLÓGICO

Este segundo capítulo explica la relación de las paredes de dominio con el sistema acoplado Einstein-campo escalar, y a la vez indica la metodología que se usará para encontrar las funciones características de estas soluciones tanto en coordenadas conformes, cuyo origen se detalla en la tesis de Susana Zoghbi, como en coordenadas de longitud propia, que son obtenidas por el autor de este trabajo.

2.1. Sistema Einstein-campo escalar y paredes de dominio

2.1.1. Paredes de dominio

La solución al acoplamiento Einstein – campo escalar viene dada por la métrica, el campo escalar y el potencial de autointeracción.

Como se pretende encontrar una solución del tipo pared de dominio estática para el sistema acoplado Einstein – campo escalar, en cinco dimensiones, donde ξ es la coordenada adicional, se piden las siguientes condiciones al sistema:

- El campo escalar será función únicamente de la coordenada adicional $\xi: \phi = \phi(\xi)$
- El campo escalar interpola entre los mínimos consecutivos φ_{\pm} del potencial de autointeracción, cumpliéndose que $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = \varphi_{\pm} \rightarrow \lim_{\phi \rightarrow \varphi_{\pm}} \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \varphi \in \mathfrak{R}$

2.1.2. Sistema acoplado Einstein-campo escalar

Es un conjunto no lineal de ecuaciones diferenciales acopladas en derivadas parciales, constituido por

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab}, \quad (2.1)$$

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left[\frac{1}{2} \nabla_d \phi \nabla^d \phi + V(\phi) \right] \quad (2.2)$$

$$\nabla_d \nabla^d \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (2.3)$$

donde:

G_{ab} es el tensor de Einstein

T_{ab} es el tensor energía-impulso y representa la fuente del campo gravitacional dado por el campo escalar ϕ con potencial de autointeracción $V(\phi)$

g_{ab} es el tensor métrico del sistema y representa la geometría del espacio-tiempo

R_{ab} es el tensor de Ricci

R es el escalar de curvatura

Es importante aclarar la notación usada en este sistema en lo que se refiere a los índices. Las letras a, b y d se refieren a coordenadas cinco-dimensionales, y toman un valor entre 0 y 4.

2.1.3. Simplificación del sistema Einstein-campo escalar

Asumiendo una simetría plano paralela, se propone una forma para el tensor métrico:

$$g_{ab} = f^2(\xi)(-dt_a dt_b + e^{2\beta t} dx_a^i dx_b^i) + f^2(\xi) d\xi_a d\xi_b, \quad (2.4)$$

donde $a, b = 0, \dots, 4$; x^i son las coordenadas espaciales con $i = 1, 2, 3$; y ξ es la coordenada espacial adicional. Además, si $\beta > 0$ se tiene una pared dinámica, mientras que si $\beta = 0$ se tiene una pared estática.

Para esta métrica se construyen las componentes del tensor de Einstein

$$G_t^t = \frac{3}{f^2} \left[\frac{f''}{f} - \beta^2 \right], \quad G_\xi^\xi = \frac{6}{f^2} \left[\frac{f'^2}{f^2} - \beta^2 \right], \quad (2.5)$$

$$G_1^1 = \frac{3}{f^2} \left[\frac{f''}{f} - \beta^2 \right], \quad G_2^2 = G_3^3 = G_4^4;$$

y las componentes del tensor energía-impulso

$$T_t^t = -\rho = -\frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \phi'^2 - V(\phi), \quad T_\xi^\xi = -P = \frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \phi'^2 - V(\phi), \quad (2.6)$$

$$T_1^1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{f^2} \phi'^2 - V(\phi), \quad T_2^2 = T_3^3 = T_4^4,$$

donde T_t^t y T_ξ^ξ se interpretan como la densidad de energía ρ , y la densidad de presión P con signo opuesto, respectivamente.

En (2.5) y (2.6) se observa que el sistema puede simplificarse.

Igualando las sumas $G_t^t + G_\xi^\xi = T_t^t + T_\xi^\xi$, se llega a:

$$\phi'^2 = 3 \left[2 \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} - \beta^2 \right]. \quad (2.7)$$

E igualando las diferencias $G_t^t - G_\xi^\xi = T_t^t - T_\xi^\xi$, se da lugar a

$$V(\phi) = -\frac{3}{2f^2} \left[2 \frac{f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} - 3\beta^2 \right]. \quad (2.8)$$

En las ecuaciones (2.7) y (2.8), las primas significan derivadas con respecto a ξ .

Así, el sistema acoplado conformado por (2.1), (2.2) y (2.3) se ha reducido a un par de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas: (2.7) y (2.8).

La métrica de la solución a encontrarse en este trabajo no depende del tiempo, cumpliéndose que $\beta = 0$.

2.1.4. Curvatura del Bulk

El *bulk* es el espacio 5-dimensional en el que están embebidas las paredes de dominio de 4 dimensiones. Estas paredes dividen al *bulk* en dos subespacios. De acuerdo a la curvatura que estos posean, se los puede clasificar como planos o curvos. A los espacio-tiempos planos se los conoce como espacios de Minkowski, a los de curvatura positiva como espacios “de Sitter”, y a los de curvatura negativa como espacios “Anti de Sitter”.

De acuerdo con Susana Zoghbi:

La curvatura asintótica del bulk se puede determinar evaluando el tensor energía-impulso cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, donde los efectos gravitacionales de la pared son despreciables y sólo queda la contribución de la energía de vacío, asociada al espacio-tiempo donde está embebida la pared. Al tomar el límite cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, los dos primeros términos en (2.2) se anulan porque el campo escalar tiende a una constante, $\phi \rightarrow \phi_\pm$. De manera que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} T_{ab} = -g_{ab} \lim_{\phi \rightarrow \phi_\pm} V(\phi). \quad (2.9)$$

Y (2.1) se reduce a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío con constante cosmológica Λ . (Zoghbi, 2006, p.3)

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0, \quad \Lambda = \lim_{\phi \rightarrow \phi_\pm} V(\phi), \quad (2.10)$$

donde la constante cosmológica indica la curvatura del *bulk*.

2.1.5. Teoría de gravitación de Einstein sobre la pared de dominio

Se puede probar que la dinámica de una pared de dominio es consistente con las ecuaciones de gravitación de Einstein con constante cosmológica.

Para este propósito, Zoghbi (2006, pp.3-5) considera el espacio-tiempo 4 dimensional sobre la pared de dominio

$$\hat{g}_{mn} = -dt_m dt_n + e^{2\beta t} (dx_m^i dx_n^i), \quad (2.11)$$

donde $m, n = 0, \dots, 3$ e $i = 1, \dots, 3$

Las componentes no nulas del Tensor de Einstein asociado a (2.11) son

$$\hat{G}_{tt} = 3\beta^2, \quad \hat{G}_{11} = -3\beta^2 e^{2\beta t}, \quad \hat{G}_{22} = \hat{G}_{33} = \hat{G}_{11}. \quad (2.12)$$

Por lo que se puede escribir

$$\hat{G}_{mn} = -3\beta^2 \hat{g}_{mn}, \quad (2.13)$$

donde el $\hat{}$ denota las componentes del espaciotiempo 4 dimensional.

Como se vio anteriormente, un espacio 5 dimensional presenta la métrica

$$g_{ab} = f^2(\xi) (-dt_a dt_b + e^{2\beta t} dx_a^i dx_b^i) + f^2(\xi) d\xi_a d\xi_b, \quad (2.4)$$

que se puede escribir en términos de la métrica 4 dimensional (asumiendo que ξ es constante):

$$g_{mn} = f^2(\xi) \hat{g}_{mn}. \quad (2.14)$$

Y las componentes no nulas del tensor de Einstein asociado a (2.4) son

$$\begin{aligned} G_{tt} &= 3\beta^2 - 3\frac{f''}{f}, & G_{\xi\xi} &= -6\beta^2 f + 6\frac{f'^2}{f^2}, \\ G_{11} &= -3\beta^2 e^{2\beta t} + 3e^{2\beta t} \frac{f''}{f}, & G_{11} &= G_{22} = G_{33}; \end{aligned} \quad (2.15)$$

de tal manera que se puede escribir lo siguiente:

$$G_{mn} = -3\beta^2 \hat{g}_{mn} + 3 \frac{f''}{f} \hat{g}_{mn}$$

$$G_{mn} = \hat{G}_{mn} + 3 \frac{f''}{f} \hat{g}_{mn}. \quad (2.16)$$

El tensor energía-impulso en (2.2) se reduce a

$$T_{mn} = -f^2 \hat{g}_{mn} \left[\frac{1}{2} \frac{\phi'^2}{f^2} + V(\phi) \right]. \quad (2.17)$$

Ahora, con ayuda de la ecuación (2.1), se puede construir $G_{mn} = T_{mn}$:

$$G_{mn} + 3 \frac{f''}{f} \hat{g}_{mn} + f^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\phi'^2}{f^2} + V(\phi) \right] \hat{g}_{mn} = 0. \quad (2.18)$$

Notando que

$$\frac{1}{2} \frac{\phi'^2}{f^2} + V(\phi) = \frac{3}{f^2} \left(-\frac{f''}{f} + \beta^2 \right), \quad (2.19)$$

las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$\hat{G}_{mn} + \Lambda_0 \hat{g}_{mn} = 0 \rightarrow \Lambda_0 = 3\beta^2. \quad (2.20)$$

Esta expresión indica que el comportamiento espaciotemporal en las paredes de dominio es congruente con las ecuaciones de Einstein en el vacío, con constante cosmológica Λ_0 .

2.2. Perturbaciones gravitacionales

2.2.1. Potencial mecánico-cuántico

Suponiendo que existe una familia uniparamétrica de tensores métricos $\tilde{g}_{ab}(\lambda)$ y otra familia uniparamétrica de campos escalares $\tilde{\phi}(\lambda)$, tal que sean soluciones exactas al sistema acoplado (2.1), (2.2) y (2.3), las perturbaciones se realizan en la métrica g_{ab} y el campo escalar ϕ , que también son soluciones a dicho sistema.

Esta perturbación será mínima, y vendrá dada directamente por h_{ab} , para la métrica, y φ , para el campo escalar, de la siguiente manera:

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \lambda h_{ab}, \quad \tilde{\phi} = \phi + \lambda \varphi, \quad \lambda \ll 1. \quad (2.21)$$

Posteriormente se reescriben las ecuaciones del sistema acoplado en la forma de Ricci, para \tilde{g}_{ab} .

$$\tilde{R}_{ac} = \tilde{T}_{ac} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{ac} \tilde{T}, \quad \tilde{T}_{ac} = \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_c \tilde{\phi} - \tilde{g}_{ac} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{bd} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_d \tilde{\phi} + V(\tilde{\phi}) \right]. \quad (2.22)$$

Ahora se requiere encontrar la dinámica de la perturbación h_{ac} a primer orden. Para ello se diferencia (2.22) con respecto a λ y se hace $\lambda = 0$.

$$\frac{d}{d\lambda} \tilde{R}_{ac} \Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} \tilde{T}_{ac} \Big|_{\lambda=0} - \frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} (\tilde{g}_{ac} \tilde{T}) \Big|_{\lambda=0}. \quad (2.23)$$

Luego, al desarrollar la expresión surge el término $g^{ab} \nabla_a \nabla_b$, que se lo denotará como el D'Alambertiano \mathcal{D} .

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \mathcal{D} h_{ac} - \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_c (g^{bd} h_{bd}) + \nabla_{(a} \nabla^d h_{c)d} + R^d{}_{(ac)}{}^f h_{fd} + R^d{}_{(ad)}{}^f h_{c)f} = \\ & 2 \nabla_{(a} \varphi \nabla_{c)} \phi + \frac{D-5}{6} h_{ac} g^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi - \frac{D-5}{6} g_{ac} h^{bd} \nabla_b \phi \nabla_d \phi + \\ & \frac{D-5}{3} g_{ac} g^{bd} \nabla_b \varphi \nabla_d \phi + \frac{D-3}{3} h_{ac} V(\phi) + \frac{D-3}{3} g_{ac} \frac{dV}{d\phi} \varphi. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ahora, se imponen las condiciones de nulidad de: la traza de la perturbación, la divergencia, y el calibre axial

$$g^{ac} h_{ac} = 0; \quad \nabla_a h_b^a = 0; \quad h_{a4} = 0. \quad (2.25)$$

Y se considera que la perturbación del campo escalar no genera las fluctuaciones gravitacionales, por lo que $\varphi = 0$; y también que $\phi = \phi(\xi)$, y que la constante D que aparece al derivar tenga un valor de 5, ya que es el número de dimensiones con el cual se requiere trabajar. Estas asunciones dan lugar a la siguiente expresión, que representa al sistema acoplado Einstein – campo escalar para la perturbación gravitacional realizada:

$$-\frac{1}{2}\mathcal{D}h_{ac} + R^b{}_{(ac)}{}^d h_{bd} + R^b{}_{(a|b|}{}^d h_{c)d} = \frac{2}{3}h_{ac}V(\phi). \quad (2.26)$$

Particularmente, para la métrica (2.4), la ecuación (2.26) se reduce a la ecuación de movimiento de la perturbación h_{ac} :

$$\frac{1}{f^2}\left(\mathcal{D}_{(4)} + \partial_\xi^2 - \frac{f'}{f}\partial_\xi - 2\frac{f''}{f}\right)h_{ac} = 0 \rightarrow \mathcal{D}_4 = \partial^\mu\partial_\mu. \quad (2.27)$$

Se realiza una separación de variables en la perturbación del tensor métrico. La primera función está en términos de las coordenadas sobre la pared de dominio, y la segunda función depende únicamente de la coordenada adicional.

Esto se hace en coordenadas conformes porque técnicamente facilita el análisis de la ecuación de movimiento de la perturbación:

$$h_{ac} = \chi(t, x, y, z)\Psi_{ac}(\xi). \quad (2.28)$$

Se pide que la función sobre la pared de dominio satisfaga una ecuación de onda, porque es un hecho que las ondas gravitacionales se perpetúan en cuatro dimensiones:

$$\mathcal{D}_4\chi(t, x, y, z) = m^2\chi(t, x, y, z), \quad (2.29)$$

donde m es una constante.

Sustituyendo esto en la ecuación de movimiento de la perturbación, queda:

$$m^2\Psi_{ab}(\xi) + \left(\partial_\xi^2 - \frac{f'}{f}\partial_\xi - \frac{f''}{f}\right)\Psi_{ab}(\xi) = 0. \quad (2.30)$$

Realizando la sustitución $\Psi_{ab}(\xi) = f^{\frac{1}{2}}\psi_{ab}(\xi)$, donde f es el factor métrico, resulta una ecuación conocida, de tipo Schrödinger donde se puede identificar un término concreto: el potencial mecánico-cuántico (V_{QM}).

$$(-\partial_{\xi}^2 + V_{QM})\psi_{ac}(\xi) = m^2\psi_{ac}(\xi) \rightarrow V_{QM} = \frac{3}{4}\frac{f'^2}{f^2} + \frac{3}{2}\frac{f''}{f}. \quad (2.31)$$

En esta ecuación de tipo Schrödinger se pueden determinar los modos (las soluciones) analizando el VQM. La forma de este VQM es tal que existe un modo cero localizado y otros modos masivos que se propagan libremente.

La solución para (2.31) está compuesta por el modo cero (no masivo) para $m^2 = 0$ y los modos masivos para $m^2 \neq 0$, siendo m^2 la masa asociada a la onda gravitacional.

El modo cero de las fluctuaciones gravitacionales se puede escribir como

$$f^{\frac{3}{2}} = Ne^{\frac{3}{2}A}, \quad (2.32)$$

donde N es una constante de normalización.

Así, (2.32) es la solución a la ecuación de Schrödinger (2.31) cuando el autovalor es 0.

En el VQM, el modo cero debe ser una función normalizable, acampanada, porque no hay suficiente energía para escapar a la dimensión adicional (la materia queda confinada a la pared doble). Si el factor métrico exhibe un perfil normalizable, el modo cero también lo será.

Teniendo el modo cero, se puede hablar de la densidad de probabilidad de la gravitación newtoniana estándar.

Cuando se calcula el potencial de interacción entre dos partículas masivas (potencial de Newton), en cuatro dimensiones, se obtiene un término newtoniano determinado por el modo cero, y otro término determinado por los modos masivos, que se propaga libremente por el *bulk* 5 dimensional:

$$V(r) = (G_5|\psi_0(0)|^2)\frac{m_1m_2}{r}\left(1 + \frac{1}{|\psi_0(0)|^2}\int_0^{+\infty}|\psi_m(0)|^2e^{-mr}dm\right). \quad (2.33)$$

El modo cero es el comportamiento de la gravitación estándar, porque da lugar al término newtoniano. (Zoghbi, 2006, pp.21-23)

CAPÍTULO III

3. MARCO DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se indica la segunda solución en coordenadas de longitud propia, y se explican gráficamente las características de ambas soluciones.

La caracterización de una solución del tipo pared de dominio consiste en representar el campo escalar ϕ , potencial de autointeracción $V(\phi)$, y el factor métrico f . Adicionalmente, en este trabajo, se presenta la densidad de energía ρ .

Para graficar estas funciones, se hizo uso del software matemático Wolfram Mathematica 12.3 Student Edition.

La coordenada adicional para la solución en coordenadas conformes es ξ , mientras que para aquella en coordenadas de longitud propia es r .

La solución en coordenadas conformes depende de dos parámetros: α (determina la constante cosmológica) y s (determina el ancho de las subparedes); mientras que la solución en coordenadas de longitud propia depende únicamente del parámetro p (determina la constante cosmológica y el espesor de las subparedes).

Cabe resaltar que s y p únicamente toman valores enteros impares positivos.

Para conocer el comportamiento de las fluctuaciones gravitacionales de cada solución, se observa al potencial mecánico-cuántico V_{QM} asociado a cada una.

Las siguientes soluciones son estáticas, por lo que $\beta = 0$ en ambas.

3.1. Solución en coordenadas conformes

A continuación, se indican las funciones asociadas a la solución presentada por Susana Zoghbi en coordenadas conformes.

3.1.1. Forma analítica de la solución en coordenadas conformes

3.1.1.1. Factor métrico

El factor métrico en coordenadas conformes, como lo indica la ecuación (2.6) de la tesis de Susana Zoghbi (2006, p.8), es

$$f(\xi) = [1 + (\alpha\xi)^{2s}]^{-\frac{1}{2s}}. \quad (3.1)$$

3.1.1.2. Campo escalar

El campo escalar en coordenadas conformes, viene indicado en la ecuación (37) del artículo de Melfo, Pantoja, y Skirzewski (2002, p.6),

$$\phi = \phi_0 \arctan(\alpha^s \xi^s) \rightarrow \phi_0 = \frac{\sqrt{3(2s-1)}}{s}, s = 1, 3, 5, \dots \quad (3.2)$$

3.1.1.3. Potencial de autointeracción

El potencial de autointeracción en coordenadas conformes, viene indicado por la ecuación (38) de Melfo, Pantoja, y Skirzewski (2002, p.6):

$$V(\phi) + \Lambda = 3\alpha^2 \sin^{2-\frac{2}{s}}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \left[\frac{2s+3}{2} \cos^2\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) - 2 \right], \quad (3.3)$$

donde ϕ , ϕ_0 y s son los mismos de la ecuación (3.2), y Λ representa la constante cosmológica del *bulk*, cuyo valor es $-6\alpha^2$.

3.1.1.4. Densidad de energía

Mediante la densidad de energía se puede observar la presencia de la pared de dominio dentro del *bulk*. Dicha densidad viene dada por la componente G_{tt} de la ecuación (2.5), cuyo factor métrico está descrito en (3.1):

$$G_t^t = \frac{3}{f^2} \left[\frac{f''}{f} - \beta^2 \right]. \quad (2.5)$$

Debe recordarse que $\beta = 0$ porque se trata de una solución estática.

3.1.2. *Perturbaciones gravitacionales sobre la pared*

3.1.2.1. *Potencial mecánico-cuántico*

La función que permite visualizar el perfil de las fluctuaciones gravitacionales de la solución en coordenadas conformes, es el potencial mecánico-cuántico (V_{QM}). Este revela el comportamiento oscilatorio de la gravedad sobre la pared de dominio descrita por la métrica (2.4).

La ecuación que da lugar a su gráfica se consigue de la ecuación de Schrödinger (2.31) obtenida al perturbar dicha métrica:

$$V_{QM} = \frac{3}{4} \frac{f'^2}{f^2} + \frac{3}{2} \frac{f''}{f}, \quad (3.4)$$

para la cual, el factor métrico es el que se indica en (3.1).

3.1.3. Forma gráfica de la solución en coordenadas conformes

En todas las gráficas de la solución en coordenadas conformes se usaron los mismos valores para los parámetros α y s :

- $\alpha = 1$
- $s = 1,3,5$

Además, $\beta = 0$ porque se trata de una solución estática.

3.1.3.1. Factor métrico

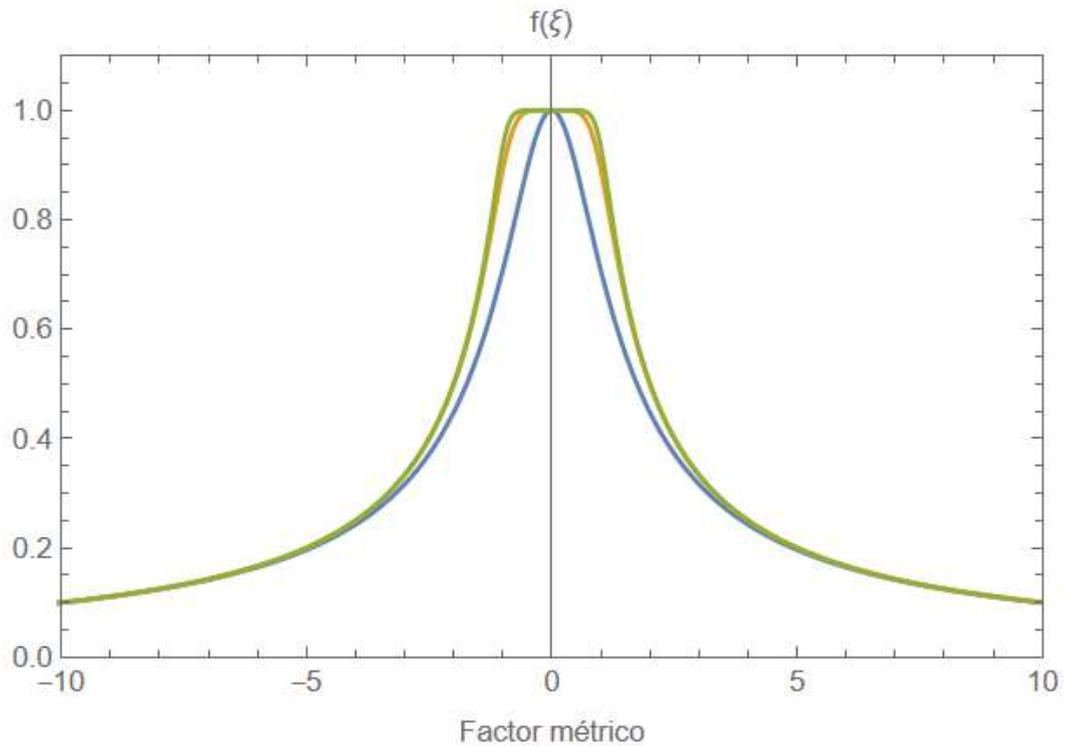


Gráfico 1 – 3. Factor métrico en coordenadas conformes, para $s = 1,3,5$

Realizado por: Javier A, Barraqueta S. 2021.

Se puede notar que el factor métrico presenta un perfil acampanado en el origen, con una curvatura suave para $s = 1$, a diferencia de las cúspides para $s = 3,5$, que presentan un perfil aplanado en la misma región.

Esta función se puede interpretar como la densidad de probabilidad para localizar gravedad newtoniana estándar (el modo cero de la ecuación de tipo Schrödinger para las fluctuaciones gravitacionales) sobre la pared de dominio, y así la zona aplanada indica que hay igual probabilidad de conseguir esa gravedad entre las subparedes; por otra parte, cuando uno se aleja de ellas, dentro del *bulk*, la probabilidad de conseguir gravitación estándar va decayendo exponencialmente.

3.1.3.2. Campo escalar

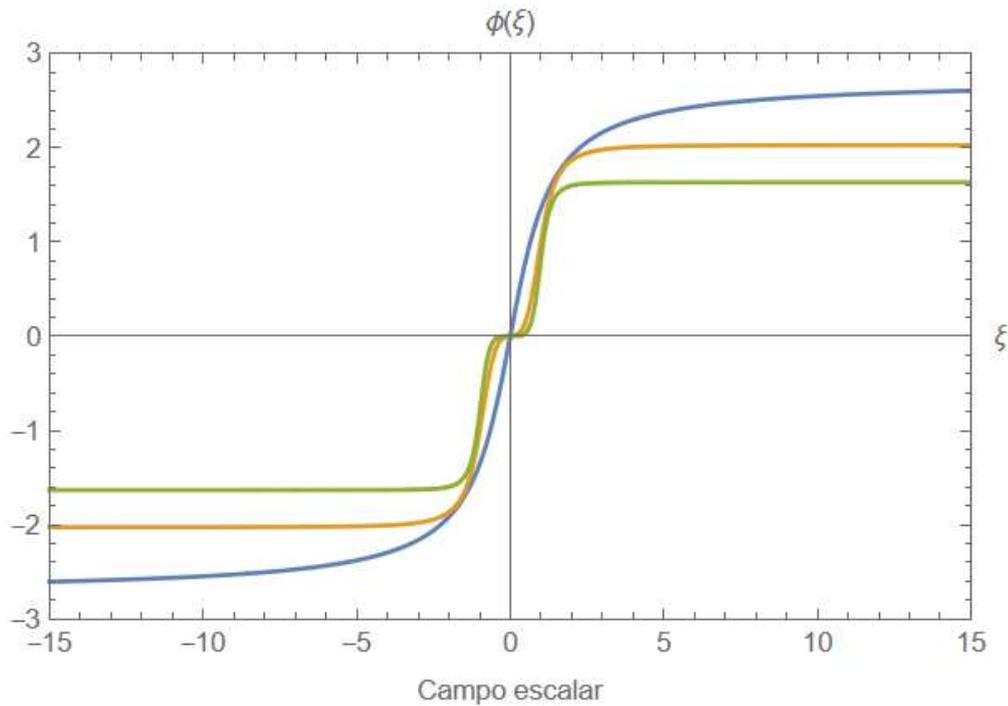


Gráfico 2 – 3. Campo escalar en coordenadas conformes, para $s = 1,3,5$

Realizado por: Javier A, Barraqueta S. 2021.

Se observa que para $s = 1$ (curva azul) el campo escalar presenta un perfil tipo kink que interpola entre dos valores, que coinciden con los mínimos del potencial de autointeracción para $s = 1$.

Para $s = 3,5$ (curvas naranja y verde, respectivamente) se observan kinks dobles, con tres segmentos planos, que corresponden a los mínimos del potencial de autointeracción para $s = 3,5$, respectivamente. Para confirmar estos resultados, se pueden observar los mínimos del gráfico 3 – 3.

3.1.3.3. Potencial de autointeracción

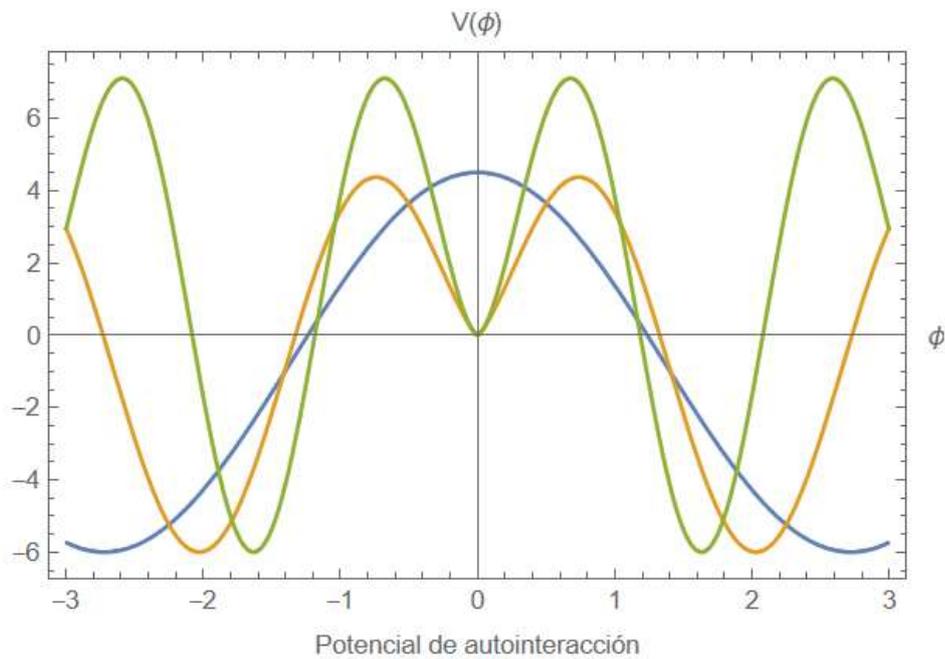


Gráfico 3 – 3. Potencial de autointeracción para $s = 1,3,5$

Realizado por: Javier A, Barraqueta S. 2021.

Aquí se observa que el potencial de autointeracción es una función periódica, de curvatura suave, que presenta exactamente dos mínimos cuando $s = 1$ o, lo que es lo mismo, cuando se tiene una pared de dominio simple. Para $s > 1$, la gráfica del potencial de autointeracción presenta tres mínimos, uno de los cuales se da exactamente en $V(\phi) = 0$. Estas observaciones están directamente relacionadas con, y sirven para confirmar los resultados de, el gráfico 2 – 3. También se puede notar que los mínimos del potencial de autointeracción coinciden con el valor de la constante cosmológica Λ .

3.1.3.4. Densidad de energía

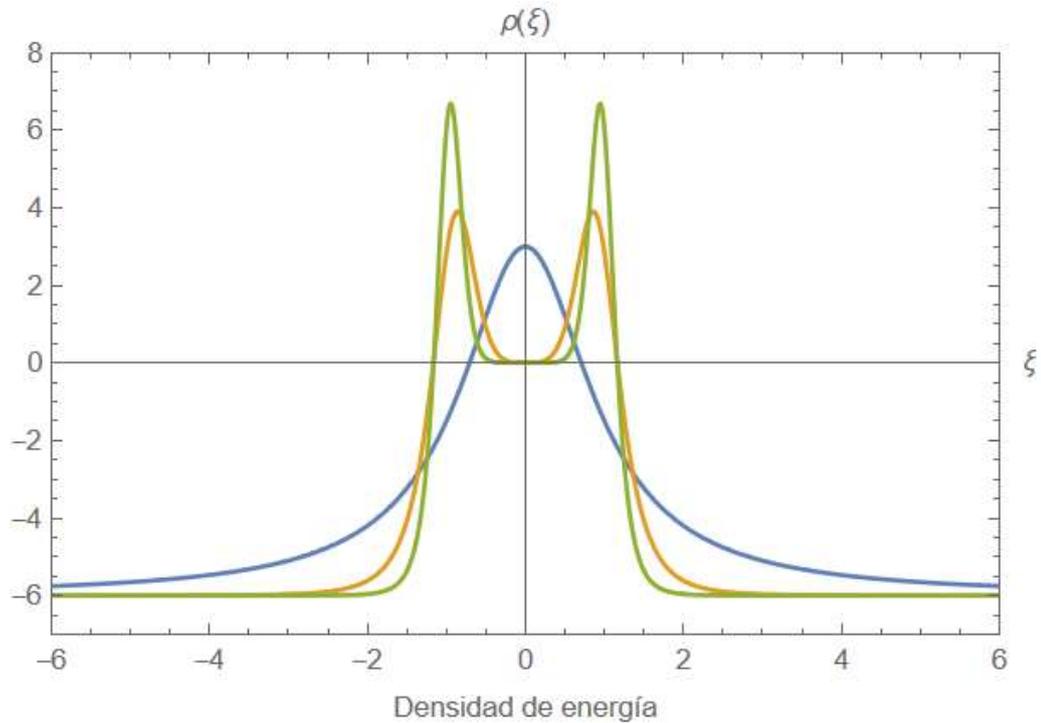


Gráfico 4 – 3. Densidad de energía en coordenadas conformes, para $s = 1,3,5$

Realizado por: Javier A, Barraqueta S. 2021.

Para el caso de $s = 1$ (curva azul) se tiene un perfil acampanado sobre el origen. En tanto que para $s = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, surgen dos concentraciones simétricas de energía, una en cada lateral del origen, que crecen conforme lo hace s . Esto sugiere que la pared de dominio posee una estructura interna consistente en dos subparedes paralelas.

Además, se observa claramente el valor de la constante cosmológica $\Lambda = -6\alpha^2$, también visible en el gráfico 3 – 3.

3.1.4. Perfil de las perturbaciones gravitacionales sobre la pared

3.1.4.1. Potencial mecánico-cuántico

Igual que para las funciones anteriores:

- $\alpha = 1$
- $s = 1,3,5$

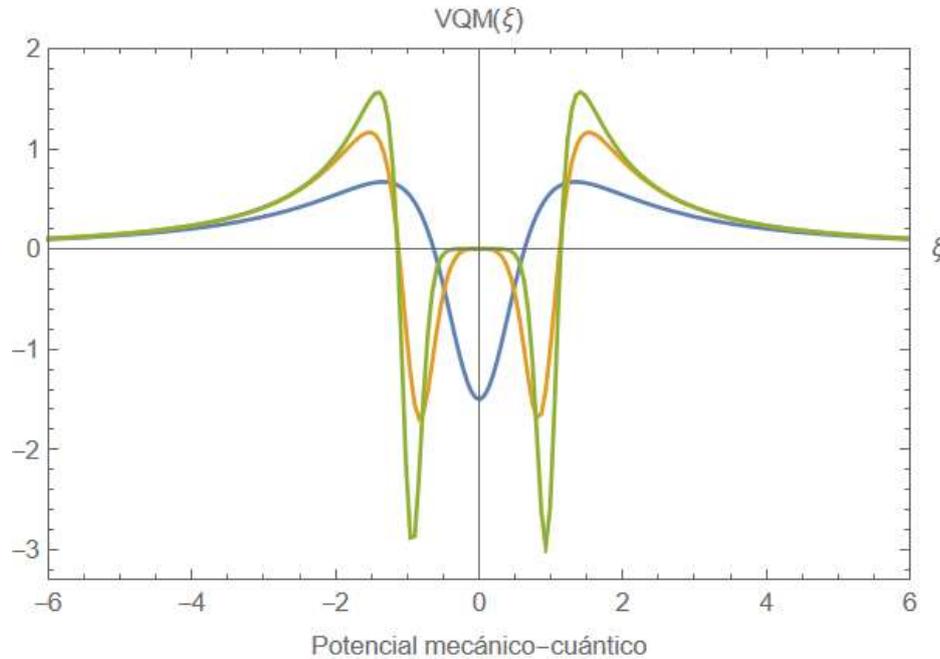


Gráfico 5 – 3. Potencial mecánico-cuántico en coordenadas conformes, para $s = 1,3,5$

Realizado por: Javier A, Barraqueta S. 2021.

La gráfica del potencial mecánico-cuántico expone el comportamiento ondulatorio de la gravedad sobre la pared de dominio, teniéndose para $s = 1$ un pozo gravitacional simple con bordes suaves, y que va perdiendo fuerza conforme incrementa la distancia hacia la pared; mientras que para el resto de valores $s = 3,5$, aparece un doble pozo gravitacional, correspondiente a las dos subparedes internas, cuya profundidad y máximos se acentúan conforme aumenta s . Esto da a notar que la gravedad de la pared de dominio decae exponencialmente cuanto más lejos se está de ella.

También cabe destacar que el modo cero de las fluctuaciones gravitacionales no posee la suficiente energía como para escapar hacia el *bulk*, ya que el potencial tiende asintóticamente a cero, mientras que los modos masivos si pueden hacerlo mediante el efecto túnel.

3.2. Solución en coordenadas de longitud propia

A partir del factor métrico (3.5), campo escalar (A.14), y potencial de autointeracción (A.16), se puede construir la nueva solución en coordenadas de longitud propia.

El procedimiento detallado para expresar la nueva solución en dichas coordenadas se encuentra en el anexo A del presente trabajo.

También, se presenta el comportamiento ondulatorio de la gravedad sobre la pared de dominio en longitud propia, a través del potencial mecánico-cuántico (A.18).

Para obtener la nueva solución, se integró la ecuación (A.13) en Wolfram Mathematica, tomando el campo escalar de (A.14), para valores de p específicos: 1, 3, 5 y 7, que dan origen a las cuatro primeras curvas de la familia de nuevas soluciones, con el objetivo de tener una representación gráfica más sencilla de analizar. A la función A resultante se le anularon las constantes de integración para poder usarla en el factor métrico, campo escalar, densidad de energía, potencial de autointeracción y potencial mecánico-cuántico.

Las funciones A , para cada p , son las mismas para todas las gráficas, excepto en el campo escalar, donde no se hace uso de ellas.

3.2.1. Forma analítica de la solución en coordenadas de longitud propia

3.2.1.1. Factor métrico

El factor métrico se representa como e^A , donde A es solución de (A.13):

$$f(r) = e^{A(r)}. \quad (3.5)$$

3.2.1.2. Potencial de autointeracción

El potencial de autointeracción en coordenadas de longitud propia viene indicado en la ecuación (A.16), pero en función de la coordenada adicional r , y se requiere expresarlo en función del campo escalar ϕ , para lo cual se debe despejar r de la ecuación (A.14), y luego reemplazarla en (A.16):

$$\phi_p(r) = \tanh^p\left(\frac{r}{p}\right) \quad (A.14)$$

$$\sqrt[p]{\phi_p} = \tanh\left(\frac{r}{p}\right)$$

$$r = p \tanh^{-1}\left(\sqrt[p]{\phi_p}\right).$$

$$V(r) = -\frac{3}{2}(A'' + 4A'^2 - 3\beta^2). \quad (\text{A.16})$$

Cabe recordar que $\beta = 0$ porque se trata de una solución estática.

3.2.1.3. *Campo escalar*

El campo escalar en coordenadas de longitud propia se propone como lo indica la ecuación (A.14):

$$\phi_p(r) = \tanh^p\left(\frac{r}{p}\right). \quad (\text{A.14})$$

3.2.1.4. *Densidad de energía*

La expresión para la densidad de energía en coordenadas de longitud propia está en la ecuación (A.17), donde $\beta = 0$ porque el espacio-tiempo, en el cual la solución está embebida, es estático:

$$G_t^t = 3A'' + 6A'^2 - \frac{3}{e^{2A}}\beta^2. \quad (\text{A.17})$$

3.2.2. *Perturbaciones gravitacionales sobre la pared*

3.2.2.1. *Potencial mecánico-cuántico*

El análisis de fluctuaciones gravitacionales siempre se lleva a cabo en coordenadas conformes, porque en ese sistema se puede obtener una ecuación de tipo Schrödinger, donde aparece el V_{QM} .

Por este motivo se debe realizar un cambio de variable, que no es invertible, lo cual representa un desafío técnico para ver cómo luce el VQM.

Entonces, para poder visualizar el VQM correspondiente a la solución planteada en longitud propia se piensa en una solución gráfica, que se obtiene mediante el comando Parametricplot en Wolfram Mathematica.

Lo que se puede observar gráficamente es la forma que tomaría el VQM en coordenadas conformes, conocida su forma en coordenadas de longitud propia.

Por otro lado, se tiene el cambio de variable para pasar de coordenadas conformes a coordenadas de longitud propia.

Entonces, se coloca el VQM como función de la coordenada adicional ξ , y en el eje horizontal la coordenada adicional ξ en función de la coordenada en longitud propia r .

El procedimiento matemático es el siguiente:

Partiendo de la ecuación

$$f d\xi = dr, \quad (\text{A.5})$$

se despeja

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{f}, \quad (3.6)$$

y se resuelve para ξ con una condición arbitraria:

$$\xi(1) = 1. \quad (3.7)$$

3.2.3. Forma gráfica de la solución en coordenadas de longitud propia

3.2.3.1. Factor métrico

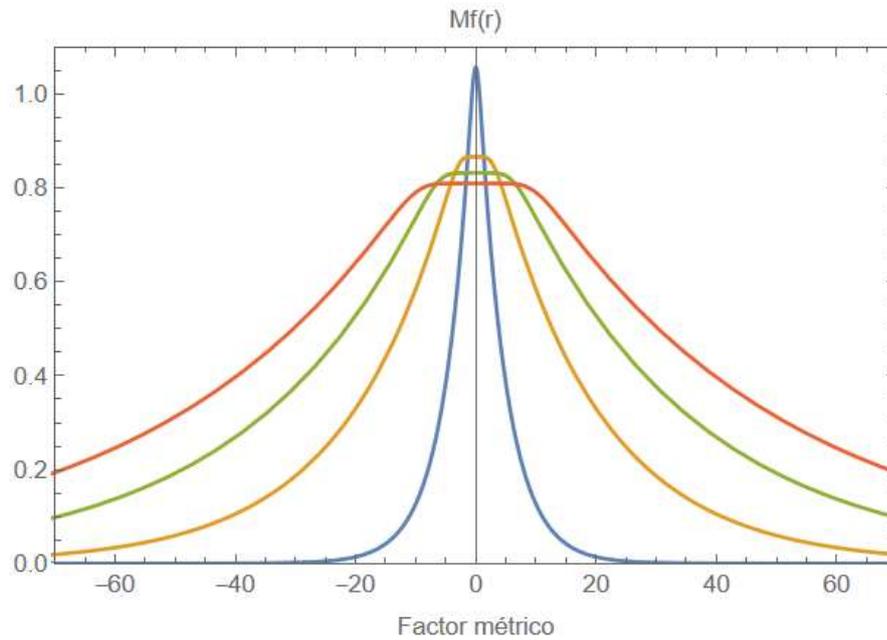


Gráfico 6 – 3. Factor métrico en coordenadas de longitud propia, para $p = 1,3,5,7$

Realizado por: Javier A, Barraqueta S. 2021.

Las expresiones analíticas para las gráficas con $p = 1,3$ (curvas azul y amarilla, respectivamente) son:

$$e^{A_1} = e^{-\frac{2}{9} \ln[\cosh(r)] + \frac{\operatorname{sech}(r^2)}{18}},$$

$$e^{A_3} = e^{\frac{1}{70} \left\{ -12 \ln\left[\cosh\left(\frac{r}{3}\right)\right] - 15 \operatorname{sech}\left(\frac{r}{3}\right)^2 + 6 \operatorname{sech}\left(\frac{r}{3}\right)^4 - \operatorname{sech}\left(\frac{r}{3}\right)^6 \right\} - \frac{3}{35} \tanh\left(\frac{r}{3}\right)^6}.$$

Aquí se puede observar que la probabilidad para localizar gravedad newtoniana estándar disminuye conforme aumenta p , pero en cambio dicha probabilidad se manifiesta a lo largo de una zona más extensa.

3.2.3.2. Campo escalar

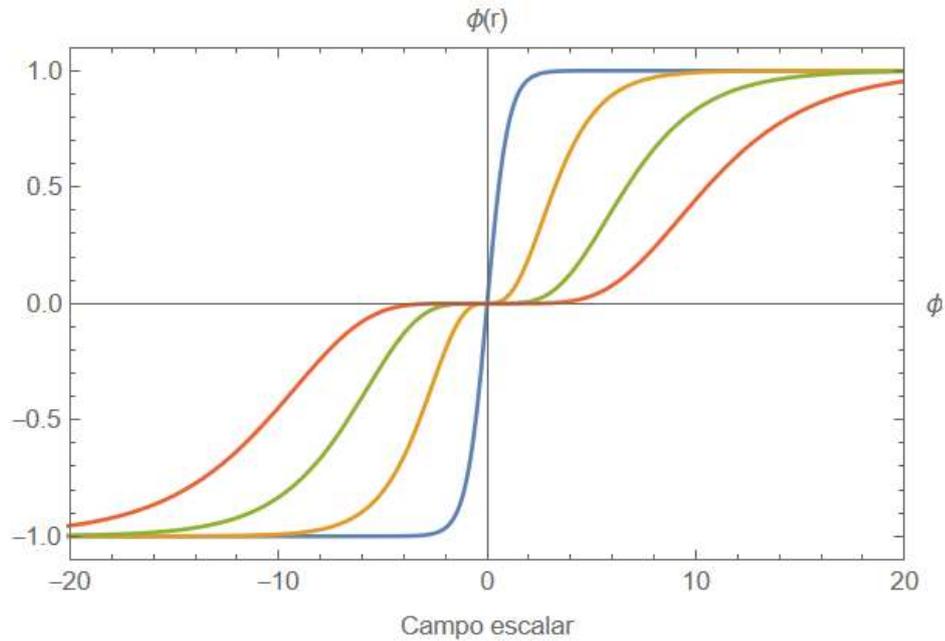


Gráfico 7 – 3. Campo escalar en coordenadas de longitud propia, para $p = 1,3,5,7$

Realizado por: Javier A, Barrazueta S. 2021.

La forma analítica de las curvas para $p = 1,3$ es la siguiente:

$$\phi_1 = \tanh^1\left(\frac{r}{1}\right),$$

$$\phi_3 = \tanh^3\left(\frac{r}{3}\right).$$

Este gráfico del campo escalar sugiere que los mínimos del potencial son los mismos, independientemente del valor del parámetro p , a diferencia del campo escalar en coordenadas conformes, donde cada valor de s da lugar a un mínimo distinto.

3.2.3.3. Potencial de autointeracción

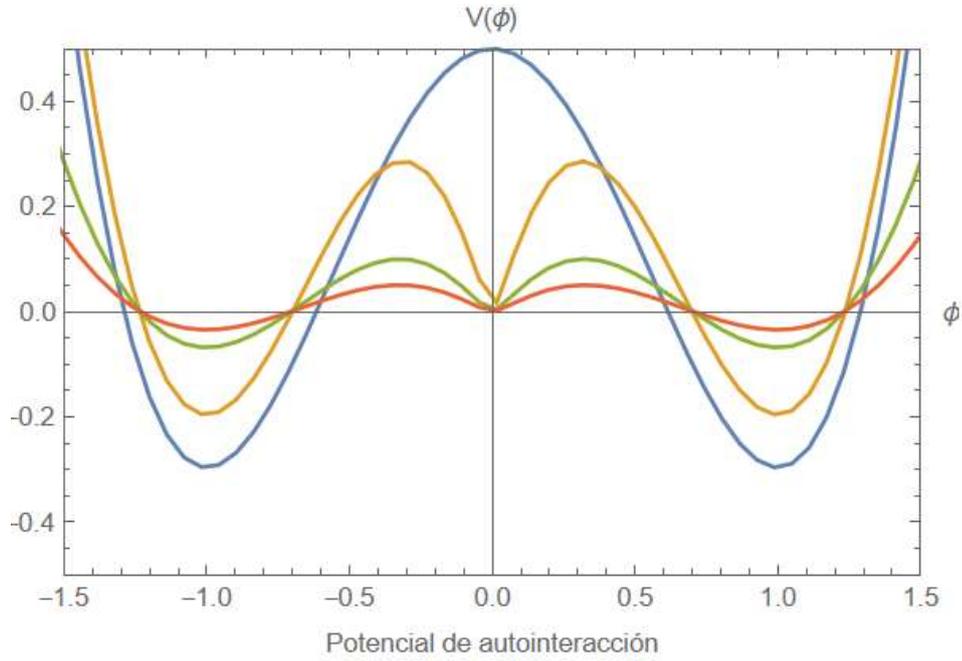


Gráfico 8 – 3. Potencial de autointeracción para $p = 1,3,5,7$

Realizado por: Javier A. Barrazueta S. 2021.

Los potenciales de autointeracción para $p = 1,3$ (curvas azul y amarilla, respectivamente), son:

$$V_1 = -\frac{3}{2} \left\{ -\frac{2}{9}(1 - \phi^2) + \frac{2}{9}\phi^2(1 - \phi^2) - \frac{1}{9}(1 - \phi^2)^2 + 4 \left[-\frac{2}{9}\phi - \frac{1}{9}\phi(1 - \phi^2) \right]^2 \right\},$$

$$V_3 = -\frac{3}{2} \left\{ \frac{4}{35}\phi^2 \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{2}{7}\phi^{\frac{4}{3}} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \frac{1}{70} \left[-\frac{4}{3} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{20}{3}\phi^{\frac{2}{3}} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right) + \right. \right.$$

$$\left. \frac{10}{3} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \frac{32}{3}\phi^{\frac{2}{3}} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right)^2 - \frac{8}{3} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right)^3 - 4\phi^{\frac{2}{3}} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \frac{2}{3} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right)^4 \right] +$$

$$\left. 4 \left\{ -\frac{6}{35}\phi^{\frac{5}{3}} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{1}{70} \left[-4\phi^{\frac{1}{3}} + 10\phi^{\frac{1}{3}} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right) - 8\phi^{\frac{1}{3}} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right)^2 + 2\phi^{\frac{1}{3}} \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}}\right)^3 \right] \right\}^2 \right\}.$$

En el gráfico 8 – 3 los mínimos del potencial de autointeracción están en conformidad con lo observado en el gráfico 7 – 3, para el campo escalar.

3.2.3.4. Densidad de energía

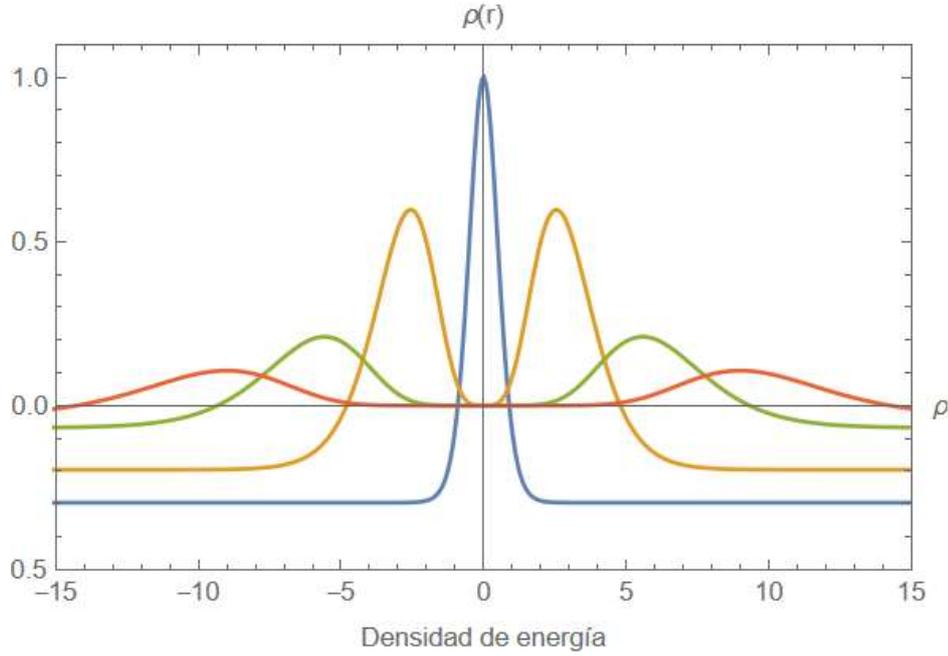


Gráfico 9 – 3. Densidad de energía en coordenadas de longitud propia, para $p = 1,3,5,7$

Realizado por: Javier A. Barraqueta S. 2021.

Las gráficas de la densidad de energía para $p = 1,3$ están descritas, respectivamente, por:

$$G_{tt_1} = 3 \left[-\frac{2}{9} \operatorname{sech}^2(r) - \frac{\operatorname{sech}^4(r)}{9} + \frac{2}{9} \operatorname{sech}^2(r) \tanh^2(r) \right] + 6 \left[-\frac{2}{9} \tanh(r) - \frac{1}{9} \operatorname{sech}^2(r) \tanh(r) \right]^2,$$

$$G_{tt_3} = 3 \left\{ -\frac{2}{7} \operatorname{sech}^4\left(\frac{r}{3}\right) \tanh^4\left(\frac{r}{3}\right) + \frac{4}{35} \operatorname{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right) \tanh^6\left(\frac{r}{3}\right) + \frac{1}{70} \left[-\frac{4}{3} \operatorname{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right) + \frac{10}{3} \operatorname{sech}^4\left(\frac{r}{3}\right) - \frac{8}{3} \operatorname{sech}^6\left(\frac{r}{3}\right) + \frac{2}{3} \operatorname{sech}^8\left(\frac{r}{3}\right) - \frac{20}{3} \operatorname{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right) \tanh^2\left(\frac{r}{3}\right) + \frac{32}{3} \operatorname{sech}^4\left(\frac{r}{3}\right) \tanh^2\left(\frac{r}{3}\right) - 4 \operatorname{sech}^6\left(\frac{r}{3}\right) \tanh^2\left(\frac{r}{3}\right) \right] \right\} + 6 \left\{ -\frac{6}{35} \operatorname{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right) \tanh^5\left(\frac{r}{3}\right) + \frac{1}{70} \left[-4 \tanh\left(\frac{r}{3}\right) + 10 \operatorname{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right) \tanh\left(\frac{r}{3}\right) - 8 \operatorname{sech}^4\left(\frac{r}{3}\right) \tanh\left(\frac{r}{3}\right) + 2 \operatorname{sech}^6\left(\frac{r}{3}\right) \tanh\left(\frac{r}{3}\right) \right] \right\}.$$

La densidad de energía es una representación de la pared de dominio en el *bulk*. Y así es que se puede observar una disminución en la energía contenida en cada pared, además de una separación creciente entre las subparedes, conforme el valor de p aumenta.

Además, la constante cosmológica pasa de describir un espacio-tiempo anti deSitter a indicar un espacio-tiempo minkowskiano conforme aumenta p .

3.2.4. Perfil de las perturbaciones gravitacionales sobre la pared

3.2.4.1. Potencial mecánico-cuántico

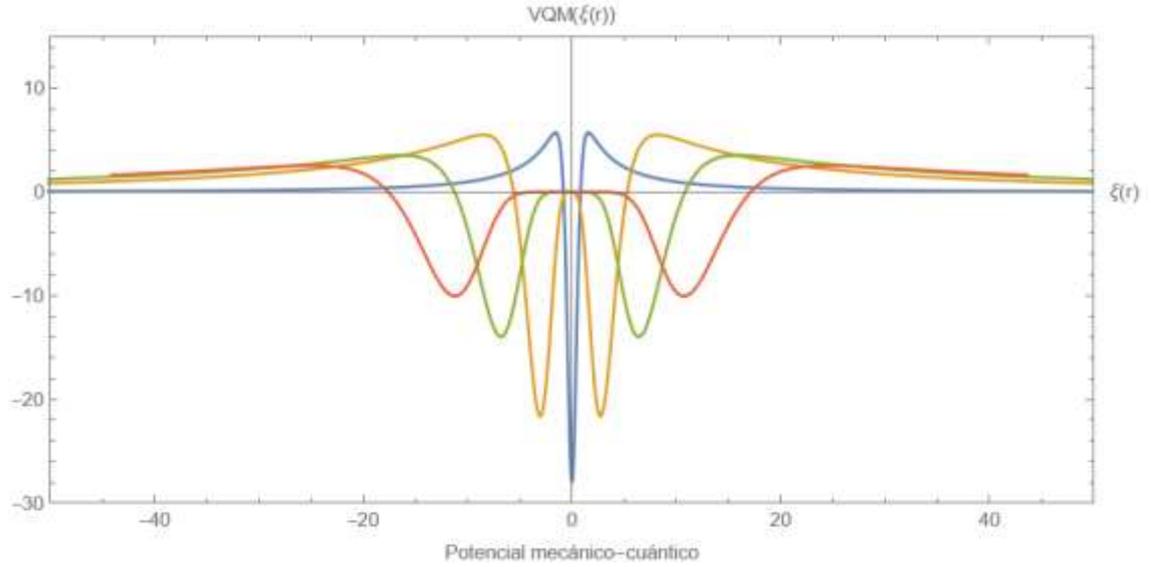


Gráfico 10 – 3. Potencial mecánico-cuántico en coordenadas de longitud propia, para $p = 1,3,5,7$

Realizado por: Javier A, Barraqueta S. 2021.

Las expresiones analíticas, en coordenadas de longitud propia, para los VQMs con $p = 1,3$ del gráfico 10 – 3, son respectivamente:

$$VQM_1 = e^{2\left\{-\frac{2}{9}\ln[\cosh(r)]+\frac{\text{sech}^2(r)}{18}\right\}}\left\{\frac{15}{4}\left[-\frac{2}{9}\tanh(r)-\frac{1}{9}\text{sech}^2(r)\tanh(r)\right]^2+\frac{3}{2}\left[-\frac{2}{9}\text{sech}^2(r)-\frac{\text{sech}^4(r)}{9}+\frac{2}{9}\text{sech}^2(r)\tanh^2(r)\right]\right\},$$

$$VQM_3 = e^{2\left\{\frac{1}{70}\left[-12\ln\left[\cosh\left(\frac{r}{3}\right)\right]-15\text{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right)+6\text{sech}^4\left(\frac{r}{3}\right)-\text{sech}^6\left(\frac{r}{3}\right)\right]-\frac{3}{35}\tanh^6\left(\frac{r}{3}\right)\right\}}\left\{\frac{15}{4}\left\{-\frac{6}{35}\text{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right)\tanh^5\left(\frac{r}{3}\right)+\frac{1}{70}\left[-4\tanh\left(\frac{r}{3}\right)+10\text{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right)\tanh\left(\frac{r}{3}\right)-8\text{sech}^4\left(\frac{r}{3}\right)\tanh\left(\frac{r}{3}\right)+2\text{sech}^6\left(\frac{r}{3}\right)\tanh\left(\frac{r}{3}\right)\right]^2+\frac{3}{2}\left\{-\frac{2}{7}\text{sech}^4\left(\frac{r}{3}\right)\tanh^4\left(\frac{r}{3}\right)+\frac{4}{35}\text{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right)\tanh^6\left(\frac{r}{3}\right)+\frac{1}{70}\left[-\frac{4}{3}\text{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right)+\frac{10}{3}\text{sech}^4\left(\frac{r}{3}\right)-\frac{8}{3}\text{sech}^6\left(\frac{r}{3}\right)+\frac{2}{3}\text{sech}^8\left(\frac{r}{3}\right)-\frac{20}{3}\text{sech}^2\left(\frac{r}{3}\right)\tanh^2\left(\frac{r}{3}\right)+\frac{32}{3}\text{sech}^4\left(\frac{r}{3}\right)\tanh^2\left(\frac{r}{3}\right)-4\text{sech}^6\left(\frac{r}{3}\right)\tanh^2\left(\frac{r}{3}\right)\right]\right\}\right\}.$$

En este gráfico se puede confirmar lo que se ha venido observando desde el potencial de autointeracción en la nueva solución en coordenadas de longitud propia: que las subparedes se distancian entre sí progresivamente conforme aumenta el valor de p .

De igual manera que en el gráfico 5 – 3, se observa que el modo cero está confinado dentro de la pared, mientras que los modos masivos pueden escapar al *bulk* mediante el efecto túnel.

CONCLUSIONES

- Se encontraron dos soluciones del tipo pared de dominio doble al acoplamiento Einstein - campo escalar, en cinco dimensiones. En estas dos soluciones, el campo escalar corresponde a un doble kink interpolando entre los mínimos del potencial de autointeracción, en correspondencia con la constante cosmológica del *bulk*.
- Se recuperó una solución estática del tipo pared doble en coordenadas conformes. Esta solución se caracteriza por una densidad de energía donde se observan dos máximos poniendo en evidencia la presencia de dos subparedes, que muestran la estructura interna de la pared doble.
La pared en coordenadas conformes está determinada por dos parámetros: α y s . El primero asociado a la constante cosmológica del espacio cinco dimensional, y el segundo con el ancho de las subparedes. Cabe resaltar que la pared determinada es de espesor fijo.
- También se encontró una solución pared de dominio doble estática, en coordenadas de longitud propia. Esta está caracterizada por un solo parámetro: p .
En esta solución, el campo escalar también interpola entre los mínimos del potencial correspondiente. El parámetro p determina el espesor de la estructura doble, y también define la constante cosmológica del espacio - tiempo 5 dimensional.
- Sobre ambas soluciones se hizo el análisis de fluctuaciones gravitacionales. Para ello, se introdujo una pequeña perturbación sobre la métrica, y se halló la ecuación de movimiento de la perturbación a primer orden, en el calibre transversal y sin traza.
Luego de introducir una separación de variables sobre la perturbación gravitacional, se encontró que el término asociado a la coordenada adicional satisface una ecuación de autovalores del tipo Schrödinger, de forma tal que el potencial mecánico - cuántico correspondiente soporta un modo cero localizado, normalizable, y un espectro continuo de modos con autovalores distintos de cero que se propagan libremente por toda la estructura cinco dimensional.

RECOMENDACIONES

- En relación con las paredes de dominio encontradas en longitud propia, hallar la expresión del factor métrico para todo p , y luego determinar el espesor de la pared doble y la constante cosmológica del sistema.
- En relación con la pared doble en longitud propia, determinar numéricamente el espectro de las fluctuaciones gravitacionales. También, conseguir el espectro de las fluctuaciones gravitacionales de forma analítica, o por lo menos una aproximación al mismo, con el propósito de calcular el potencial de interacción gravitacional en 4 dimensiones.
- Descomponer las perturbaciones gravitacionales en modos tensoriales, vectoriales y escalares, y analizar la localización de los modos escalares cuando se rompe la simetría de la pared doble. Esto con el propósito de determinar la significancia de los modos escalares en el potencial newtoniano 4 dimensional.
- Calcular el valor de la constante cosmológica para la nueva solución en coordenadas de longitud propia.

BIBLIOGRAFÍA

BAZEIA, D., FURTADO, C. & GOMES, A. R. “Brane structure from a scalar field in warped spacetime”. *Physical Review D* [en línea], 2004, (USA) 70(104029), pp. 1-9. [Consulta: 2021-02-15]. ISSN 2470-0029. Disponible en: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.70.104029>

CASTILLO-FELISOLA, O., MELFO, A., PANTOJA, N. & RAMÍREZ, A. “Localizing gravity on exotic thick 3-branes”. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* [en línea], 2004, (Italia) 2004(02), pp. 1-8. [Consulta: 2021-01-13]. ISSN 1475-7516. Disponible en: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2004/02/002>

GREMM, M. “Four-dimensional gravity on a thick domain wall”. *Physics Letters B* [en línea], 2000, (Holanda) 478(4), pp. 434-438. [Consulta: 2020-12-18]. ISSN 0370-2693. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0370269300003038>

GUERRERO, R., RODRÍGUEZ, R. O. & TORREALBA, R. “De Sitter and double asymmetric brane worlds”. *Physical Review D* [en línea], 2005, (USA) 72(124012), pp. 1-8. [Consulta: 2020-12-08]. ISSN 2470-0029. Disponible en: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.72.124012>

GUERRERO, R., RODRÍGUEZ, R. O., TORREALBA, R. & ORTIZ, R. “De sitter and double irregular domain walls”. *General Relativity and Gravitation* [en línea], 2006, (Suiza) 38, pp. 845-855. [Consulta: 2021-06-20]. ISSN 1572-9532. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10714-006-0297-y>

MELFO, A., PANTOJA, N. & SKIRZEWSKI, A. “Thick domain wall spacetimes with and without reflection symmetry”. *Physical Review D* [en línea], 2003, (USA) 67(105003), pp. 1-8. [Consulta: 2021-06-10]. ISSN 2470-0029. Disponible en: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.67.105003>

RANDALL, L. & SUNDRUM, R. “An alternative to compactification”. *Physical Review Letters* [en línea], 1999, (USA) 83(4690), pp. 1-9. [Consulta: 2021-09-05]. ISSN 1079-7114. Disponible en: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.83.4690>

SENJANOVIĆ, G. *Parte I: Defectos Topológicos en Cosmología*. Trieste – Italia: International Centre for Theoretical Physics, 2002, pp. 17 – 23.

ZOGHBI, Susana. Fluctuaciones Gravitacionales en Espaciotiempos Pared de Dominio (Trabajo de titulación). (Maestría). Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”, Barquisimeto, Decanato de Ciencias y Tecnología. Barquisimeto – Venezuela. 2006. pp. 1-50.

ANEXOS

ANEXO A: NUEVA SOLUCIÓN EN COORDENADAS DE LONGITUD PROPIA.

Coordenadas conformes

$$ds^2 = f^2(\xi)[-dt^2 + e^{2\beta t}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + d\xi^2]; \quad (\text{A.1})$$

$$\phi' = \frac{d\phi}{d\xi}; \quad (\text{A.2})$$

$$f' = \frac{df}{d\xi}. \quad (\text{A.3})$$

Coordenadas de longitud propia

$$ds^2 = f^2(r)[-dt^2 + e^{2\beta t}(dx^2 + dy^2 + dz^2)] + dr^2. \quad (\text{A.4})$$

Transición de coordenadas conformes a coordenadas de longitud propia

El factor métrico es la relación entre los incrementos de la coordenada adicional en el sistema coordenado conforme y la del sistema coordenado en longitud propia:

$$f d\xi = dr. \quad (\text{A.5})$$

Se calculan la primera y segunda derivadas del campo escalar en coordenadas conformes:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{d\xi} = \frac{d\phi}{dr} f, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{d\xi} \right) \frac{dr}{d\xi} = \frac{d}{dr} \left(\frac{d\phi}{dr} f \right) f = \frac{d^2\phi}{dr^2} f^2 + \frac{df}{dr} \frac{d\phi}{dr} f. \quad (\text{A.7})$$

Ahora se pueden encontrar la primera y segunda derivadas, en coordenadas de longitud propia, para el factor métrico:

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dr} \frac{dr}{d\xi} = \frac{df}{dr} f, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{df}{dr} \frac{dr}{d\xi} \right) \frac{dr}{d\xi} = \frac{d}{dr} \left(\frac{df}{dr} f \right) f = \frac{d^2 f}{dr^2} f^2 + \left(\frac{df}{dr} \right)^2 f. \quad (\text{A.9})$$

Ecuaciones para ϕ y $V(\phi)$ en longitud propia

Reemplazando (A.5) en (A.3),

$$\frac{f'}{f} = \frac{df}{dr}, \quad (\text{A.10})$$

y, a partir de (A.9),

$$\frac{f''}{f} = \frac{d^2 f}{dr^2} f + \left(\frac{df}{dr} \right)^2, \quad (\text{A.11})$$

se puede calcular, en coordenadas de longitud propia, la expresión para el campo escalar indicada en la ecuación (1.7) de la tesis de Susana Zoghbi:

$$\begin{aligned} \phi'^2 &= 3 \left(2 \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} - \beta^2 \right) \quad (\text{A.12}) \\ f^2 \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 &= 6 \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - 3f \frac{d^2 f}{dr^2} - 3 \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - 3\beta^2 \\ \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 &= \frac{3}{f^2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - \frac{3}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} - 3\beta^2. \end{aligned}$$

Asumiendo que

$$f = e^{A(r)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 &= \frac{3}{(e^{A(r)})^2} \left(\frac{d(e^{A(r)})}{dr} \right)^2 - \frac{3}{e^{A(r)}} \frac{d^2(e^{A(r)})}{dr^2} - 3\beta^2 \\ \phi'^2 &= \frac{3}{e^{2A}} (A' e^A)^2 - \frac{3}{e^A} (A'' e^A + A'^2 e^A) - 3\beta^2 \\ \phi'^2 &= 3A'^2 - 3A'' - 3A'^2 - 3\beta^2 \\ \phi'^2 &= -3A'' - 3\beta^2. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

El campo escalar que se muestra a continuación, es propuesto por Bazeia (2004, p.2) como parte de la solución tipo pared de dominio, porque la $\tanh^p\left(\frac{x}{p}\right)$ cumple con el perfil de un kink si $p = 1$, y de un doble kink si p es un impar mayor que 1:

$$\phi_p(r) = \tanh^p\left(\frac{r}{p}\right). \quad (\text{A.14})$$

De igual manera, para el potencial de autointeracción descrito en la ecuación (1.8) del trabajo de Susana:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{3}{2f^2}\left(\frac{2f'^2}{f^2} + \frac{f''}{f} - 3\beta^2\right) \quad (\text{A.15}) \\ V(\phi) &= -\frac{3}{2}\frac{1}{f^2}\left[2\left(\frac{df}{dr}\right)^2 + f\frac{d^2f}{dr^2} + \left(\frac{df}{dr}\right)^2 - 3\beta^2\right] \\ V(\phi) &= -\frac{3}{2}\frac{1}{f^2}\left[3\left(\frac{df}{dr}\right)^2 + f\frac{d^2f}{dr^2} - 3\beta^2\right] \end{aligned}$$

$$f = e^{A(r)}$$

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{3}{2}\frac{1}{[e^{A(r)}]^2}\left[3\left(\frac{de^{A(r)}}{dr}\right)^2 + e^{A(r)}\frac{d^2(e^{A(r)})}{dr^2} - 3\beta^2\right] \\ V(r) &= -\frac{3}{2}\frac{1}{e^{2A}}[3(A'e^A)^2 + e^A(A''e^A + A'^2e^A) - 3\beta^2] \\ V(r) &= -\frac{3}{2}\frac{1}{e^{2A}}(3A'^2e^{2A} + A''e^{2A} + A'^2e^{2A} - 3\beta^2) \\ V(r) &= -\frac{3}{2}(3A'^2 + A'' + A'^2 - 3\beta^2) \\ V(r) &= -\frac{3}{2}(A'' + 4A'^2 - 3\beta^2). \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Densidad de energía en longitud propia

Partiendo de la expresión para la densidad de energía de la ecuación (2.5), se reemplaza la expresión (A.11), en coordenadas conformes, del factor métrico:

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{3}{f^2}\left(\frac{f''}{f} - \beta^2\right) \quad (\text{2.5}) \\ G_t^t &= \frac{3}{f^2}\left[\frac{d^2f}{dr^2}f + \left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \beta^2\right] \end{aligned}$$

$$f = e^{A(r)}$$

$$G_t^t = \frac{3}{e^{2A}} \left[\frac{d^2(e^{A(r)})}{dr^2} e^{A(r)} + \left[\frac{d(e^{A(r)})}{dr} \right]^2 - \beta^2 \right]$$

$$G_t^t = \frac{3}{e^{2A}} [A'' e^{2A} + A'^2 e^{2A} + (A' e^A)^2 - \beta^2]$$

$$G_t^t = 3A'' + 6A'^2 - \frac{3}{e^{2A}} \beta^2. \quad (\text{A.17})$$

Potencial mecánico-cuántico en longitud propia

A la expresión para el V_{QM} , de la ecuación (2.31), se le reemplazan las expresiones (A.10) y (A.11) encontradas, en coordenadas de longitud propia, del factor métrico:

$$V_{QM} = \frac{3f'^2}{4f^2} + \frac{3f''}{2f} \quad (2.31)$$

$$V_{QM} = \frac{3}{4} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{3}{2} \left[\frac{d^2f}{dr^2} f + \left(\frac{df}{dr} \right)^2 \right]$$

$$V_{QM} = \frac{9}{4} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{3}{2} f \frac{d^2f}{dr^2}$$

$$f = e^{A(r)}$$

$$V_{QM} = \frac{9}{4} \left[\frac{d(e^{A(r)})}{dr} \right]^2 + \frac{3e^{A(r)}}{2} \frac{d^2(e^{A(r)})}{dr^2}$$

$$V_{QM} = \frac{9}{4} (A' e^A)^2 + \frac{3}{2} e^A (A'' e^A + A'^2 e^A)$$

$$V_{QM} = \frac{9}{4} A'^2 e^{2A} + \frac{3}{2} e^{2A} (A'' + A'^2)$$

$$V_{QM} = e^{2A} \left(\frac{15}{4} A'^2 + \frac{3}{2} A'' \right). \quad (\text{A.18})$$

ANEXO B: CÓDIGO EN WOLFRAM MATHEMATICA 12.3 STUDENT EDITION,
PARA LA GRAFICACIÓN DE f , Φ , $V(\Phi)$, ρ , y VQM .

Solución en coordenadas conformes

Factor métrico $f(\xi)$

```
Factor métrico  $f(\xi)$  (coord. conformes)

(* *)  $\alpha = 1$ 

s1 = 1
s2 = 3
s3 = 5

f1 = (1 + (alpha * xi)^(2 * s1))^-1 / (2 * s1)
f2 = (1 + (alpha * xi)^(2 * s2))^-1 / (2 * s2)
f3 = (1 + (alpha * xi)^(2 * s3))^-1 / (2 * s3)

Plot[{f1, f2, f3}, {xi, -100, 100}, PlotRange -> {{-10, 10}, {0, 1.1}}, Frame -> True, LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"},
FrameLabel -> {"Factor métrico"}, AxesLabel -> {"xi", "f(xi)"}, PlotStyle -> {Dashing[{r]}]
```

Campo escalar $\phi(\xi)$

```
Campo escalar  $\phi(\xi)$  (coord. conformes)

(* *)  $\alpha = 1$ 

s1 = 1
s2 = 3
s3 = 5

phi01 = Sqrt[3 * (2 * s1 - 1)] / s1
phi02 = Sqrt[3 * (2 * s2 - 1)] / s2
phi03 = Sqrt[3 * (2 * s3 - 1)] / s3

phi1 = phi01 * ArcTan[(alpha * xi)^s1]
phi2 = phi02 * ArcTan[(alpha * xi)^s2]
phi3 = phi03 * ArcTan[(alpha * xi)^s3]

Plot[{phi1, phi2, phi3}, {xi, -20, 20}, PlotRange -> {{-15, 15}, {-3, 3}}, Frame -> True, LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"},
FrameLabel -> {"Campo escalar"}, AxesLabel -> {"xi", "phi(xi)"}]
```

Potencial de autointeracción $V(\phi)$

```

Potencial de autointeracción V(p)(coord. conformes)

α = 1

s1 = 1
s2 = 3
s3 = 5

λ = -6 * α^2

φ01 = Sqrt[3 + (2 s1 - 1)] / s1
φ02 = Sqrt[3 + (2 s2 - 1)] / s2
φ03 = Sqrt[3 + (2 s3 - 1)] / s3

φ1 = φ01 * ArcTan[(α * ξ) ^ s1]
φ2 = φ02 * ArcTan[(α * ξ) ^ s2]
φ3 = φ03 * ArcTan[(α * ξ) ^ s3]

V1 = 3 * (α^2) * Surd[(Sin[p / φ01]) ^ 0, 1] + ((2 s1 + 3 / 2) * (Cos[p / φ01]) ^ 2 - 2)
V2 = 3 * (α^2) * Surd[(Sin[p / φ02]) ^ 4, 3] + ((2 s2 + 3 / 2) * (Cos[p / φ02]) ^ 2 - 2)
V3 = 3 * (α^2) * Surd[(Sin[p / φ03]) ^ 8, 5] + ((2 s3 + 3 / 2) * (Cos[p / φ03]) ^ 2 - 2)

Plot[{V1, V2, V3}, {p, -3, 3}, Frame -> True, LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"}, Framelabel -> {"Potencial de autointeracción"},
AxesLabel -> {"φ", "V(φ)"}, PlotStyle -> {Dashing[r]}]

```

Densidad de energía $\rho(\xi)$

```

Densidad de energía (coord. conformes)

α = 1
β = 0

s1 = 1
s2 = 3
s3 = 5

f1 = (1 + (α * ξ) ^ (2 * s1)) ^ (-1 / (2 * s1))
f2 = (1 + (α * ξ) ^ (2 * s2)) ^ (-1 / (2 * s2))
f3 = (1 + (α * ξ) ^ (2 * s3)) ^ (-1 / (2 * s3))

Gtt1 = -(3 / (f1^2)) * ((D[f1, ξ, ξ] / f1) - β^2)
Gtt2 = -(3 / (f2^2)) * ((D[f2, ξ, ξ] / f2) - β^2)
Gtt3 = -(3 / (f3^2)) * ((D[f3, ξ, ξ] / f3) - β^2)

Plot[{Gtt1, Gtt2, Gtt3}, {ξ, -6, 6}, PlotRange -> {{-6, 6}, {-7, 8}}, Frame -> True, LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"},
Framelabel -> {"Densidad de energía"}, AxesLabel -> {"ξ", "ρ(ξ)"}, PlotStyle -> {Dashing[r]}]

```

Potencial mecánico-cuántico (VQM)

```
Potencial mecánico-cuántico VQM (coord. conformes)

α = 1

s1 = 1
s2 = 3
s3 = 5

f1 = (1 + (α * ξ) ^ (2 * s1)) ^ (-1 / (2 * s1))
f2 = (1 + (α * ξ) ^ (2 * s2)) ^ (-1 / (2 * s2))
f3 = (1 + (α * ξ) ^ (2 * s3)) ^ (-1 / (2 * s3))

VQM1 = (3 / 4) * (D[f1, ξ] ^ 2 / f1 ^ 2) + (3 / 2) * (D[f1, ξ, ξ] / f1)
VQM2 = (3 / 4) * (D[f2, ξ] ^ 2 / f2 ^ 2) + (3 / 2) * (D[f2, ξ, ξ] / f2)
VQM3 = (3 / 4) * (D[f3, ξ] ^ 2 / f3 ^ 2) + (3 / 2) * (D[f3, ξ, ξ] / f3)

Plot[{VQM1, VQM2, VQM3}, {ξ, -100, 100}, PlotRange -> {{-6, 6}, {-3.3, 2}}, Frame -> True, LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"},
FrameLabel -> {"Potencial mecánico-cuántico"}, AxesLabel -> {"ξ", "VQM(ξ)"}, PlotStyle -> {Dashing[{r}]}
```

Nueva solución en coordenadas de longitud propia

En las siguientes imágenes donde aparecen las soluciones A, para cada p, estas expresiones tienen subíndices que no corresponden al valor de p, sino que corresponden al orden en el que se fueron obteniendo. Así, A₁ es solución de p = 1, A₂ lo es para p = 3, A₃ para p = 5, y así sucesivamente.

Factor métrico f(r)

Para obtener esta solución se recurrió al factor warp A_p de Bazeia, pero luego se vio que este no servía para los enteros impares, por lo que tocó integrar la ecuación (A.13) para cada valor del parámetro p, y así obtener las soluciones específicas A(r).

```

Factor métrico (coord. longitud propia)

p1 = 1
p2 = 3
p3 = 5
p4 = 7

DSolve[D[Tanh[r/p1]*p1, r]^2 + 3 A''[r] == 0, A[r], r]
DSolve[D[Tanh[r/p2]*p2, r]^2 + 3 A''[r] == 0, A[r], r]
DSolve[D[Tanh[r/p3]*p3, r]^2 + 3 A''[r] == 0, A[r], r]
DSolve[D[Tanh[r/p4]*p4, r]^2 + 3 A''[r] == 0, A[r], r]

C1 = 0
C2 = 0
C3 = 0
C4 = 0
C5 = 0
C6 = 0
C7 = 0
C8 = 0

"Las soluciones Ap, de Bazeia, no sirven para enteros impares, por lo que toca integrar para los casos específicos p=1,3,5,7,...
y así obtener las soluciones A"

"La solución, para A[r], de las ecuaciones diferenciales, arroja los resultados aquí llamados A, con constantes de integración
que han sido anuladas manualmente, con el propósito de graficar las funciones de A: los factores métricos"

A1 = C1 + r C2 - (2/9) Log[Cosh[r]] + (Sech[r]^2)/18
A2 = C3 + r C4 + (1/70) (-12 Log[Cosh[r/3]] - 13 Sech[r/3]^2 + 6 Sech[r/3]^4 - Sech[r/3]^6) - (3/35) Tanh[r/3]^4
A3 = C5 + r C6 - (1/3564) (-120 Log[Cosh[r/5]] + 270 Sech[r/5]^2 - 240 Sech[r/5]^4 + 140 Sech[r/5]^6 - 45 Sech[r/5]^8 + 6 Sech[r/5]^10) - (25/297) Tanh[r/5]^10
A4 =
C7 + r C8 - (1/35100) (-840 Log[Cosh[r/7]] + 2730 Sech[r/7]^2 - 3780 Sech[r/7]^4 + 3850 Sech[r/7]^6 - 2625 Sech[r/7]^8 + 1134 Sech[r/7]^10 - 288 Sech[r/7]^12 + 30 Sech[r/7]^14) -
(49/585) Tanh[r/7]^14

M1 = Exp[A1]
M2 = Exp[A2]
M3 = Exp[A3]
M4 = Exp[A4]

Plot[{M1, M2, M3, M4}, {r, -100, 100}, PlotRange -> {{(-70, 70), {0, 1.1}}, Frame -> True, LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"},
FrameLabel -> {"Factor métrico"}, AxesLabel -> {"r", "M(r)"}, PlotStyle -> {Dashing[{r]}]}

```

Campo escalar $\phi(r)$

```

Campo escalar  $\phi(r)$  (coord. longitud propia)

In[1]:= p1 = 1
        p2 = 3
        p3 = 5
        p4 = 7

         $\phi1 = (\text{Tanh}[r / p1])^{\wedge}p1$ 
           |Tangente hiperbólica
         $\phi2 = (\text{Tanh}[r / p2])^{\wedge}p2$ 
           |Tangente hiperbólica
         $\phi3 = (\text{Tanh}[r / p3])^{\wedge}p3$ 
           |Tangente hiperbólica
         $\phi4 = (\text{Tanh}[r / p4])^{\wedge}p4$ 
           |Tangente hiperbólica

Plot[{ $\phi1$ ,  $\phi2$ ,  $\phi3$ ,  $\phi4$ }, {r, -100, 100}, PlotRange -> {{-20, 20}, {-1.1, 1.1}}, Frame -> True, LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"},
|representación gráfica |rango de representación |marco |estilo |estilo de etiqueta |familia de tipo de letra
FrameLabel -> {"Campo escalar"}, AxesLabel -> {" $\phi$ ", " $\phi(r)$ "}, PlotStyle -> {Dashing[r]}
|etiqueta de marco |etiqueta de ejes |estilo de línea |especificación de rayado

```

Potencial de autointeracción $V(\phi)$

```

Potencial de autointeracción  $V(\phi)$ 

In[2]:= Clear[A1,A2,A3,A4,V1,V2,V3,V4,r1,r2,r3,r4,V1,V2,V3,V4]

p1=1
p2=3
p3=5
p4=7

C1=0
C2=0
C3=0
C4=0
C5=0
C6=0
C7=0
C8=0

"Se toman las soluciones  $\phi$ , previamente calculadas con el DSolve, para el factor métrico"
A1=C1+r1 C2 -  $\frac{2}{9} \log[\text{Cosh}[r1]] + \frac{\text{Sech}[r1]^2}{18}$ 
A2=C3+r2 C4 +  $\frac{8}{70} (-12 \log[\text{Cosh}[\frac{r2}{3}]] - 15 \text{Sech}[\frac{r2}{3}]^2 + 6 \text{Sech}[\frac{r2}{3}]^4 - \text{Sech}[\frac{r2}{3}]^6) - \frac{8}{35} \text{Tanh}[\frac{r2}{3}]^6$ 
A3=C5+r3 C6 -  $\frac{8}{35} (120 \log[\text{Cosh}[\frac{r3}{5}]] + 270 \text{Sech}[\frac{r3}{5}]^2 - 240 \text{Sech}[\frac{r3}{5}]^4 - 140 \text{Sech}[\frac{r3}{5}]^6 - 45 \text{Sech}[\frac{r3}{5}]^8 + 6 \text{Sech}[\frac{r3}{5}]^{10}) - \frac{25}{157} \text{Tanh}[\frac{r3}{5}]^{10}$ 
A4=C7+r4 C8 -  $\frac{7}{3520} (840 \log[\text{Cosh}[\frac{r4}{7}]] + 2730 \text{Sech}[\frac{r4}{7}]^2 - 3780 \text{Sech}[\frac{r4}{7}]^4 + 3858 \text{Sech}[\frac{r4}{7}]^6 - 2625 \text{Sech}[\frac{r4}{7}]^8 + 1134 \text{Sech}[\frac{r4}{7}]^{10} - 280 \text{Sech}[\frac{r4}{7}]^{12} - 30 \text{Sech}[\frac{r4}{7}]^{14}) - \frac{49}{105} \text{Tanh}[\frac{r4}{7}]^{14}$ 

V1=- (3/2) (D[A1,r1])^2 + (4+ (D[A1,r1])^2)
V2=- (3/2) (D[A2,r2])^2 + (4+ (D[A2,r2])^2)
V3=- (3/2) (D[A3,r3])^2 + (4+ (D[A3,r3])^2)
V4=- (3/2) (D[A4,r4])^2 + (4+ (D[A4,r4])^2)

r1=p1ArcTanh[Sqrt[a,p1]]
r2=p2ArcTanh[Sqrt[a,p2]]
r3=p3ArcTanh[Sqrt[a,p3]]
r4=p4ArcTanh[Sqrt[a,p4]]

Va=V1
Vb=V2
Vc=V3
Vd=V4

Plot[{Va,Vb,Vc,Vd}, {a, -100, 100}, PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-0.5, 0.5}}, Frame -> True, LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"},
FrameLabel -> {"Potencial de autointeracción"}, AxesLabel -> {"a", "V(a)"}, PlotStyle -> {Dashing[r]}

```

Densidad de energía $\rho(r)$

```

Densidad de energía  $\rho(r)$  (coord. longitud propia)

Clear[A1, A2, A3, A4]
beta = 1
beta = 0

C1 = 0
C2 = 0
C3 = 0
C4 = 0
C5 = 0
C6 = 0
C7 = 0
C8 = 0

A1 = C1 + r C2 -  $\frac{2}{9} \log[\text{Cosh}[r]] + \frac{\text{Sech}[r]^2}{18}$ 
A2 = C3 + r C4 +  $\frac{1}{70} \left( -12 \log\left[\text{Cosh}\left[\frac{r}{3}\right]\right] - 15 \text{Sech}\left[\frac{r}{3}\right]^2 + 6 \text{Sech}\left[\frac{r}{3}\right]^4 - \text{Sech}\left[\frac{r}{3}\right]^6 \right) - \frac{3}{35} \text{Tanh}\left[\frac{r}{3}\right]^6$ 
A3 = C5 + r C6 -  $\frac{5 \left( 120 \log\left[\text{Cosh}\left[\frac{r}{4}\right]\right] + 270 \text{Sech}\left[\frac{r}{4}\right]^2 - 240 \text{Sech}\left[\frac{r}{4}\right]^4 + 140 \text{Sech}\left[\frac{r}{4}\right]^6 - 45 \text{Sech}\left[\frac{r}{4}\right]^8 + 6 \text{Sech}\left[\frac{r}{4}\right]^{10} \right)}{3564} - \frac{25}{297} \text{Tanh}\left[\frac{r}{4}\right]^{10}$ 
A4 =
C7 + r C8 -
 $\frac{1}{35100} \left( 840 \log\left[\text{Cosh}\left[\frac{r}{7}\right]\right] + 2730 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^2 - 3780 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^4 + 3850 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^6 - 2625 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^8 + 1134 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^{10} - 280 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^{12} + 30 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^{14} \right) -$ 
 $\frac{49}{585} \text{Tanh}\left[\frac{r}{7}\right]^{14}$ 

Gtt1 = (3 + D[A1, r, r]) + (6 * (D[A1, r])^2) - ((3 / Exp[2 + A1]) + beta^2)
Gtt2 = (3 + D[A2, r, r]) + (6 * (D[A2, r])^2) - ((3 / Exp[2 + A2]) + beta^2)
Gtt3 = (3 + D[A3, r, r]) + (6 * (D[A3, r])^2) - ((3 / Exp[2 + A3]) + beta^2)
Gtt4 = (3 + D[A4, r, r]) + (6 * (D[A4, r])^2) - ((3 / Exp[2 + A4]) + beta^2)

Plot[{-Gtt1, -10 + Gtt2, -10 + Gtt3, -10 + Gtt4}, {r, -100, 100}, PlotRange -> {{-15, 15}, {-0.5, 1.1}}, Frame -> True,
LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"}, FrameLabel -> {"Densidad de energía"}, AxesLabel -> {"r", "rho(r)"}, PlotStyle -> {Dashing[r]}]

```

Potencial mecánico-cuántico (VQM)

```

Potencial mecánico-cuántico (coord. longitud propia)

In[1]:= Clear[r]
]out[
C1 = 0
C2 = 0
C3 = 0
C4 = 0
C5 = 0
C6 = 0
C7 = 0
C8 = 0

A1 = C1 + r C2 -  $\frac{2}{9} \text{Log}[\text{Cosh}[r]] + \frac{\text{Sech}[r]^2}{18}$ 

A2 = C3 + r C4 +  $\frac{1}{70} \left( -12 \text{Log}\left[\text{Cosh}\left[\frac{r}{3}\right]\right] - 15 \text{Sech}\left[\frac{r}{3}\right]^2 + 6 \text{Sech}\left[\frac{r}{3}\right]^4 - \text{Sech}\left[\frac{r}{3}\right]^6 \right) - \frac{3}{35} \text{Tanh}\left[\frac{r}{3}\right]^4$ 

A3 = C5 + r C6 -  $\frac{1}{3564} \left( 5 \left( 120 \text{Log}\left[\text{Cosh}\left[\frac{r}{5}\right]\right] + 270 \text{Sech}\left[\frac{r}{5}\right]^2 - 240 \text{Sech}\left[\frac{r}{5}\right]^4 + 140 \text{Sech}\left[\frac{r}{5}\right]^6 - 45 \text{Sech}\left[\frac{r}{5}\right]^8 + 6 \text{Sech}\left[\frac{r}{5}\right]^{10} \right) - \frac{25}{297} \text{Tanh}\left[\frac{r}{5}\right]^{10} \right)$ 

A4 =
C7 + r C8 -
 $\frac{1}{35100} \left( 7 \left( 840 \text{Log}\left[\text{Cosh}\left[\frac{r}{7}\right]\right] + 2730 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^2 - 3780 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^4 + 3850 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^6 - 2625 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^8 + 1134 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^{10} - 280 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^{12} + 30 \text{Sech}\left[\frac{r}{7}\right]^{14} \right) - \frac{49}{585} \text{Tanh}\left[\frac{r}{7}\right]^{14} \right)$ 

VQM1 = Exp[2 * A1] * ((15/4) * D[A1, r]^2) + ((3/2) * D[A1, r])
VQM2 = Exp[2 * A2] * ((15/4) * D[A2, r]^2) + ((3/2) * D[A2, r])
VQM3 = Exp[2 * A3] * ((15/4) * D[A3, r]^2) + ((3/2) * D[A3, r])
VQM4 = Exp[2 * A4] * ((15/4) * D[A4, r]^2) + ((3/2) * D[A4, r])

*La edo es la ecuación diferencial que resulta de la relación entre las coordenadas adicionales, conforme (ξ) y de longitud propia (r), y el factor métrico: dξ/dr = 1/F*

edo1 = ξ'[r] == Exp[-A1]
edo2 = ξ'[r] == Exp[-A2]
edo3 = ξ'[r] == Exp[-A3]
edo4 = ξ'[r] == Exp[-A4]

sol1 = NDSolve[{edo1, ξ[1] == 1}, ξ, {r, -100, 100}]
sol2 = NDSolve[{edo2, ξ[1] == 1}, ξ, {r, -100, 100}]
sol3 = NDSolve[{edo3, ξ[1] == 1}, ξ, {r, -100, 100}]
sol4 = NDSolve[{edo4, ξ[1] == 1}, ξ, {r, -100, 100}]

ParametricPlot[{{(ξ /. First[sol1])[r], 50 * VQM1}, {(ξ /. First[sol2])[r], 1000 * VQM2}, {(ξ /. First[sol3])[r], 2000 * VQM3},
{(ξ /. First[sol4])[r], 3000 * VQM4}}, {r, -30, 30}, PlotRange -> {{-50, 50}, {-30, 15}}, Frame -> True, LabelStyle -> {FontFamily -> "Arial"},
FrameLabel -> {"Potencial mecánico-cuántico"}, AxesLabel -> {"ξ(r)", "VQM(ξ(r))"}, PlotStyle -> {Dashing[r]}]
Show[%1177, ImageSize -> Large]

```



esPOCH

Dirección de Bibliotecas y
Recursos del Aprendizaje

**UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y
DOCUMENTAL**

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 27 / 04 / 2022

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: <i>Javier Alejandro Barrazueta Salazar</i>
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: <i>Ciencias</i>
Carrera: <i>Física</i>
Título a optar: <i>Biofísico</i>
f. Analista de Biblioteca responsable: <i>Ing. Leonardo Medina Ñuste MSc.</i>

LEONARDO
FABIO MEDINA
NUSTE

Firmado digitalmente por LEONARDO
FABIO MEDINA NUSTE
Nombre de reconocimiento (DN): c=EC,
o=BANCO CENTRAL DEL ECUADOR,
ou=ENTIDAD DE CERTIFICACION DE
INFORMACION-ECIBCE, I=QUITO,
serialNumber=0000621485,
cn=LEONARDO FABIO MEDINA NUSTE
Fecha: 2022.04.27 09:37:20 -05'00'



0706-DBRA-UTP-2022