ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROUWER EN TOPOLOGÍA Y SU APLICACIÓN EN EL ANÁLISIS DE LA EXISTENCIA DE DISTRIBUCIONES DE EQUILIBRIO DE PRECIOS EN UNA ECONOMÍA DE INTERCAMBIO PURO

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTORA: EVELYN ELIZABETH PILACHANGA TOAZA
DIRECTOR: Msc. CARLOS EDUARDO COVA SALAYA

Riobamba – Ecuador

2023

Yo, EVELYN ELIZABETH PILACHANGA TOAZA, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.
Como autora asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular. El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 06 de abril de 2023

Evelyn Elizabeth Pilachanga Toaza
055028649-6

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROUWER EN TOPOLOGÍA Y SU APLICACIÓN EN EL ANÁLISIS DE LA EXISTENCIA DE DISTRIBUCIONES DE EQUILIBRIO DE PRECIOS EN UNA ECONOMÍA DE INTERCAMBIO PURO**, realizado por la señorita: **EVELYN ELIZABETH PILACHANGA TOAZA**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
Mat. Luis Marcelo Cortez Bonilla **PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**		2023-04-06
Msc. Carlos Eduardo Cova Salaya **DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2023-04-06
Msc. Ramón Antonio Abancín Ospina **ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2023-04-06

DEDICATORIA

A mi madre, Mariana Toaza, por ser mi gran inspiración, mi consejera de vida y sobre todo ser mi ejemplo de fortaleza, dedicación, amor y constancia. A mis hermanos, Benito, Darwin y Klever, quienes con sus enseñanzas han sido un pilar fundamental en el transcurso de mi vida. A mis cuñadas, Mercedes, Mireya y Anita que me han acompañado en el transcurso de mis estudios universitarios. A mi mejor amigo, Christopher, que nos hemos acompañado, aconsejado y trabajado la vida universitaria al mismo tiempo y hoy estamos cumpliendo una meta más. Finalmente a mis sobrinos, Ronal, Iris, Francis, Winston, Alicia, por enseñarme a no olvidar sonreír en los malos momentos.

Evelyn

AGRADECIMIENTO

Profundo agradecimiento a Dios, quien me dio la fuerza y sabidura para poder culminar la carrera con éxito. De manera especial un agradecimiento al Msc. Carlos Cova, tutor de la presenta investigación, por su tiempo y ayuda absoluta al impartir los conocimientos teóricos y metodología necesarias para completar el trabajo.

Evelyn

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO V

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

La rama de la microeconomía de la teoría del equilibrio general intenta brindar una explicación integral del comportamiento de la producción, el consumo y la fijación de precios en una economía con uno o más mercados. Para lograr el equilibrio, las preferencias de los consumidores deben ser continuas, acumulativas e integradas, por lo que a menudo se basan en teorías de punto fijo, como la teoría de punto fijo de Brouwer, para probar la existencia de equilibrio. El presente trabajo de titulación tuvo por objetivo estudiar el teorema de punto fijo de Brouwer en topología y su utilidad en el análisis de existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro; la investigación es de diseño documental con carácter descriptivo y enfoque cualitativo no interactivo, que genero documento referencial del tópico. Donde se tiene temas seleccionados de la Topología para realizar la demostración del teorema, posterior a ello empezar con la aplicación en la área de economía, en donde podemos observar que dicho teorema sirve para la demostración de la existencia de distribuciones de equilibrio de precios, dicho de otra manera que exista un equilibrio. Se recomienda ampliar el estudio, debido que la demostración garantiza la existencia de un equilibrio, pero no nos garantiza la forma de encontrarlo.

Palabras clave: <TOPOLOGÍA>, <TEOREMA DE PUNTO FIJO>, <TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROUWER>, <EQUILIBRIO DE PRECIOS>, <INTERCAMBIO PURO>.

0783-DBRA-UTP-2023

ABSTRACT

The microeconomics branch of general equilibrium theory attempts to provide a comprehensive explanation of the behavior of production, consumption and pricing in an economy with one or more markets. To achieve equilibrium, consumer preferences must be continuous, cumulative, and integrated, so it often relies on fixed-point theory, such as Brouwer's fixed-point theory, to prove the existence of equilibrium. The aim of this degree work was to study Brouwer's fixed point theorem in topology and its usefulness in the analysis of the existence of equilibrium price distributions in a pure exchange economy. The research is of documentary design with descriptive character and non-interactive qualitative approach that generated the referential document of the subject. This document contains selected topics of Topology to demonstrate the theorem, to continue with the application in the area of economics. Here, we can realize that the theorem is used to prove the existence of equilibrium price distributions, in other words, there is an equilibrium. It is recommended to extend the study, because the demonstration guarantees the existence of an equilibrium, but it does not guarantee the way to find it.

Keyword: <TOPOLOGY>, <FIXED POINT THEOREM>, <BROUWER'S FIXED POINT THEOREM>, <PRICE EQUILIBRIUM>, <PURE EXCHANGE>.

Dra. Nanci M. Inca Ch. Mgs.
0602926719

INTRODUCCIÓN

El teorema del punto fijo de Brouwer brinda las condiciones necesarias para garantizar la existencia de puntos x tales que $f(x) = x$, donde f es una función definida en un espacio topológico en sí mismo que tiene la propiedad de punto fijo. Esta propiedad establece que cada función continua definida en el espacio tiene un punto fijo.

La teoría de puntos fijos no solo se centra en el análisis matemático, sino que tiene aplicaciones en las ciencias en general y se utiliza para demostrar la existencia de soluciones de equilibrio.

Los modelos de economía de intercambio puro están determinados por la oferta y la demanda, esto es; *A mayor demanda que oferta, de un producto; su precio sube. A exceso de oferta y poca demanda, el precio baja*. El problema es determinar si existe una selección de precios que equilibre la oferta y demanda, un punto de equilibrio donde los precios se mantengan estables y así todos consumidores estén satisfechos con su stock particular de productos.

El trabajo está dirigido a divulgar en estudiantes de economía y matemática la aplicación de una teoría de punto fijo, como el teorema de punto fijo de Brouwer para resolver el problema de la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro; en donde el lector pueda encontrar temas específicos de Topología que servirá para la demostración del teorema antes mencionado con el fin de demostrar, como el conocido teorema de punto fijo de Brower de la teoría del punto fijo, establece la existencia de tales equilibrios económicos.

El trabajo de titulación que se propone es de investigación documental y se generará un documento como Anexo siendo parte del Marco de resultados y discusión; donde describe la teoría matemática del teorema de punto fijo de Brouwer en topología y su aplicación en el análisis de la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

1.1.1. *Enunciado del problema*

Estudiar el teorema de punto fijo de Brouwer en topología y su utilidad en el análisis de existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro; a fin de producir un documento referencial del tópico.

1.2. Justificación

Dando cumplimiento a la malla actual vigente de la carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), se realiza el siguiente trabajo como parte de la asignatura Trabajo de Integración Curricular con el tema **Teorema de punto fijo de Brouwer en topología y su aplicación en el análisis de la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro**, con el fin de aportar con un documento referencial para los estudiantes de economía y matemática, puesto que en el transcurso de los Periodos Académicos Ordinarios (PAO$'s$) de la carrera, se vio el curso de matemática teórica en particular en topología y muy poca la aplicada en otras áreas, por ello se pretende realizar un documento donde se presente tópicos específicos de la topología aplicado a un tema de la economía.

1.3. Objetivos

1.3.1. *Objetivo general*

Generar un documento referencial, para estudiantes de las carreras de Economía y Matemática, en el cual se analice el teorema de punto fijo de Brouwer y su aplicación al estudio de la existencia de distribuciones de precios en una economía de intercambio puro.

1.3.2. *Objetivos específicos*

- Estudiar del teorema de punto fijo de Brouwer.
- Estudiar de la teoría de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro.

- Entender del uso del teorema de punto fijo de Brouwer en la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Referencias teóricas

El Teorema de Punto Fijo de Brouwer es un teorema matemático importante que ha tenido numerosas aplicaciones en campos como la topología, la economía y la teoría de juegos. Los teoremas de punto fijo establecen condiciones sobre una función f entre espacios topológicos para determinar la existencia de sus puntos fijos.

Teorema de punto fijo. Una función f sobre un dominio dado tiene un punto fijo, es decir, tiene un punto x de dicho dominio de manera que $f(x) = x$.

Algunos ejemplos de teorema son: el teorema de punto fijo de Banach en análisis, los teoremas de punto fijo para funciones con propiedades especiales en espacios métricos y espacios de Banach, y en particular de nuestro interés, el teorema de punto fijo de Brouwer en espacios topológicos.

Teorema de punto fijo de Brouwer. Sea f una función continua de la bola unitaria cerrada B^n de un espacio euclídeo en sí misma, entonces existe un punto x en B^n tal que $f(x) = x$.

En particular en nuestro interés es de dos dimensiones

Teorema de punto fijo de Brouwer para discos. Si $f : B^2 \to B^2$ es continua entonces existe un punto $x \in B^2$ tal que $f(x) = x$.

La modelación económica formal hace uso de herramientas matemáticas desde las rudimentarias hasta las más sofisticadas para explicar el comportamiento, las conexiones y la relación entre las variables ajenas o inmersas al modelo.

Un modelo económico. Es una representación simplificada de un proceso o fenómeno económico.

Intercambio puro. Es cuando los agentes (individuos particulares con capacidad de tomar decisiones) van a un mercado a intercambiar sus bienes, que previamente han sido producidos, aunque la producción no está tomada en cuenta.

La teoría del equilibrio general. Es un modelo de la rama de microeconomía que estudia la interacción y punto de equilibrio (es aquel nivel de ventas mínimo que igual a los costos totales a los ingresos totales) entre los distintos mercados de una economía. (Nicholson, 2008)

Desde el inicio de las civilizaciones, la economía se ha presentado de diversas formas; un claro ejemplo es el truque o también llamado intercambio puro donde (García, 2019) dice que ¨la manera más intuitiva de interpretar este modelo es considerar que los agentes van a un mercado a intercambiar sus bienes, que previamente han sido producidos, aunque la producción no está recogida por el modelo¨.

El modelo de una economía de intercambio puro es la base de la teoría del equilibrio general, que tiene como objetivo determinar como se distribuyen los bienes entre los diferentes agentes económicos.

Mostraremos en este trabajo como el teorema de punto fijo de Brouwer puede ser aplicado para probar la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro; para ello se escribió tres capítulos:

- Capítulo 1: El propósito en este capítulo es mostrar los preliminares sobre Espacios Topológicos donde muestraremos definiciones, lemas, proposiciones, ejemplos y teoremas de siete temas especificos que son: Topología, Conjuntos Abiertos y Cerrados, Funciones continuas, Homeomorfismo, Espacios Conexos, Espacios métricos y el Teorema del valor intermedio; los cuales serviran para la demostración del teorema de punto fijo de Brouwer.

- Capítulo 2: El objetivo que tiene este capítulo es demostrar el teorema de punto fijo de Brouwer para dos dimensiones, para realizar dicha demostración se utilizaran conceptos y resultados propios de Topología Algebraica, como son: el concepto de retracción y el teorema de no retracción.

- Capítulo 3: Estará dedicado al problema de la existencia de distribuciones de precios en una economía de intercambio puro, como una aplicación del teorema de punto fijo de Brouwer. Así que, se definirán los conceptos económicos de Modelo, Intercambio puro y Teoría del equilibrio general y finalmente demostraremos usando el teorema de punto fijo de Brouwer, la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

La investigación que se propone es de tipo cualitativo no interactivo con alcance descriptivo, que busca generar un documento que sirva de referencia a estudiantes de economía y matemática, para divulgar la aplicación de una teoría de punto fijo, por lo tanto se utilizarán estrategias de organización y recuperación de información adecuadas, eficientes y apropiadas. La fuente serán libros de texto, artículos y tesis.

Para satisfacer los objetivos de esta investigación se propone las siguientes actividades:

- Obtención y revisión del material bibliográfico.
- Lectura y comprensión de los espacios topológicos.
- Revisión del teorema de punto fijo de Brouwer.
- Comprensión del teorema de punto fijo de Brouwer.
- Revisión y entendimiento del tópico de distribuciones de equilibrio de precios en economía.
- Aplicación del teorema de punto fijo de Brouwer para el análisis de la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economia de intercambio puro.
- Escritura de los conceptos estudiados.

3.1. Tipo de investigación

Este estudio tiene un diseño de investigación documental, donde revisamos fuentes bibliográficas especializadas a la temática tales como (matemática y economía) textos, libros, artículos, tesis y documentos todos disponibles en internet.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Resultado

Esta investigación de diseño documental con carácter descriptivo y enfoque cualitativo no interactivo, generó como resultado un documento referencial titulado ‟Teorema de punto fijo de Brouwer en topología y su aplicación en el análisis de la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro″. Donde los estudiantes podrán encontrar tres capítulos el primero que lleva como nombre Espacios topológicos, el segundo Teorema de punto fijo de Brouwer y demostración, finalmente el tercero Aplicación. Recordando que los estudiantes tendrán que tener conocimientos previos para revisar el documento, ya que los temas mostrados en cada capítulo fueron seleccionados del tópico general de la Topología que claramente luego son utilizados para realizar la demostración del teorema de punto fijo de Brouwer y con ello realizar la aplicación en un área fuera de las matemáticas.

4.2. Discusión

Con metodología propuesta obtuvimos definiciones importantes dentro del campo de las matemáticas (más especifico de la topología) como también de la economía, con base a ello realizamos tres capítulos, el primero contiene preliminares sobre espacios topológicos donde los temas tratos fueron detenidamente escogidos, debido a que conlleva al entendimiento de la demostración del teorema de punto fijo de Brouwer, el cual da paso al segundo capítulo donde la Topología Algebraica es parte de dicha demostración, así finalmente llegamos al tercer capítulo en el que presentamos la oferta y la demanda que deben tener los productos para poder realizar el análisis de la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro, y que en dicho análisis se hace uso el teorema de punto fijo de Brouwer; con lo expuesto damos cumplimento a los objetivos específicos como también al objetivo general de esta investigación.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

- Mediante el estudio del teorema de punto fijo de Brouwer, podemos mencionar que para llegar a la demostración de dicho teorema en dimensión 2 se debe tener conocimiento sobre la topología y la topología algebraica, debido a que dichas materias abarca un contenido necesario para el desarrollo y comprensión del mismo.

- La teoría de equilibrio es una herramienta indispensable para poder responder a ciertas preguntas de la Economía, puesto que explica el comportamiento, la interacción y el equilibrio entre los distintos mercados de la economía.

- La evidencia que presentamos anteriormente demuestro que el estudio del teorema de punto fijo de Brouwer, se lo presenta en varios casos de la ingeniería y en otras áreas y su demostración llevada tanto en análisis como en topología, como se los muestra en el documento guía.

- Podemos destacar que se trata de un trabajo donde muestra un tema especifico de la topología aplicado a una área de la economía, que sirve para los estudiantes que desean abordar conocimiento del tema expuesto y con ello su aplicación.

RECOMENDACIONES

- Para ampliar el conocimiento de la teoría del punto fijo, revisar los temas de la topología algebraica en dimensiones mayores a 2.
- Luego de trabajar con el tema de punto fijo de Brouwer en dos dimensiones y utilizarlo para la aplicación se recomienda revisar el teorema para dimensión mayor a 2 y luego probar el resultado en la aplicación expuesta o en una distinta.
- Se recomienda ampliar el estudio, debido que la demostración garantiza la existencia de un equilibrio, pero no nos garantiza la forma de encontrarlo.

BIBLIOGRAFÍA

BARGE, H.& ZAMORA, A. *Topología* [en línea]. Madrid: Sanz y Torres, 2021. [Consulta: 15 octubre 2022]. Disponible en https://books.google.com.ec/books?id=e6iAEAAAQBAJ&pg=PA44&dq=topología&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwj9jOnZgMX8AhV0SzABHcY3Cko4ChDoAXoECAgQAg#v=onepage&q=topología&f=false

DUGUNGJI, James. *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1966.

GARCÍA, D. Teoremas del punto fijo y aplicaciones. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad de Barcelona, Matemáticas e Informática. Barcelona. 2020. pp. 1-48. [Consulta: 02 mayo 2022]. Disponible en http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/164998/2/164998.pdf.

GARCÍA, M. Una aplicación de la teoría del punto fijo a la teoría económica. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad autónoma del estado de México, Ciencias. México 2019. pp.1-59. [Consulta: 02 julio 2022]. Disponible en https://repositorioslatinoamericanos.uchile.cl/handle/2250/3094488

HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

KOSNIOWSKI, C. *Topología Algebraica* [en línea]. Barcelona- España: Reverté, 2021. [Consulta: 03 diciembre 2022]. Disponible en https://books.google.com.ec/books?id=vuAbEAAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=introduccion+a+la+topologia+algebraica&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwi0lPSp-cT8AhWGTTABHVXXCVM4ChDoAXoECAkQAg#v=onepage&q=introduccion%20a%20la%20topologia%20algebraica&f=false

MACHO, Marta. *Topología General*. Marta Macho Stadler, 2002.

MASSEY, W. *Introducción a la topología algebraica* [en línea]. Barcelona: Reverté, 1982. [Consulta: 25 septiembre 2022]. Disponible en https://books.google.com.ec/books?id=GsSvt-KcUi8C&printsec=frontcover&dq=introduccion+a+la+topologia+algebraica&hl=es&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=introduccion%20a%20la%20topologia%20algebraica&f=false

MEDINA, S. Teoremas de punto fijo para multifunciones y aplicacón al equilibrio walrasiano. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Prosgrado) Universidad de Murcia. Murcia. 2009. pp. 1-83 [Consulta: 06 julio 2022]. Disponible en https://webs.um.es/beca/Investigacion/SergioMaster.pdf

MORALES, J. La teoría del punto fijo para un par de funciones. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad de los Andes, Ciencias, Departamento de Matemáticas. Colombia. 2006. pp. 1-90 [Consulta: 13 junio 2022]. Disponible en https://docplayer.es/23634673-La-teoria-del-punto-fijo-para-un-par-de-funciones.html

MUNKRES, J. *Topology* [en línea]. Madrid-España: Prentice Hall, 2000. 2nd ed. [Consulta: 11 mayo 2022]. Disponible en https://psm73.files.wordpress.com/2009/11/topologia-munkres.pdf

MUÑOZ, J. *Topología Básica* [en línea]. Bogotá-Colombia: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Física y Naturales, 2003. [Consulta: 11 agosto 2022]. Disponible en file:///C:/Users/USER_HP/Downloads/ACCEFVN-AC-spa-2003-Topología20básica..pdf

NICHOLSON, Wilsom. *Teoría microecoómica. Principios básicos y aplicaciones*. México: Cengage Learning, 2008.

LIPSCHUTZ, Simons. *Topología General*. Colombia: McGraw Hill, 1970.

ORDOÑES, D. Una aplicación de lógica modal a la teoría del equilibrio general. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad de los Andes, Ciencias, Departamento de Matemáticas. Colombia. 2008. pp. 1-51. [Consulta: 06 junio 2022]. Disponible en https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/24229/u365015.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

PRIETO, Carlos. *Topología Básica*. Ediciones Cientificas Universitarias, 2012. Vol. 1, pág. 677.

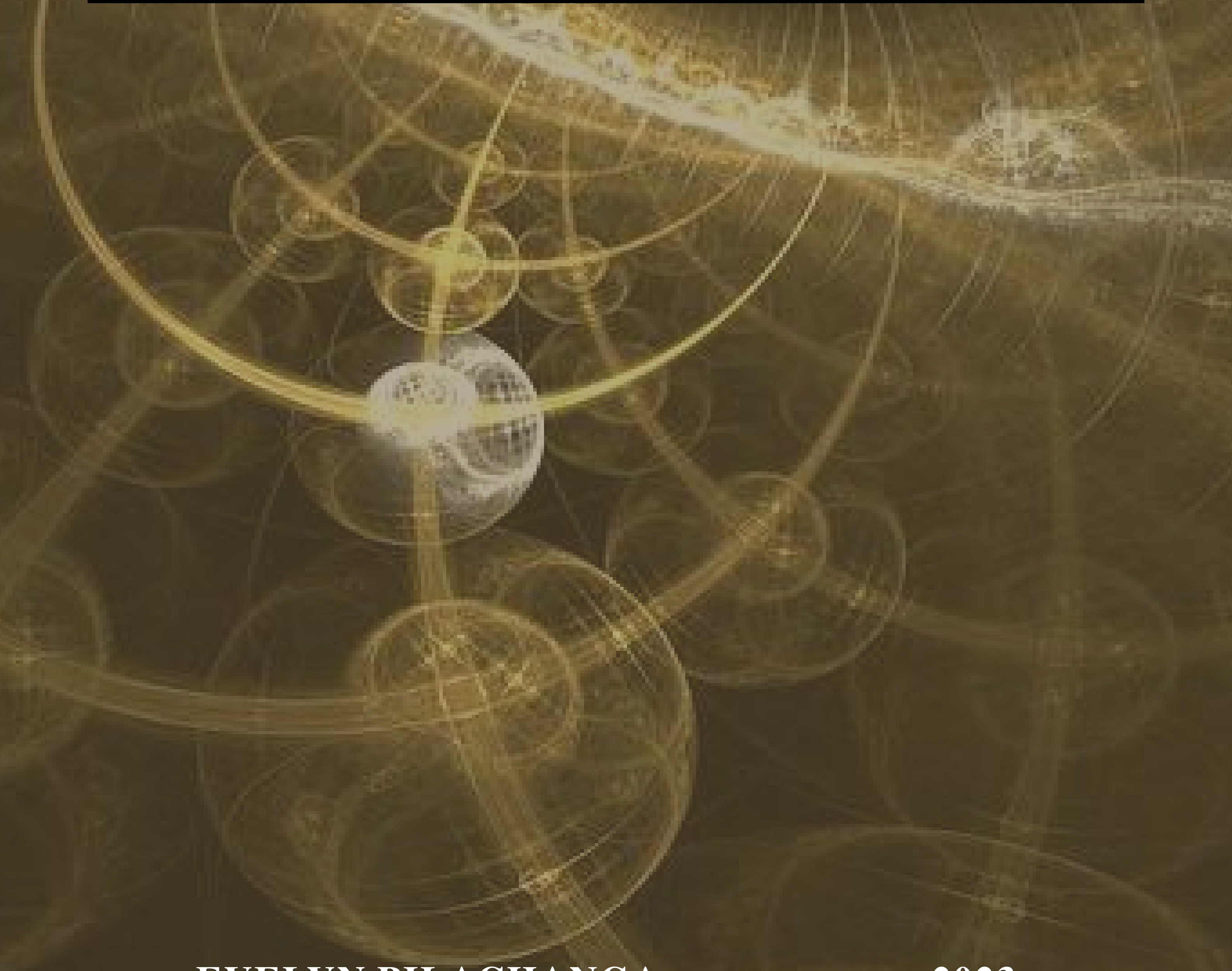
RUBIANO, G. *Topología Gneral* [en línea]. Bogotá-Colombia: Universidad Nacinal de Colombia, 2000. [Consulta: 15 agosto 2022]. Disponible en https://books.google.com.ec/books?id=lVsff1JINwYC&printsec=frontcover&dq=introduccion+a+la+topologia+algebraica&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwiUmNq5-8T8AhUVQjABHc3FDw84FBDoAXoECAgQAg#v=onepage&q=introduccion%20a%20la%20topologia%20algebraica&f=false

SIMMONS, G. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Tokyo: McGraw-Hill/Kogakusha, 1963.

ANEXOS

ANEXO A: DOCUMENTO REFERENCIAL: "TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROUWER EN TOPOLOGÍA Y SU APLICACIÓN EN EL ANÁLISIS DE LA EXISTENCIA DE DISTRIBUCIONES DE EQUILIBRIO DE PRECIOS EN UNA ECONOMÍA DE INTERCAMBIO PURO".

TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROUWER EN TOPOLOGÍA Y SU APLICACIÓN EN EL ANÁLISIS DE LA EXISTENCIA DE DISTRIBUCIONES DE EQUILIBRIO DE PRECIOS EN UNA ECONOMÍA DE INTERCAMBIO PURO



EVELYN PILACHANGA 2023

TABLA DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

La teoría del equilibrio general rama de microeconomía, intenta dar una explicación completa del comportamiento de la producción, el consumo y la formación de precios en una economía con uno o más mercados. Para garantizar que exista el equilibrio, las preferencias de los consumidores deben ser continuas, ascendentes y convexas y, por esta razón, para probar la existencia del equilibrio, a menudo se basan en teorías de punto fijo como la teoría de punto fijo de Brouwer.

A finales del siglo XIX la teoría del punto fijo fue iniciada por el matemático Henri Poincaré, el cual realizó una publicación llamada Analysis situs en la que decía que para comprender mejor las ecuaciones diferenciales, es necesario conocer *las propiedades invariantes de una figura cuando se la deforma de cuaquier manera continua y sin rasgaduras* (García, 2020, [G20]). Sin embargo, durante el siglo siguiente, varios matemáticos les llama la atención acerca del tema en los cuales destacan Luitzen Egbertus Jan Brouwer, E. Sperner, S. Kakutani, S. Banach, quienes realizaron distintas aportaciones en la teoría del Punto fijo, ya que dicha teoría es una amplia familia de teoremas, debido a que su contenido tiene una mezcla de análisis, topología y geometría; Luitzen. E. J. Brouwer nació el 27 de febrero de 1881 en la localidad de Overseas, Países Bajos; en 1897, ingresó a la Universidad de Amsterdam, donde estudió matemáticas durante los siguientes siete años. Brouwer pronto dominó las matemáticas contemporáneas y obtuvo nuevos resultados con respecto al movimiento continuo en variedades. Su actividad matemática incluye la topología, el mapeo y la lógica, así como la filosofía mística. Brouwer también estudió varios mapeos topológicos y desarrolló técnicas para usar los llamados ‶simples″para aproximar mapeos continuos. La relevancia conduce al concepto de clase de homología, que permite la clasificación topológica de muchas clases.

Dentro de la topología existe una gran cantidad de trabajos donde muestran la aplicación del teorema, ya sean en la búsqueda de equilibrios tanto en economía, matemáticas y en física, puesto que el teorema de punto fijo de Brouwer afirma que una función f sobre un dominio dado tiene un punto fijo , es decir, si $f(x) = x$.

En este trabajo nos centraremos en el teorema del Punto fijo de Brouwer y su aplicación en economía por tanto, siguiendo con esta idea, el trabajo está dividido en tres capítulos, a continuación presentamos un breve resumen del contenido de cada uno de ellos:

- Capítulo 1: El propósito en este capítulo es mostrar los preliminares sobre Espacios Topológicos donde muestraremos definiciones, lemas, proposiciones, ejemplos y teoremas de siete temas especificos que son: Topología, Conjuntos Abiertos y Cerrados, Funciones continuas, Homeomorfismo, Espacios Conexos, Espacios métricos y el Teorema del valor intermedio; los cuales serviran para la demostración del teorema de punto fijo de Brouwer.

- Capítulo 2: El objetivo que tiene este capítulo es demostrar el teorema de punto fijo de Brouwer para dos dimensiones, para realizar dicha demostración se utilizaran conceptos y resultados propios de Topología Algebraica, como son: el concepto de retracción y el teorema de no retracción.

- Capítulo 3: Estará dedicado al problema de la existencia de distribuciones de precios en una economía de intercambio puro, como una aplicación del teorema de punto fijo de Brouwer. Así que, se definirán los conceptos económicos de Modelo, Intercambio puro y Teoría del equilibrio general y finalmente demostraremos usando el teorema de punto fijo de Brouwer, la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro.

1

Espacios Topológicos

En eeste capítulo resaltaremos algunos temas importantes de la Topología. La idea de un espacio topológico es un conjunto donde hay una noción de cercanía, que permite desarrollar los conceptos de límites, continuidad y conectividad. Además de otros espacios como los espacios euclidianos, métricos y múltiples, son espacios topológicos con estructuras, propiedades o restricciones adicionales.

1.1 Topología

Definición 1.1

Sea X un conjunto no vacío. Una **topología** en X es una familia τ de subconjuntos de X que satisface:

(a) $\emptyset, X$ pertenece a τ

(b) La unión de elementos de cualquier subfamilia de τ pertenece a τ.

(c) La intersección de los elementos de cualquier subfamilia finita de τ pertenece a τ.

El par (X, τ) formado por un conjunto X y la topología τ en X se denomina un **espacio topológico**.

Ejemplos

(I) La familia τ_d que consta de todos los subconjuntos de X. A esta topología se le denomina la topología discreta.

Demostración

La familia $\tau_d = \wp(x)$ de todos los subconjuntos de X es una topología en X. Veamos que en efecto es una topología.

a) $\emptyset \subseteq X$ y asi $\emptyset \in \tau_d$

$X \subseteq X$ y asi $X \in \tau_d$

b) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una subfamilia de elementos de τ_d. Veamos que $\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \in \tau_d$

Como cada $U_\alpha \in \wp(x)$, entonces $U_\alpha \subseteq X$ y por lo tanto $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha \subseteq X$.

En conclusión, $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \wp(x)$

c) Sea $\{U_i\}_{i=1}^n$ una subfamilia finita de elementos de τ_d.

Veamos que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_d$

Como $U_i \in \tau_d$, $U_i \subseteq X, i = 1,\ldots,n$, entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq X$

En conclusión, $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \wp(x)$.

Esto prueba que $\tau_d = \wp(x)$ es una topología en X.

$\square$

(II) La familia τ_0 que consta solamente de $\emptyset, X$ se llama la topología indiscreta en X (también llamada topología trivial).

Demostración

Sea X un conjunto no vació cualquiera y $\tau_0 = \{X, \emptyset\}$. Para verificar que la topología discreta es un espacio topológico verificamos las tres propiedades:

a) El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X pertenecen a τ_0.

b) La unión de cualquier subfamilia de elementos de τ_0 pertenece a τ.

$$\emptyset \cup X = X$$
$$X \cup \emptyset = X$$

c) La intersección de los elementos de cualquier subfamilia de τ_0 pertenece a τ.

$$\emptyset \cap X = \emptyset$$
$$X \cap \emptyset = \emptyset$$

$\square$

1.2 Conjuntos Abiertos y Cerrados

1.2.1 Conjuntos Abiertos

Definición 1.2

Sea (X,τ) cualquier espacio topológico entonces los miembros de τ son llamados conjuntos abiertos del espacio topológico.

Si (X,τ) es un espacio topológico, usualmente decimos el espacio topológico X, dejando sobreentendido la existencia de la topología τ.

Así, si (X,τ) es cualquier espacio topológico entonces

(a) $X,\emptyset$ son conjuntos abiertos.

(b) La unión de cualquier subfamilia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(c) La intersección de cualquier subfamilia finita de conjunto abierto es un conjunto abierto.

Ejemplos

(I) En el espacio topológico discreto (X,τ_d) cualquier subconjunto de X es un conjunto abierto.

(II) En el espacio topológico indiscreto (X,τ_0) los únicos conjuntos abiertos son $\emptyset$ y X.

1.2.2 Conjuntos Cerrados

Definición 1.3

Sea (X,τ) un espacio topológico . Un subconjunto A de X es cerrado si su complemento A^c es abierto.

La colección de subconjuntos cerrados de un espacio X tiene propiedades complementarias que las satisfechas por la colección de subconjuntos abiertos de X, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1

Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces

(a) $X,\emptyset$ son conjuntos cerrados.

(b) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(c) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Demostración

(a) $\emptyset, X$ son cerrados porque son los complementos de los conjuntos abiertos $X, \emptyset$, respectivamente.

(b) Si U_i es cerrado para $i = 1, \ldots, n$. Por las leyes de Morgan

$$\left(\bigcup_{i=1} U_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} U_i^c$$

el conjunto de la parte derecha de la igualdad es abierto, ya que es intersección finita de conjuntos abiertos

Luego,

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ es cerrado.}$$

(c) Dada una colección de conjuntos cerrados $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$.De acuerdo a las leyes de Morgan

$$\left(\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha^c$$

Debido a que U_α^c son abiertos por hipótesis, la parte derecha de la igualdad es abierto, ya que es la unión de conjuntos abiertos.

Por lo tanto

$$\bigcap_{\alpha \in J} U_\alpha \text{ es cerrado.}$$

$\square$

1.2.3 Clausura de un conjunto

Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. La clausura de A, denotada $\bar{A}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

Proposición 1.1

Sea $\bar{A}$ la clausura de un conjunto, entonces

(a) $\bar{A}$ es cerrada.

(b) Si F es cualquier conjunto cerrado que contiene a A, entonces $A \subset \overline{A} \subset F$. (Esto nos dice que la clausura de A es el más pequeño cerrado que contiene a A)

(c) A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.

Ejemplos

(I) Consideremos el subespacio $M = (0,1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. El conjunto $A = (0, \frac{1}{2})$ es un subconjunto de M, su clausura en $\mathbb{R}$ es el conjunto $[0, \frac{1}{2}]$ y su clausura en M es el conjunto $[0, \frac{1}{2}] \cap M = (0, \frac{1}{2}]$

(II) Considere la topología τ de $X = \{a,b,c,d,e\}$ donde los subconjuntos cerrados de X son $\emptyset, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}$
Luego $\overline{\{b\}} = \{b,e\}$, $\overline{\{a,c\}} = X, \overline{\{b,d\}} = \{b,c,e\}$

Sea p un punto $p \in X$, se llama punto clausura o un punto de adherencia de $A \subset X$, si y sólo si p pertenece a la clausura de A, denotado por $p \in \overline{A}$

Teorema 1.2
Sea X un espacio topológico. El operador cerradura en X tiene las siguientes propiedades:

(a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(b) $A \subset \overline{A}$

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

1.3 Funciones Continuas

Definición 1.4

Sean (X,τ) y (Y,τ_1) espacios topológicos y f una función de X en Y entonces $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ se dice que es una función continua si para cada $U\in\tau_1, f^{-1}(U)\in\tau$.

Ejemplos

(I) Dado dos espacios topológicos (X,τ_d) y (X,τ), τ una topología en X y τ_d la topología discreta.

Si $f:(X,\tau_d)\Rightarrow(X,\tau)$ es una función, entonces f es continua.

En efecto, si $u\in\tau$, entonces $f^{-1}(u)\subseteq X$,

luego $f^{-1}(u)\in\tau_d$

Por lo tanto f es continua

Cualquier función de la forma $f:(X,\tau_d)\Rightarrow(X,\tau)$ es continua.

Es consecuencia directa de la definición anterior.

Proposición 1.2

Sea f una función de un espacio topológico (X,τ) en un espacio (Y,τ_1).Entonces f es continua si y sólo si para cada $U\in\tau_1$ con $f(x)\in U$, existe un $V\in\tau$ tal que $x\in V$ y $f(V)\subseteq U$.

Teorema 1.3

Sea (X,τ), (Y,τ_1), (Z,τ_2) espacios topológicos.

Si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_1)$ y $g:(Y,\tau_1)\to(Z,\tau_2)$ son funciones continuas, entonces la función compuesta $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\tau_2)$ es continua.

Demostración

Para probar que la función compuesta $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\tau_2)$ es continua tenemos que mostrar que si $U\in\tau_2$ entonces $(g\circ f)^{-1}(U)\in\tau$, como $(g\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Sea U un conjunto abierto en (Z,τ_2), como g es continua $g^{-1}(U)$ es abierto en τ_1, entonces $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en τ, pues f es continua y $f^{-1}(g^{-1}(U))=(g\circ f)^{-1}(U)$

Por lo tanto $g \circ f$ es continua.

$\square$

Proposición 1.3

Sean (X,τ) e (Y,τ_1) dos espacios topológicos. Entonces $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau_1)$ *ssi* para cada conjunto cerrado S de Y, $f^{-1}(S)$ es un conjunto cerrado de X.

1.4 Homeomorfismo

En topología ¨homeomorfismo¨ es considerado un concepto fundamental, debido a que se refieren a los objetos topológicos que se consideran equivalentes, ya que visto desde una perspectiva diferente permite estirar, doblar o cortar y pegar. En para ello debe cumplir ciertas propiedades para ser aplicadas correctamente.

Definición 1.5

Sean (X,τ) y (Y,τ_1) espacios topológicos. Se dice que son **homeomorfos** o topológicamente equivalentes si existe una función biyectiva $f:(X.\tau) \rightarrow (Y,\tau_1)$ con f y su función inversa $f^{-1}:(Y,\tau_1) \rightarrow (X,\tau)$ ambas continuas. La función f recibe el nombre de **homeomorfismo**.

Una función f es bicontinua o topológica si f es abierta y continua entonces $f:(X,\tau) \rightarrow (Y,\tau_1)$ es un homeomorfismo si y sólo si f es bicontinua y biyectiva.

Ejemplos

(I) La función identidad de un espacio topológico X en sí mismo, id_x; es un homeomorfismo.

(II) Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son homeomorfismos entonces $f \circ g: X \rightarrow Z$ es un homeomorfismo.

(III) Sea $X = (-1,1)$. La función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por
$f(x) = tan\frac{1}{2}\pi x$ es biyectiva y continua además, la función recíproca
f^{-1} también es continua.
Luego la recta real $\mathbb{R}$ y el intervalo abierto $(-1,1)$ son homeomorfismo.

Proposición 1.4
Dada una colección cualquiera de espacios topológicos, la relación definida en ella por "X es homeomorfo a Y"es una relación de equivalencia.

Demostración

Reflexividad: Ya que $f : X \longrightarrow X$ donde $x \longmapsto f(x) = x$ como f es biyectiva y continua entonces $\exists f^{-1} : X \longrightarrow X$ donde $x \longmapsto f^{-1}(x)$.

Simetría: Por hipótesis X es homeomorfo a Y entonces $\exists f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismos, tal que cumple las tres propiedades de la definición 1.5 por lo tanto hay un homeomorfisimo entre Y y X y hay un $\exists f^{-1} : Y \longrightarrow X$, $(f^{-1})^{-1} = f$.

Transitividad: Sean (X,τ), (Y,τ_1) y (Z,τ_3) espacios topológicos, $(X,\tau) \cong (Y,\tau_1)$ y $(Y,_1) \cong (Z,\tau_2)$ entonces, existe $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau_1)$ homeomorfismos y existe también $g : (Y,\tau_1) \longrightarrow (Z,\tau_2)$.

Consideramos la composición $g \circ f : (X,\tau) \longrightarrow (Z,\tau_2)$ es continua.

- si f,g son biyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es biyectiva $\Longrightarrow \exists (g \circ f)^{-1}$.
- si f,g son biyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es continua.

Como $g \circ f$ es biyectiva $\Longrightarrow$ existe $(g \circ f)^{-1} : (Z,\tau_2) \longrightarrow (X,\tau)$ y probaremos ahora que $(g \circ f)^{-1})$ es continua.

Sea $U \in (X,\tau)$ y $(g \circ f)^{-1})(U) = (f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau$

Entonces $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau_2$

Por lo tanto $(g \circ f)^{-1}$ es continua y así inferimos que $g \circ f$ es un homeomorfismo.

$\square$

1.5 Espacios Conexos

Definición 1.6

Conjuntos Separados

Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es un par A,B de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X.

Definición 1.7

Conjuntos disconexo

Un subconjunto A de un espacio topológico X es **disconexo** si existen subconjuntos abiertos G y H de X tal que $A \cap G$ y $A \cap H$ son no vacíos disjuntos cuya unión es A.

Definición 1.8

Conexo

Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces (X,τ) es **conexo** si no es disconexo. Es decir, si A no es unión de dos subconjuntos no vacíos y separado.

Ejemplos

(I) Sea X un conjunto con dos elementos dotados de la topología indiscreta, es evidente que no existe una separación de X, luego X es conexo.

(II) Si $X = \{a,b,c,d,e\}$ y
$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$
entonces (X,τ) no es conexo pues {b,c,d,e} es un subconjunto abierto y cerrado.

Teorema 1.4

Los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$, teniendo mas de un punto, son los intervalos (abiertos, cerrados, semiabiertos y $\mathbb{R}$ mismo).

Demostración

Veamos que si $Y \subseteq \mathbb{R}$, es conexo entonces Y es un intervalo.

Por reducción al absurdo, si Y es un intervalo; entonces existen $a,b \in Y$ y $c \neq Y$ tales que $a < c < b$. Así (c,∞), $(-\infty,c)$ son abiertos en $\mathbb{R}$, tales que

$$Y \cap (-\infty, c) \neq \emptyset, \text{ ya que } a \in Y \cap (-\infty, c)$$

$$Y \cap (c, +\infty) \neq \emptyset, \text{ ya que } b \in Y \cap (c, +\infty)$$

$$\{Y \cap (-\infty, c)\} \text{ y } \{Y \cap (c, +\infty)\} \text{ son disjuntos y su unión es } Y.$$

Esto nos diría que Y es disconexo. Luego, Y debe ser un intervalo.
Ahora veamos que si $Y \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces Y es conexo. Nuevamente por reducción al absurdo, supongamos que Y no es conexo. Entonces existen A, B conjuntos no vacíos, disjuntos y abiertos en Y tales que $Y = A \cup B$.
Sean $a \in A$ y $b \in B$, supongamos sin perdida de generalidad que $a < b$.
Como $a, b \in Y = A \cup B$ y Y es un intervalo, entonces $[a, b] \subseteq Y$ y así

$$[a, b] = [a, b] \cap Y = [a, b] \cap \{A \cup B\} = \{[a, b] \cap A\} \cup \{[a, b] \cap B\}$$

Pongamos $A_0 = [a, b] \cap A$ y $B_0 = [a, b] \cap B$, que son abiertos en $[a, b]$, no vacíos (ya que $a \in A_0$ y $b \in B_0$) y disjuntos y $[a, b] = A_0 \cup B_0$. Esto es, A_0 y B_0 forman una separación de $[a, b]$.
Como A_0 es no vacío y esta acotado superiormente (b es una cota superior de A_0), sea $c = sup\ A_0$.
Así $a \leqslant c$. También $c \leqslant b$. Así $c \in [a, b] = A_0 \cup B_0$.
Luego $c \in A_0$ o $c \in B_0$.
Si $c \in B_0$; entonces $c \neq a$, ya que $a \in A_0$ y $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Así $c \in (a, b]$. Esto es, $a < c < b$ o $c = b$.
En cualquier caso, como B_0 es abierto en $[a, b]$, existe d tal que

$$(d, c] \subseteq B_0, \text{ esto es } (d, c] \cap A_0 = \emptyset$$

Si $c = b$; $x \leqslant c = b$ para todo $x \in A_0$ y $(d, c] \cap A_0 = \emptyset$ implica que $x \leqslant d$ para todo $x \in A_0$. Luego d sería una cota superior de A_0 menos que $c = sup\ A_0$. Una contradicción, luego $c \neq b$.
Si $c < b : (c, b] \subseteq B_0$ y así

$$(d, c] = (d, c] \cup (c, b] \subseteq B_0$$

y nuevamente, d sería una cota superior para A_0, menor que $c = sup\ A_0$. Una contradicción.
Luego no puede ser $c \in B_0$.
Así $c \in A_0$. Entonces $c \neq b$ (ya que $b \in B_0$ y $A_0 \cap B_0 = \emptyset$).
Así $c \in [a, b)$. Esto es $c = a$ o $a < c < b$.
Como A_0 es abierto en $[a, b]$, existe e tal que

$$[c,e) \subset A_0$$

Así existe $z \in [c,e)$ tal que $z \in A_0$. Luego,

$c = sup\, A_0 < z$. Una contradicción.

Luego $c \notin A_0$.

En conclusión, $c \in [a,b] = A_0 \cup B_0$ pero $c \notin A_0$ y $c \notin B_0$.

Esta contradicción viene de ser Y un intervalo y suponer que no es conexo. Luego Y debe ser conexo.

Hemos probado así que los únicos conexos en $\mathbb{R}$ con mas de un punto, son los intervalos (abiertos, cerrados, semiabiertos o $\mathbb{R}$ mismo)

$\square$

Proposición 1.5

Un espacio topológico (X,τ) es conexo *ssi* X y $\emptyset$ son los únicos subconjuntos abiertos y cerrados simultaneamente.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea X conexo. Si $A \subset X$ es abierto y cerrado, entonces $B = X - A$ también es abierto y cerrado. Puesto que X es conexo, si $A \neq \emptyset$, entonces $B = \emptyset$ y así $A = X$.

$\Leftarrow$) Si $\emptyset$ y X son los únicos subconjuntos de X que son simultáneamente abiertos y cerrados y A y B son abiertos y ajenos y su unión es X, entonces uno es el complemento del otro, Así a y B también son cerrados.

Por lo tanto uno es $\emptyset$ y el otro es X. Luego X es conexo.

$\square$

Teorema 1.5

Las imagenes continuas de conjuntos conexos son conexas.

Proposición 1.6

Si (X,τ) es un espacio topológico no conexo, existe $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ continua y no constante.

Demostración

Si (X,τ) es no conexo entonces $X = A \cup B$ con A y B abiertos y cerrados disjuntos. Definimos $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \in B$. Esta aplicación es continua puesto que $f^{-1}(0)$ es abierto y cerrado lo mismo ocurre para 1.

$\square$

El siguiente lema es consecuencia de la proposición.

Lema 1.1. *Un espacio topológico X es conexo si y sólo si si las únicas funciones continuas de X en* $Y = \{0,1\}$ *son las funciones constantes* $f(x) = 0$ *y* $f(x) = 1$.

Teorema 1.6

Sea A un subespacio conexo de A. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B también es conexo.

Desmostración

Sea A conexo y sea $A \subset B \subset \overline{A}$.

Supongamos que $B = C \cup D$ es una separación de B. El conjunto A verifica $A \subset C$ o $A \subset D$; supongamos que $A \subset C$, entonces $\overline{A} \subset \overline{C}$. Como $\overline{C}$ y D son disjuntos, B no puede intersecar a D. Luego contradice el hecho de que D es un subconjunto no vacío de B.

$\square$

1.6 Espacios métricos

Definición 1.9
Sea X un conjunto no vacío y una función $d : X \text{ x } X \to \mathbb{R}$ tal que para $x, y \in X$:

(a) $d(x,y) \geqslant 0$.

(b) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(c) $d(x,y) = d(y,x)\ \forall x, y \in X$.

(d) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)\ \forall x, y, z \in X$

entonces d es llamada métrica sobre X.

El par (X,d) es llamado espacio métrico y $d(x,y)$ se llama distancia entre x e y.

Ejemplos

(I) Sea $X = \mathbb{R}$. Se define la función d de $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como sigue $d(x,y) = |y - x|$.

(II) Sea $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = max\{|x_i - y_i|, i = 1, 2, ...\}$.

Definición 1.10

1. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos y f una función de
   X_1 en X_2. Llamamos a f una isometría de X_1 en X_2 si satisface la propiedad:
   $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x,y)\ \forall x, y \in X_1$.

2. Dos espacios métricos $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ se dicen isométricos si existe una isometría de X_1 en X_2.

1.6.1 Bolas y conjuntos abiertos

Definición 1.11
Sean (X,d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$

1. Se llama **bola abierta** de centro x_0 y radio r al conjunto definido por
   $B(x_0, r) = \{x \in X \colon d(x, x_0) < r\}$.

2. Se llama **bola cerrada** de centro x_0 y radio r al conjunto notado y definido por
   $\overline{D(x_0, r)} = \{x \in X \colon d(x, x_0) \leqslant r\}$.

3. Se llama **esfera** de centro x_0 y radio r al conjunto notado y definido por $S(x_0,r)=\{x\in X : d(x,x_0)=r\}$.

Ejemplo

(I) En $\mathbb{R}$ con la métrica Euclidiana $B_r(x_0)$ es el intervalo abierto (x_0-r,x_0+r).

Definición 1.12
Sea (X,d) un espacio métrico, $A\subset X$ $A\neq 0$. Se dice que A es abierto si para cada $x\in A$ existe $r_x>0$ tal que $B(x,r_x)\subset A$.

Teorema 1.7
Sea (X,d) un espacio métrico. Toda bola abierta de centro $x_0\in X$ y radio $r>0$ es un conjunto abierto de X.

Demostración

Sean $x_0\in X$ y $r>0$. Debemos probar que $B(x_0,r)$ es un conjunto abierto, es decir que para cada $x\in B(x_0,r)$, existe $r_x>0$ tal que $B(x,r_x)\subset B(x_0,r)$.
En efecto, sea $x\in B(x_0,r)$ entonces $d(x,x_0)<r$.
Elegimos $r_x=r-d(x,x_0)$ y mostraremos que $B(x,r_x)\subset B(x_0,r)$, o sea para todo $y\in B(x,r_x)$ implica $y\in B(x_0,r)$.
Sea $y\in B(x,r_x)$. Por la definición de bola abierta; tenemos $d(x,y)<r_x$.
Luego, utilizando la desigualdad triangular se tiene

$$d(x,x_0)\leqslant d(y,x)+d(x,x_0)<r_x+d(x,x_0)=r,$$

esto es, $d(y,x_0)<r\Rightarrow y\in B(x_0,r)$. Así, $B(x,r_x)\subset B(x_0,r)$ y de la definición de conjunto abierto, se tiene $B(x_0,r)$ es un conjunto abierto.

$\square$

Teorema 1.8

Sea (X,d) un espacio métrico, I un conjunto de índice, $I \neq \emptyset$.

(a) Sea $\{A_i | i \in I\}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto de X.

(b) Sea $\{A_i | i \in I\}$ una familia finita de conjuntos abiertos de X, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ es abierto de X.

Demostración

(a) Sea $\{A_i | i \in I\}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos de X. Debemos probar que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto. Para $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$. Por hipótesis A_j es abierto, y como $x \in A_j$, existe $r_j > 0$ tal que $B(x,r_j) \subset A_j$.
Puesto que $A_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, se tiene $B(x,r_j) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.
Por lo tanto $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto.

(b) Sea $\{A_i | i \in I\}$ una familia finita de conjuntos abiertos de X. Debemos probar que $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto. Sea $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, entonces $x \in A_i \ \forall i \in I$. Por hipótesis, cada conjunto A_i es abierto, y de la definición de conjunto abierto, existe $r_i > 0$ tal que $B(x,r_i) \subset A_i$, $i \in I$. Sea $r = min_{i\in I} r_i$.
Entonces, $B(x,r) \subset A_i \ \forall i \in I$ y en consecuencia $B(x,r) \subset \bigcap_{i\in I} A_i$

□

1.7 Teorema del valor intermedio

El teorema del valor intermedio es uno de los más importantes y útiles resultados en cursos de cálculo. Este establece una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ de la recta real $\mathbb{R}$, toma cada valor entre los valores $f(a)$ y $f(b)$. Mas precisamente,

Teorema 1.9

Teorema del valor intermedio sobre $[a,b]$

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua. Si d está entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=d$

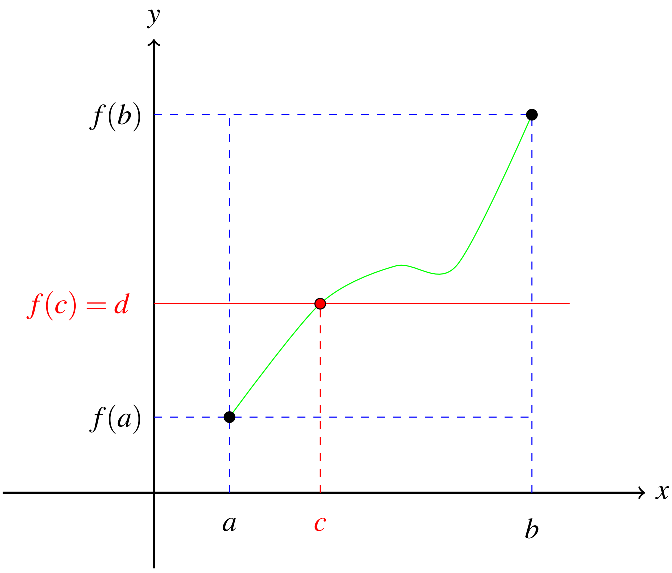


Figura 1.1: Teorema del valor intermedio.

Una consecuencia importante y de gran utilidad de este teorema es la garantía que da sobre la existencia de soluciones para ecuaciones del tipo $f(x)=0$, como lo muestra el siguiente colorario.

Corolario 1.1. *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos. Entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene solución entre a y b.*

Demostración

Si $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos entonces 0 esta entre $f(a)$ y $f(b)$.

Se sigue del teorema del valor intermedio que existe $c\in[a,b]$ talque $f(c)=0$. Esto es, la ecuación $f(x)=0$ tiene solución entre a y b.

□

El teorema del valor intermedio para funciones reales sobre intervalos $[a,b]$ de la recta real $\mathbb{R}$, puede ser establecido como una consecuencia de manera más general como un teorema de topología en espacios conexos.

Teorema 1.10

Teorema del valor intermdeio en espacios Topológicos conexos

Sea (X,τ) un espacio topológico es conexo y $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $x,y \in f(X)$ y $(x \leq c \leq y)$, entonces $c \in f(X)$. (Esto es existe a en X tal que $c = f(a)$)

Demostración

Si $c = x$ o $c = y$, entonces el resultados se tiene de la hipótesis.

Así, veamos el caso $x < c < y$.

Notemos que como X es conexo y f es continua, entonces $f(X)$ es conexo en $\mathbb{R}$

Probaremos por contradicción que $c \in f(X)$. Entonces supongamos que $c \notin f(X)$.

Entonces $(-\infty, c)$ y $(c, +\infty)$ son subconjuntos abiertos(no triviales) y disjuntos de $\mathbb{R}$ tal que

$$f(X) \subset (-\infty, c) \cap (c, +\infty).$$

Así,

$f(X) = [(-\infty,c) \cup (c,+\infty)] \cap f(X) = [(-\infty,c) \cap f(X)] \cup [(c,+\infty) \cap f(X)]$ con $(-\infty,c) \cap f(X)$, $(c,+\infty) \cap f(X)$ abiertos en $f(X)$, no triviales (pues $x \in (c,+\infty) \cap f(X), y \in (c,+\infty) \cap f(X)$), disjuntos. Esto es, $(-\infty,c) \cap f(X)$, $(c,+\infty) \cap f(X)$ es una separación de $f(X)$ en $f(X)$, lo que es una contradicción; pues $f(X)$ es conexo.

En consecuencia; tiene que ser $c \in f(X)$.

$\square$

De este teorema del valor intermedio en espacios topológicos se sigue el teorema del valor intermedio para funciones reales sobre intervalos $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, y que $[a,b]$ es conexo en $\mathbb{R}$.

Una consecuencia útil del teorema del valor intermedio es la siguiente versión unidimensional del teorema del punto fijo de Brouwer.

Teorema 1.11

Teorema unidimensional del punto fijo de Brouwer

Sea $f : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ continua. Entonces, existe $c \in [-1,1]$ talque $f(c) = c$. (Este punto c es llamado un punto fijo de f).

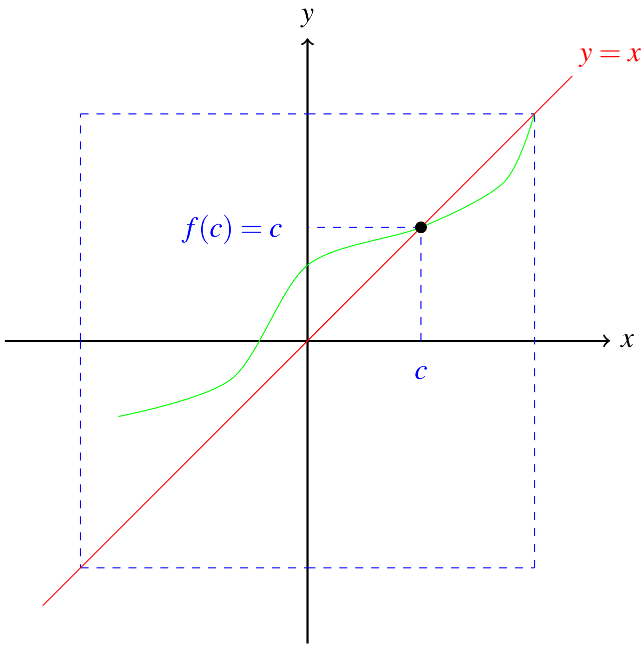


Figura 1.2:

Teorema unidimensional del punto fijo de Brouwer.

Podemos visualizar gráficamente por que se tiene el teorema ver Figura1.2.

Por ser f continua, su gráfico va de manera continua del lado izquierdo del cuadrado $[-1,1] \cdot [-1,1]$ a su lado derecho y por tanto debe contar a su diagonal $y = x$ $(x \in [-1,1])$ en algún punto $(c,c) = (c, f(c))$ con $c \in [-1,1]$.

Así, $f(c) = c$.

Demostración

Definamos la función $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, g es continua. Además, $-1 \leqslant f(-1) \wedge f(1) \leqslant 1$ implica que $0 \leqslant f(-1) - (-1) = g(-1) \wedge g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.

Esto es $g(-1)$ y $g(1)$ tiene signos opuestos y por tanto 0 esta entre $g(-1)$ y $g(1)$.

Se sigue del teorema del valor intermedio que existe $c \in [-1,1]$ tal que $g(c) = f(c) - c = 0$ y por tanto $f(c) = c$.

$\square$

El teorema del punto fijo de Brouwer ($n-$dimensional) establece que cada función continua $f : B^n \longrightarrow B^n$ de la bola $n-$dimensional en si misma, tiene un punto fijo. Para los intereses de nuestro trabajo daremos una prueba de la versión $2-$dimensional del teorema del punto fijo de Brouwer.

2

Teorema de punto fijo de Brouwer y Demostración

Para entender el teorema debemos realizar una pequeña reseña de Henri Poincaré y las ecuaciones diferenciales. Hacia finales del siglo XIX, una cuestión acaparaba el interés de la comunidad científica, la de estabilidad del sistema solar. Este hecho le llevó a considerar otras representaciones del sistema solar con que poder estudiarlas. Bajo esta motivación, Poincaré presto más atención a un hecho tan simple y cotidiano como la superficie de una taza de café.

Se centró en estudiar las trayectorias de una superficie animada por una corriente constante. Para ello publica en una prestigiosa revista llamada Analysis situs, donde logró demostrar que en superficies de la misma naturaleza que la de un disco, como una taza de café, existe algún punto fijo. Por tanto, Poincaré probo un resultado equivalente a una versión de lo que hoy conocemos como el Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

Existe varias formas de demostrar este teorema: la versión analítica que utiliza el Teorema de Green, otra topológica que se basa en homologías de grupos, también existe la prueba combinatoria a través de una generalización del lema de Sperner.

En este capítulo estudiaremos y daremos una demostración del teorema de punto fijo de Brouer $2-$dimensional. La demostración está basada en probar su equivalencia con el Teorema de no existencia de Repliegues (Retracts) del disco unitario B^2 en el circulo unitario S^1. Este resultado forma parte de estudios avanzados en Topología Algebraica. Puesto que estos estudios en Topología Algebraica son propios de niveles de posgrado y ni son tratados en otros estudios de pregrado, nos permitiremos aquí, enunciar sin demostración algunos resultados propios de esta área. Esto con el fin de alcanzar de manera rigurosa los objetivos del capítulo.

2.1 Espacios con la propiedad del Punto Fijo

Definición 2.1

Sea $f : X \longrightarrow X$ una función.Un punto $x \in X$ se llama un punto fijo de f si $f(x) = x$.

Un espacio topológico X se dice que tiene la propiedad del punto fijo si cada función continua $f : X \longrightarrow X$ tiene un punto fijo.

Ejemplos.

(I) $[-1,1]$ tiene la ´propiedad del punto fijo, por el teorema de punto fijo de Brouwer unidimensional; ya demostrado antes.

(II) La recta real $\mathbb{R}$ no tiene la propiedad del punto fijo, ya que existen funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que no tienen punto fijo. Por ejemplo la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x+1$, es continua y no tiene punto fijo.

(III) **El círculo S^1 no tiene la propiedad del punto fijo**.
La función continua $f : S^1 \longrightarrow S^1$, $f(\theta) = \theta + \pi$ dada por rotar cada punto del círculo un ángulo de π, no tiene punto fijo, pues $f(\theta) = \theta$ llevaría a que $\theta + \pi = \theta$ y por tanto $\pi = 0$ lo que es una contradicción.

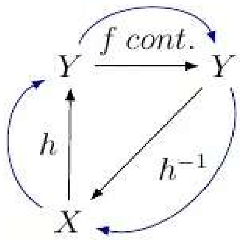
La propiedad del punto fijo es una propiedad topológica, como lo muestra el seguiente resultado.

Teorema 2.1

Si los espacios X e Y son homeomorfos, entonces X tiene la propiedad de punto fijo si y sólo sí Y la tiene.

Demostración

$\Rightarrow$) Si toda función $f : X \longrightarrow X$ continua tiene un punto fijo. Veamos que una función $f : Y \longrightarrow Y$ continua tiene punto fijo.
Por hipótesis tenemos que X e Y son homeomorfos
Sea $h : X \longrightarrow Y$ es biyectiva y bicontinua, es decir un homeomorfismo
entonces vamos a realizar una composición $h^{-1} \circ f \circ h : X \longrightarrow X$ es continua, donde sabemos que h es homeomorfismo, f es continua y h^{-1} es continua. (Como se muestra en la figura)



Como X tiene la propiedad de punto fijo, entonces la composición $h^{-1} \circ f \circ h$ tiene un punto fijo, es decir $\exists x \in X$ talque $h^{-1} \circ f \circ h(x) = x$

$$h^{-1}(f(h(x))) = x$$

$$h * h^{-1}(f(h(x))) = h(x)$$

$$f(h(x)) = h(x)$$

entonces $h(x)$ es punto fijo de f

luego $h(x) = y$, entonces $h(x) \in Y$

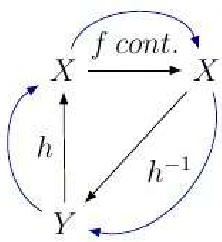
Así Y tiene la propiedad del punto fijo.

$\Leftarrow$) Se realizará de manera análoga. Si toda función $f : Y \longrightarrow Y$ continua tiene un punto fijo. Veamos que una función $f : X \longrightarrow X$ continua entonces tiene punto fijo.

Por hipótesis tenemos que X e Y son homeomorfos

Sea $h : Y \longrightarrow X$ es biyectiva y bicontinua, es decir un homeomorfismo

entonces vamos a realizar una composición $h^{-1} \circ f \circ h : Y \longrightarrow Y$ es continua, donde sabemos que h es homeomorfismo, f es continua y h^{-1} es continua. (Como se muestra en la figura)



Como Y tiene la propiedad de punto fijo, entonces la composición $h^{-1} \circ f \circ h$ tiene un punto fijo, es decir $\exists y \in Y$ talque $h^{-1} \circ f \circ h(y) = y$

$$h^{-1}(f(h(y))) = y$$

$$h * h^{-1}(f(h(y))) = h(y)$$

$$f(h(y)) = h(y)$$

entonces $h(y)$ es punto fijo de f

luego $h(y) = x$, entonces $h(y) \in X$

Así X tiene la propiedad del punto fijo.

□

El teorema de punto fijo de Brouwer establece que la bola cerrada $n-$dimensional B^n tiene la propiedad del punto fijo (L.E.J. Brouwer). Mostraremos en este capítulo que el teorema de punto fijo de Brouwer es equivalente al teorema de no existencia de retracciones de B^n en S^{n-1} 2-dimensional (esto es, el caso $n = 2$), su enunciado es como sigue.

Teorema 2.2

Teorema de la no-retracción 2-dimensional

No existe una retracción del disco B^2 sobre su disco frontera S^1.

Como comentamos al principio del capítulo, este teorema forma parte de estudios avanzados en Topología Algebraica, más precisamente de Homotopías y teoría del grado. Así comenzaremos donde algunas nociones básicas.

Definición 2.2

Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Una retracción de X en A, es una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$, para cada $a \in A$.

Si existe una retracción de X en A, entonces A se dice que es un retract (repliegue) de X.

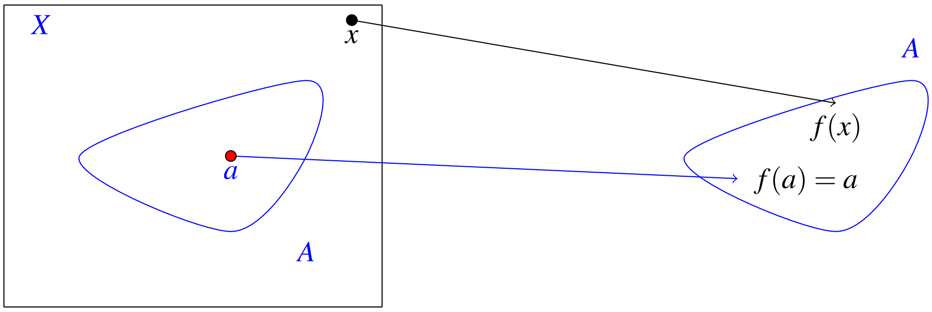


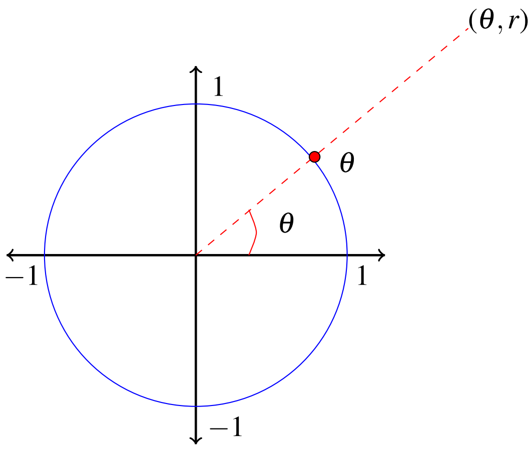
Figura 2.1: Retracción de X en A.

Ejemplos.

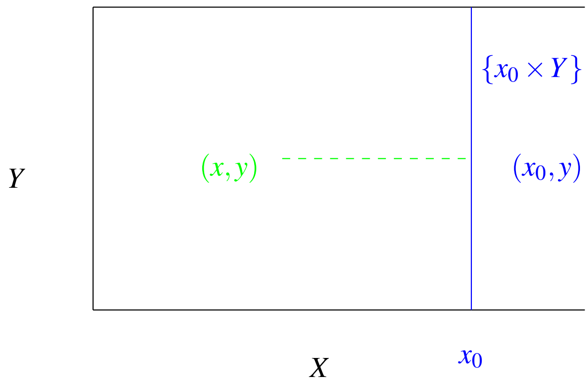
(I) Si $A = \{a\}$ es un subconjunto del espacio topológico X, entonces $A = \{a\}$ es un retract de X, ya que la función $f : X \longrightarrow A$ dado por $f(x) = a$ es una retracción de X en a.

(II) El círculo S^1 es un retract de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Usando coordenadas polares (θ, r) para los puntos de $\mathbb{R}^2$, la siguiente función es una retracción.

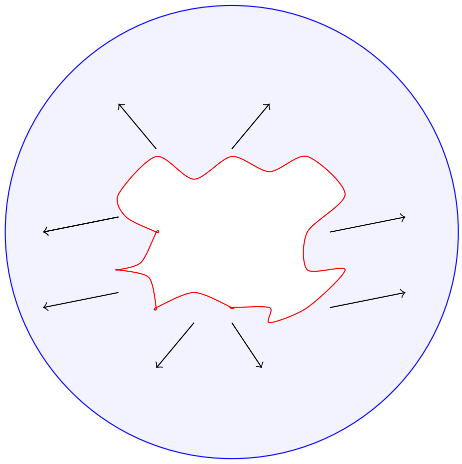
$$f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow S^1$$
$$(\theta, r) \longrightarrow f(\theta, r) = (\theta, 1)$$



(III) Sean X, Y espacios y consideremos el espacio producto $X \times Y$. Si $x \in X$ es fijado. El subconjunto $A = \{x_0\} \times Y$=$\{(x_0, y) \in X \times Y : y \in Y\}$ es un retract de $X \times Y$, vía la retracción $r : X \times Y \longrightarrow \{x_0\} \times Y$ $(x, y) \longrightarrow r(x, y) = (x_0, y)$



Ahora, consideremos el disco B del plano. Podemos pensar que no existe una retracción de B a su circulo frontera, es como esperar que no es posible deformar la piel entera de un tambor a su anillo, manteniendo los puntos del anillo fijado, pero sin romper la piel.



Deformar la piel del tambor a su anillo la rompería, demostrando que no hay retracción de B a S^1. De hecho, no existe retracción de la $n-$bola B^n en $\mathbb{R}^n$ sobre su $(n-1)-$esfera frontera, S^{n-1}. Este resultado general es conocido como el teorema de no-Retracción. La versión $1-$dimensional del teorema de no retracción es una sencilla consecuencia de resultados básicos de la teoría de los espacios Conexos, como veremos a continuación.

Teorema 2.3

Teorema $1-$dimensional de no Retracción. No existe retracción de $B^1 = [-1,1]$ sobre su esfera frontera $S^0 = \{-1,1\}$.

Demostración

Si existiese una retracción $r : [-1,1] \longrightarrow \{-1,1\}$, esto es r continua con $r(-1) = -1$, $r(1) = 1$. Entonces $r([-1,1]) = \{-1,1\}$.

Siendo r continua y $[-1,1]$ conexo, tendriamos que la imagen $r([-1,1]) = \{-1,1\}$ es un conexo en $\mathbb{R}$. Lo que es una contradicción, pues los conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos.

$\square$

Con el uso de herramientas apropiadas de topología algebraica, probaremos la versión $2-$dimensional del Teorema de no Retracción; que es de interés para este trabajo.

Con este objetivo, a continuación presentaremos, como mencionamos en la introducción de esta parte, de manera breve y sin demostración algunos conceptos y resultados fundamentales de Topología algebraica, más precisamente de homotopías y teoría de grado. Para una lectura completa de este tema, el lector interesado puede referirse a (Munkres, 2000, [M00]), Topología parte II, Topología algebraica o algún texto especializado de Topología algebraica.

2.2 Homotopías

El concepto de homotopía precisa lo que significa **deformar** continuamente una función continua en otra.

Definición 2.3
Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Consideremos $I = [0,1]$ el subespacio topológico de $\mathbb{R}$ y que $X \times I$ tiene la topología producto. Diremo que f y g son homotópicas si existe una función continua $F : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$.
Tal función F es llamada una homotopía entre f y g. Demotaremos esto como $f \approx g$ (ya que más adelante veremos que sobre el conjunto de las funciones continuas $f : X \longrightarrow Y$, ser homotópicos establece una relación de equivalencia)

Podemos imaginar una homotopía como una familia uniparamétrica $F(x,t)$ continua en el parámetro $t \in [0,1]$. Si pensamos en el parámetro t como representante del tiempo, entonces la homotopía F describe la ‶deformación″continua en el tiempo de 0 a 1; de la aplicación f en la aplicación g.

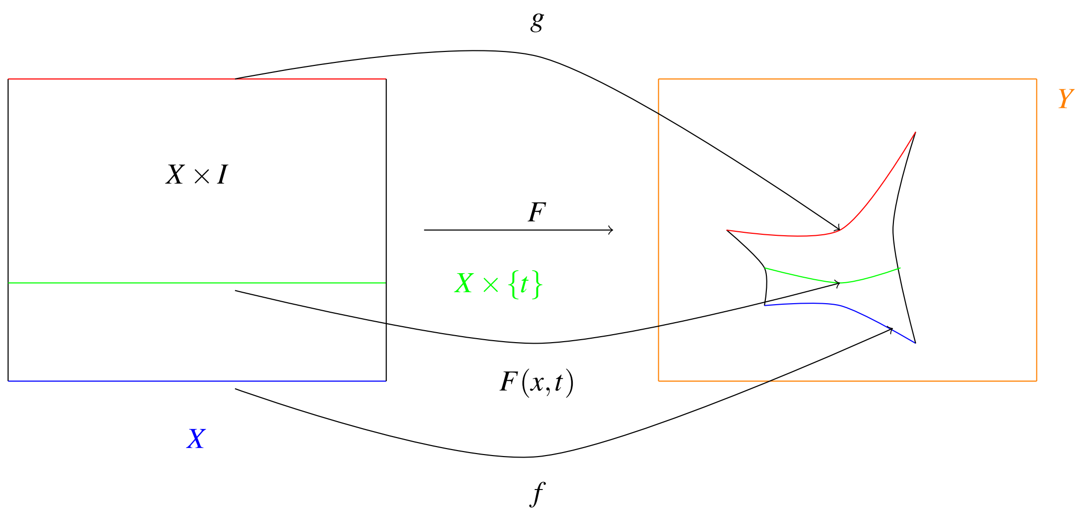
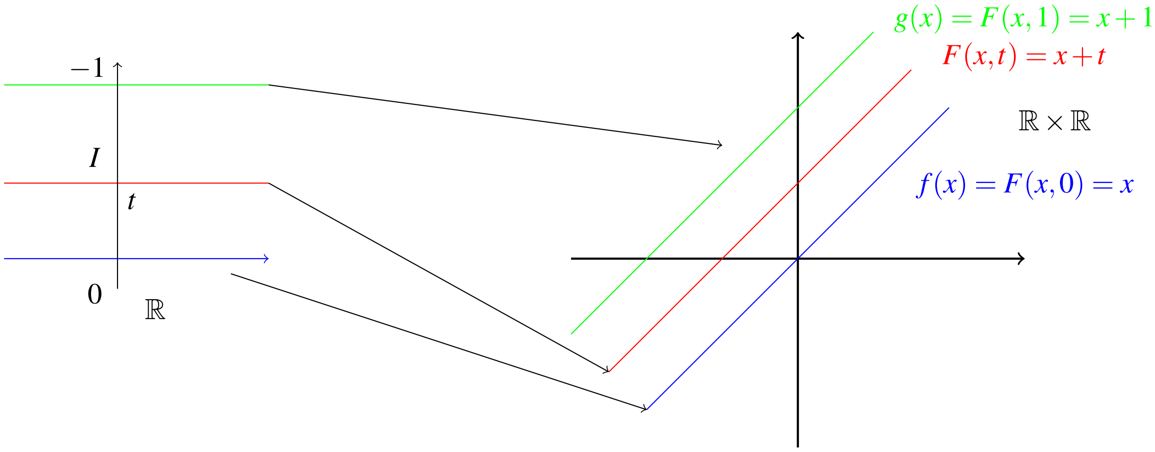


Figura 2.2: La homotopía F deforma continuamente f en g.

Ejemplo

Defina $F:\mathbb{R}\times I \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x,t)=x+t$. F es continua, pues "t"es continua. Así F es una homotopía entre $f(x)=F(x,0)=x$ y $g(x)=F(x,1)=x+1$, f es la identidad de $\mathbb{R}$ sobre si mismo, enviando cada x en $\mathbb{R}$ en si mismo, g traslada la recta real $\mathbb{R}$ una unidad em dirección positiva. Para un valor fijado $t\in I$, la homotopía $F(x,t)$ traslada la recta real una distancia t. Podríamos representar geográficamente como:



Como información adicional, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.4
La relación $f\approx g$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las funciones continuas $f:X\longrightarrow Y$.

Demostración

Reflexividad

$f\approx f$ tal que

Sea $F:X\times[0,1]\to Y$ donde $F(x,t)=f(x)$ es continua y $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=f(x)$ entonces $f\approx f$.

Simetría

$f\approx g\Rightarrow g\approx f$ talque

Sea $F:X\times[0,1]\to Y$ continua $F(x,0)=f(x)\wedge F(x,1)=g(x)$

entonces $F':X\times[0,1]\to Y$ donde $F'(x,t)=F(x,1-t)$ continua ya que F lo es

$$F'(x,0)=F(x,1-0)=F(x,1)=g(x)$$

$$F'(x,1)=F(x,1-1)=F(x,0)=f(x)$$

Transitividad

$f \approx g \wedge g \approx h \Rightarrow f \approx h$

Sean $F_1 : X \times [0,1] \to Y$ continua $F_1(x,0) = f(x)$, $F_1(x,1) = g(x)$ y

$F_2 : X \times [0,1] \to Y$ continua $F_2(x,0) = g(x)$, $F_2(x,1) = h(x)$

entonces $F : X \times [0,1] \to Y$

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x,2t) & si \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ F_2(x,2t-1) & si \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{es continua y}$$

$F(x,0) = F_1(x,2*0) = F_1(x,0) = f(x)$

$F(x,1) = F_2(x,2*1-1) = F_1(x,1) = h(x)$

Por lo tanto $f \approx h$

$\square$

2.3 Funciones Circulares y Grado

En esta sección nos enfocaremos en funciones continuas $f : S^1 \longrightarrow S^1$, del circulo unitario en si mismo. Tales funciones son llamadas **funciones círculos**.

Por comodidad representamos los puntos sobre el circulo usando la variable θ, donde θ es la medida angular usual tomada desde el eje x positivo del plano.

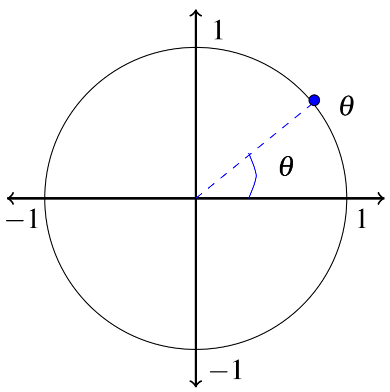


Figura 2.3: Función Círculo

Asumimos que dos valores θ_1, y θ_2 representar el mismo punto sobre el circulo si difieren por un múltiplo entero de 2π; esto es $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.4 El grado de una función círculo

El grado de una función circulo nos da una medida de cuantas veces una función circulo $f : S^1 \longrightarrow S^1$ envuelve o enrolla el circulo alrededor del mismo. Pensemos que esta medida es igual a 1 para la función identidad $i_d : S_1 \longrightarrow S_1$ (S_1 se envuelve sobre si mismo una sola vez), es igual a -1 para la función $f(\theta) = -\theta$, y de manera mas general , es igual a n para la función $C_n = n\theta$ (n veces enrollado sobre si mismo).

Es claro que no todas las funciones circulo son tan agradables como $C_n(\theta) = n\theta$. Podrían ser enrollados oscilatorios alrededor del circulo; o enrollados en un sentido y luego enrollados en otro sentido; o enrollados de diversa variedad de los anteriores o de otros tipos mas complicados.

El siguiente teorema, concerniente a homotopías entre funciones círculos, nos facilitara el concepto de grado de una función circulo.

Teorema 2.5

Para cada función circulo $f : S^1 \longrightarrow S^1$, existe un unico numero $n \in \mathbb{Z}$ tal que f es homotópico a $C_n(\theta) = n\theta$.

Definición 2.4

El único $n \in \mathbb{Z}$ asociado a $f : S^1 \longrightarrow S^1$ en el teorema anterior es definido como el grado de f y será denotado por $grad(f) = n$.

El siguiente teorema de la teoría de grado para funciones círculo, es el resultado fundamental para demostrar el teorema de no retracción $2-$dimencional.

Teorema 2.6

Dos funciones circulos $f, g : S^1 \longrightarrow S^1$ son homotópicas sí y sólo sí, $grado\, f = grado\, g$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $grad\, f = n$

$f \approx C_n$ y $f \approx g$ entonces por la transitividad

$g \approx C_n$ por lo que $grad\, g = n$

$\Leftarrow$) Sea $grado\, f = grado\, g = n$.

Entonces $f \approx C_n$ y $g \approx C_n$ por lo que $f \approx g$ □

Teorema 2.7

Una función círculo $f : S^1 \longrightarrow S^1$ tiene grado 0 sí y sólo sí, f se puede extender continuamente sobre el disco B^2 (esto es, si existe una función continua $F : B \longrightarrow S^1$ tal que $F|_{S^1} = f$)

Demostración

A través de la demostración trabajamos con coordenadas polares (r, θ).

$\Rightarrow$) Si f tiene grado 0 entonces f es homotópica a $C_0(\theta) = 0 * \theta = 0 = (0, 1)$.

Esto es, existe uns homotopía

$$G : S^1 \times I \longrightarrow S^1$$

talque $G(\theta, 0) = C_0(\theta)$ y $G(\theta, 1) = f(\theta)$.

Definamos $F : B \longrightarrow S^1$

$$(r, \theta) \longmapsto F(r, \theta) = G(\theta, r)$$

Observemos que para $r = 0$, $(0, \theta) = (0, 0)\ \forall \theta \in [-2\pi, 2\pi]$

y

$$F(0, \theta) = G(\theta, 0) = C_0(\theta) = 0\ \forall \theta \in [-2\pi, 2\pi]$$

Esto nos garantiza que F esta bien definida en $r = 0$.

Ahora, como G es continua, F también lo es.

Finalmente, observemos que para $(1, \theta) \in S^1$

$$F(1, \theta) = G(\theta, 1) = f(\theta)$$

esto es $F|_{S^1} = f$.

Así F es una extensión continua de f al disco B^2.

$\Rightarrow$) f se extiende continuamente a $F : B^2 \longrightarrow S^1$.

Definamos $G : S^1 xI \longrightarrow S^1$

$$(\theta, t) \longmapsto G(\theta, t) = F(t, \theta)$$

ya que F es continua, también lo es G.

Ademas

$$G(\theta,0) = F(0,\theta) = F(0,0) \text{ ya que } (0,\theta) = (0,0)\ \forall\theta \in [-2\pi, 2\pi]$$

$$G(\theta,0) = 0 = C_0(\theta) = 0 * \theta = 0$$

Así $G(\theta,0) = 0$ es una función círculo constante 0 y por tanto tiene grado 0.

Pero $G(\theta,1) = F(1,\theta) = f(\theta)$, ya que $F|_{S^1} = f$.

Así $G(\theta,0) = C_0(\theta)$ y $G(\theta,1) = f(\theta)$ son homotópicas y grado de $G(\theta,0)$ es 0. Luego grado de f es 0.

□

Teorema 2.8

Teorema de la no-retracción $2-$dimensional

No existe una retracción del disco B^2 sobre su círculo frontera S^1.

Demostración

Probaremos el teorema por contradicción. Supongamos que existe una retracción $F : B^2 \longrightarrow S^1$.

Esto es F es continua y $F|_{S^1} = id$ $(F(\theta) = 0\ \forall\theta \in S^1)$.

F sería una extensión continua de la identidad $id : S^1 \longrightarrow S^1$ definida por $id(\theta) = \theta$. **Lo que es una contradicción**, con el teorema que establecería que $grad(id)$ sería 0.

Pero $grad(id) = 1$.

Luego no existe retracción de B^2 sobre S^1.

□

Corolario 2.1. *No existe retracción de $\mathbb{R}^2$ sobre S^1.*

Demostración

Por reducción al absurdo. Si existese una retracción $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1$, esto es; G continua y $G|_{S^1} = id_{S^1}$.

Entonces la restricción $F : G|_{B^2} : B^2 \longrightarrow S^1$ sería continua y $F|_{S^1} = G|_{S^1} = id_{S^1}$.

Esto es, F sería una retracción de B^2 sobre S^1. Lo que contradice al teorema de no retracción.

Luego, no existe retracción de $\mathbb{R}^2$ sobre S^1.

□

Ahora probaremos la equivalencia entre el teorema de no retracción $2-$dimensional y la propiedad del punto fijo del disco B^2.

Teorema 2.9

El disco B^2, como subespacio de $\mathbb{R}^2$, tiene la propiedad del punto fijo sí, y sólo sí, no existe retracción de B^2 sobre su círculo frontera S^1.

Demostración

$\Rightarrow$) Por reducción al absurdo, supongamos que existe un retracción $F : B^2 \longrightarrow S^1$.
Consideremos la función continua

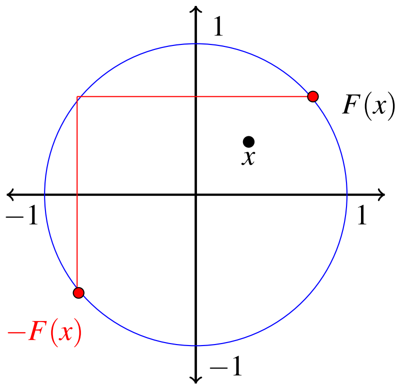
$$q : S^1 \longrightarrow B^2$$

$$x \longmapsto q(x) = -x$$

Sea la función $q \circ F : B^2 \longrightarrow B^2$, que es continua, pues F y q lo son.
$q \circ F$ no tiene punto fijo pues

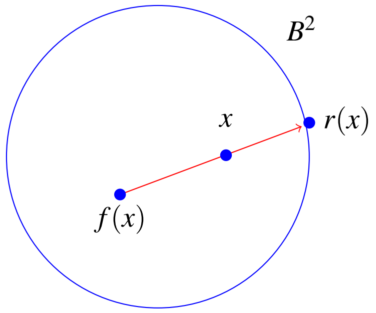
$$x = q \circ F(x) = q(F(x)) = -F(x)$$

Pues algún $x \in B^2$ implicaría una contradicción



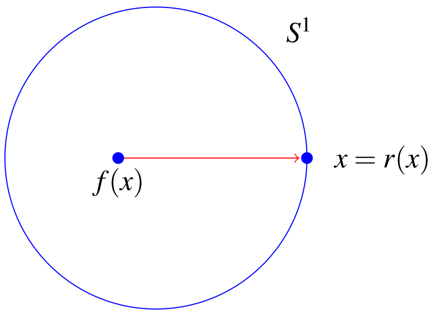
Luego, no existe retracción del disco B^2 del plano real sobre su círculo frontera S^1.

$\Leftarrow$) Nuevamente, por reducción al absurdo, supongamos por reducción al absurdo que el disco B^2 no tiene la propiedad del punto fijo. Esto es, existe una función continua $f: B^2 \longrightarrow B^2$ que no tiene punto fijo.



Definamos $r: B^2 \longrightarrow S^1$ como sigue: Para $x \in B^2$, como f no tiene punto fijo, $f(x) \neq x$. Así consideremos el rayo desde $f(x)$ pasando por x, y sea $r(x)$ el punto de intersección de este rayo con S^1. (Como ilustra la figura)

Claramente $r: B^2 \longrightarrow S^1$ esta bien definida y $r(x) = x$ para todo $x \in S^1$



r es continua. En efecto sea U abierto en S^1.

Probaremos que $r^{-1}(U)$ es abierto en B^2. Para esto, sea $x \in r^{-1}(U)$ y probaremos que existe v abierto en B^2 tal que $x \in V \subset r^{-1}(U)$.

Escojamos, $O_1 = M(f(x))$, $O_2 = M(x)$ bolas abiertas centradas en $f(x)$ y x, respectivamente; contenidas en B^2 y tales que todo rayo comenzando en O_1 y pasando a través de O_2 intersecta a S^1 en U. (Ver figura)

Ya que $f: B^2 \longrightarrow B^2$ es continua, podemos encontrar a V abierto en B^2 tal que $x \in V \subset O_2$ y $f(V) \subset O_1$.

Así, para todo $v \in V$, $v \in O_2$ y $f(v) \in f(V) \subset O_1$.

Por lo tanto, el rayo comenzando en $f(v)$ y pasando por v intersecta a S^1 en U. Esto es, $r(v) \in U$.

Esto prueba que $v \subset r^{-1}(u)$.

En conclusión, hemos probado que si $x \in r^{-1}(u)$, existe V abierto en B^2 tal que

$$x \in V \subset r^{-1}(u)$$

Esto es, $r^{-1}(u)$ es abierto en B^2. Como queríamos probar.
Así $r : B^2 \longrightarrow S^1$ es una retracción, lo que contradice nuestra hipótesis.
Luego B^2 tiene la propiedad del punto fijo.

$\square$

Este teorema, que da la equivalencia entre el teorema de no retracción y la propiedad del punto fijo para el disco B^2, establece el teorema de punto fijo 2- dimensional.

Teorema 2.10

Teorema de Punto fijo de Brouwer $2-$**dimensional**

Cada función continua $f : B^2 \longrightarrow B^2$ tiene un punto fijo.

3

Aplicación: La existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro

El teorema de punto fijo de Brouwer proporciona múltiples resultados en que únicamente es necesario tener la certeza de que el punto fijo existe, sin importar explícitamente que punto es. Esto sucede en resultados que aseguran la existencia de cualquier elemento o propiedad, como es el caso de la aplicación que se recoge a continuacion: la existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro. Veremos que necesitaremos que exista un punto fijo para una función asociada al problema de existencia de distribuciones de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro, pero carecerá de relevancia cualquier información sobre este punto, como su localización o descripción.

En 1932, John Von Neumann (1903-1957) dio un seminario en Princeton titulado ‶Sobre un Sistema de Ecuaciones Económicas y una Generalización del Teorema del Punto Fijo de Brouwer″. En él, describió como la teoría del punto fijo podría utilizarse para probar la existencia de equilibrios en los modelos económicos. Las generalizaciones y aplicaciones de este concepto han dado lugar a Premios Nobel en economía para Kenneth Arrow en 1972 y Gerard Debreu (1921-2004) en 1983. Las aplicaciones a la teoría de juegos, también condujeron a un Premio Nobel de economía para el matemático John Nash en 1994.

Veamos un ejemplo particularmente simple como punto de partida. Supongamos que tenga una economía con solo tres artículos disponibles. Estos son azúcar, mantequilla, y arroz. La cantidad total de cada uno, en libras, se denomina suministro, y los tres suministros se indican S_C, S_B y S_G, respectivamente. Hacemos un seguimiento de el suministro de cada artículo en un vector llamado vector de suministro $S = (S_C, S_B, S_G)$.

Hay n individuos comercializando en esta economía. Los denotamos por el enteros $1, 2, .., n$. Cada individuo comienza con un número de cada elemento, colectivamente llamado su paquete de bienes.

El individuo i tiene un paquete $b = (b^i_C, b^i_B, b^i_G)$, un vector tridimensional que da la cantidad de cada elemento en el componente correspondiente. En un momento dado, la suma de todo el paquete los vectores sobre los individuos en la economía dan el vector de oferta,

$$S = \sum_i b^i.$$

Suponemos que ninguno de los artículos se consume o destruye con el tiempo, entonces S es constante. Todos simplemente están acumulando sus bienes y deseosos de una mezcla particular, dependiendo de los precios actuales. Si un individuo quiere más mantequilla y menos azúcar, puede vender parte de su azúcar a otra persona en el precio actual y comprar mantequilla adicional. Sin embargo, si todos lo intentan para deshacerse del azúcar, el precio de la azúcar se reduce.

Denotamos los precios actuales por libra de azúcar, mantequilla y arroz por p_C, p_B y p_G, respectivamente. Entonces representamos este conjunto de precios mediante un único vector de precios $p = (p_C, p_B, p_G)$.

De hecho, es solo el precio relativo de estos artículos lo que importa. El costo particular de cualquier artículo es irrelevante, ya que es la relación de costos la que determina, por ejemplo, cuánta mantequilla se puede comprar cuando se vende una libra de azúcar.

Por lo tanto, dividimos cada uno de los precios individuales por la suma de los precios $p_C + p_B + p_G$ para normalizar la situación. Denotamos los precios resultantes

$$p'_C = \tfrac{p_C}{p_C+p_B+p_G}$$

$$p'_B = \tfrac{p_B}{p_C+p_B+p_G}$$

$$p'_G = \tfrac{p_G}{p_C+p_B+p_G}$$

estos precios normalizados tienen la ventaja de sumar a 1. Para simplificar la notación, eliminamos los números primos en los vectores de precios, pero tenga en cuenta nuestra suposición de que los precios se han normalizado. A continuación, realizamos un seguimiento de estos vectores en nuestro vector de precios general $p = (p_C, p_B, p_G)$ de modo que

$$p_C + p_B + p_G = 1.$$

Además, suponemos que ninguno de estos artículos es tan despreciado por un consumidor que podría pagarle para que se le quite. En otras palabras, los precios nunca son negativos, por lo que

$$p_C \geqslant 0, p_B \geqslant 0 \text{ y } p_G \geqslant 0.$$

Cuando el precio de un artículo es 0, no hay demanda para ese artículo. Cada consumidor preferiría tener los otros dos artículos, sin importar cuán caros sean.
Podemos graficar el conjunto de posibles vectores de precios en el espacios tridimensional. La ecuación $p_C + p_B + p_G = 1$ define un plano. Que los límites de $p_C \geqslant 0, p_B \geqslant 0$ y $p_G \geqslant 0$ nos limita a la parte del plano que se encuentra en el primer octante del el espacio tridimensional, produciendo el triángulo T, como se muestra en la Figura 3.1 Cada punto del triángulo corresponde a una tripleta de precios, uno por cada uno de nuestros tres productos. Será importante para nosotros, al aplicar el Teorema de punto fijo de Brouwer, que T es topológicamente equivalente a un disco.

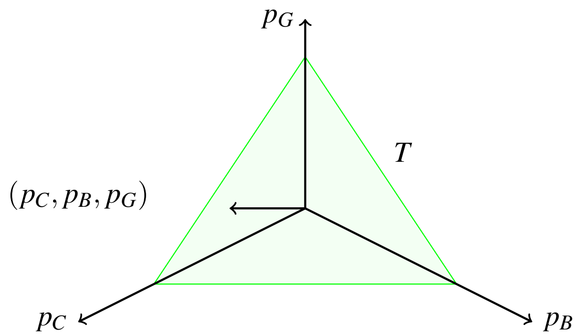


Figura 3.1: El triángulo T

Dado un vector de precios particular p, cada individuo en la economía tiene un cierta cantidad de ‶riqueza″en la forma del valor de su paquete de mercancías. Para el $i-$ésimo consumidor, esta riqueza viene dada por

$$w^i(p) = p \cdot b^i.$$

La riqueza de un individuo puede cambiar dependiendo del vector de precios actual, por lo que representamos esto como una función de p.
En un vector de precios particular p, el conjunto actual de bienes del individuo i puede no ser su elección óptima. Es posible que desee intercambiar ciertos bienes por otros. Haciendo un registro de sus preferencias para un paquete óptimo a un precio p con una demanda vector $d^i(p)$, que da la combinación de elementos que le gustaría tener en estos precios. Suponemos que gasta toda su riqueza en intercambiar su paquete b^i para obtener el haz $d^i(p)$ deseado. Lo expresamos con la siguiente ecuación:

$$w^i(p) = p \cdot b^i = p \cdot d^i(p). \tag{3.1}$$

Ejemplo. Supongamos que Camila tiene una libra de azúcar, una libra de mantequilla, y tres libras de arroz. Entonces ella tiene un paquete de suministro $b^C = (1,1,3)$. En el vector de precios $p = (\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6})$, tiene un patrimonio neto de $p \cdot b^C = \frac{5}{3}$.
Además, suponga que en este vector de precios, ella preferiría una distribución de bienes como dado por el vector de demanda $p \cdot d^C(p) = (2,2,1)$. Como requiere la ecuación 3.1, este vector de demanda está restringido de modo que el costo total de su paquete a estos precios, $p \cdot d^C(p)$, es igual a su patrimonio neto $\frac{5}{3}$.

Por otro lado, supongamos que José tiene un paquete $b^J = (1,2,4)$, lo que le da un patrimonio neto de $\frac{5}{2}$. Para el mismo vector de precios p, tiene un vector de demanda de $d^J(p) = (6,2,\frac{3}{2})$. Observe que a José le gusta la azúcar más que a Camila, ya que desea convertir proporcionalmente más de su riqueza en azúcar que a ella.
Ahora, si los precios cambian, los vectores de demanda también pueden cambiar. Por ejemplo, si el vector de precios es $p' = (\frac{4}{10}, \frac{1}{10}, \frac{5}{10})$, entonces el patrimonio neto de Camila aumenta a $p' \cdot b^C = 2$. Al ver un precio tan bajo de la mantequilla, es posible que desee abastecerse de ella y elegir un vector de demanda $d^C(p') = (1,11,1)$. Aquí también, su patrimonio neto no cambia (se mantiene en 2), pero ha convertido gran parte de él en un gran suministro de mantequilla a bajo precio.
Cada consumidor i tiene una función de demanda con valor vectorial d^i que mapea el precio vectores en T al vector de demanda correspondiente del consumidor. Sumando los vectores de demanda individuales para todos los consumidores producen el vector de demanda $D(p)$ para toda la economía al vector de precios dado p.
Por lo tanto,

$$D(p) = \sum_i d^i(p).$$

Suponemos que esta función D con valor vectorial es continua en el sentido de que pequeños cambios en el vector de precios causan pequeños cambios en la demanda general.
Dado que $p \cdot d^i(p)$ es el patrimonio neto del individuo i dado el vector de precios p, el punto el producto punto $p \cdot D(p)$ es igual a la riqueza total de la comunidad dados esos precios. Tenga en cuenta que

$$p \cdot D(p) = \sum_i p \cdot d^i(p) = \sum_i p \cdot b^i = p \cdot S.$$

Esto da la conocida ley de Walras en economía

Ley de Walras: $p \cdot D(p) = p \cdot S$**.**

Esta relación lleva el nombre de Leon Walras (1829-1910), uno de los primeros economistas en poner este campo sobre una base matemática.
Si la coordenada de $D(p)$ correspondiente a la azúcar es mayor que la coordenada del vector de suministro S correspondiente a la azúcar, entonces a este precio hay más demanda de azúcar que oferta, esto elevará el precio de la azúcar.
Sin embargo, si a los precios actuales, todos pueden obtener su elección óptima de bienes y no comercializan ninguna de sus cantidades actuales de cada artículo, entonces la economía está en equilibrio.
Sea v_j denota el $j-$ésimo componente de un vector v.

Definición 3.1
Un vector de precios p es un vector de precios de equilibrio si $D_j(p) \leqslant S_j$ para todos los j.

Para tal vector de precios, la oferta de cada artículo excede la demanda. Todos pueden obtener su elección óptima de productos, nadie desea más intercambio. Aunque la demanda de un artículo puede ser estrictamente menor que la suministro total de ese artículo, esto no necesariamente reduce el precio de ese elemento. Ya que los precios son relativos y todos pueden tener suficiente del otro producto, el precio del artículo en exceso de oferta no necesita caer.
¿Existe un vector de precios de equilibrio? ¿Puede la economía estar en equilibrio? veremos que la respuesta es sí usando el teorema de punto fijo de Brouwer. Para hacerlo, definimos una función $f : T \longrightarrow T$ que mapea el conjunto de posibles vectores de precios en sí mismo y nos dice cómo la demanda de artículos hace que los precios cambien.
Para ver cómo cambian los precios, consideramos el siguiente vector:

Definición 3.2
El vector de exceso de demanda se define por $E(p) = D(p) - S$.

Las coordenadas del vector $E(p)$ nos dicen si hay o no más demanda o más oferta para los artículos a los precios en el vector p. Si la coordenada de $E(p)$ es positiva, esperamos que el precio del artículo correspondiente aumente ya que hay más demanda que oferta. La gente quiere más de este producto a este precio de lo que está disponible. Sin embargo, si la coordenada es negativa, las condiciones podrían hacer bajar el precio de este artículo, ya que hay más oferta que demanda a este precio.
Usando el vector de exceso de demanda, la ley de Walras ahora se puede reescribir:

Segunda forma de la ley de Walras:

$$p \cdot E(p) = 0. \tag{3.2}$$

Dado un vector de precios p, el vector $E(p)$ apunta en la dirección en la que esperamos que los precios se muevan desde p. A partir de él, podemos construir una función f que lleve cada vector de precios p en T a otro vector de precios $f(p)$ en T hacia el que esperaríamos que se moviera el vector p. De ahí habremos creado un mapa continuo de T de vuelta a sí mismo. El teorema del punto fijo de Brouwer bidimensional nos dice que esta función debe tener un punto fijo. En otras palabras, existe un vector de precios p tal que no hay incentivo para intercambiar bienes cuando los precios están en p. A ese precio, toda la economía está en equilibrio.

El resto en este capítulo está dedicado a hacer que esta idea sea matemáticamente precisa definiendo adecuadamente $f : T \longrightarrow T$ y demostrando que un punto fijo de f corresponde a un vector de equilibrio de precios.

Comenzamos definiendo una función $f^* : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ por $f^*(p) = p + E(p)$. Esta función nos da una idea de cómo deben moverse los precios debido al exceso de oferta o demanda.

Sin embargo, hay un problema fundamental con esta definición de f^*. No necesariamente envía vectores de precios en T de vuelta a vectores de precios en T. Los vectores que resultan pueden tener entradas negativas, y sus coordenadas no necesariamente suman 1. Necesitamos remediar estos problemas para que podamos estar en condiciones de aplicar el teorema de punto fijo de Brouwer.

Para hacer que todas las entradas no sean negativas, definimos v^+ como el vector obtenido de un vector v cambiando todas las entradas negativas en 0 entradas.

Luego definimos nuestra nueva función mejorada para que sea $f^{**}(p) = (p + E(p))^+$.

La función f^{**} asigna T al primer octante en $\mathbb{R}^3$, pero $f^{**}(p)$ no necesita estar en T, ya que sus entradas no necesariamente suman 1. Sin embargo, al "normalizar" $f^{**}(p)$, es decir, dividir el vector resultante por la suma de sus entradas, obtenemos un vector en T. Es importante tener en cuenta que al menos una coordenada de $p + E(p)$ es positiva y, por lo tanto, al normalizar $f^{**}(p)$ no estamos dividiendo por 0.

Con $(p + E(p))_j^+$ representando la $j-$ésima entrada de $(p + E(p))^+$, dejamos que $\beta(p) = \sum_{j=1}^{3} (p + E(p))_j^+$, y definimos nuestra función deseada, mapeando T a sí misma, de la siguiente manera:

Definición 3.3
La función de cambio de precio $f : T \longrightarrow T$ se define por

$$f(p) = \frac{(p+E(p))^+}{\beta(p)}$$

La figura 3.2 muestra un ejemplo de los vectores p, $E(p)$, $p+E(p)$, $(p+E(p))^+$, y $f(p)$ para una situación bidimensional, a diferencia de las tres-dimensiones el que hemos estado considerando. La segunda forma de la Ley de Walras implica que p y $E(p)$ deben ser perpendiculares.

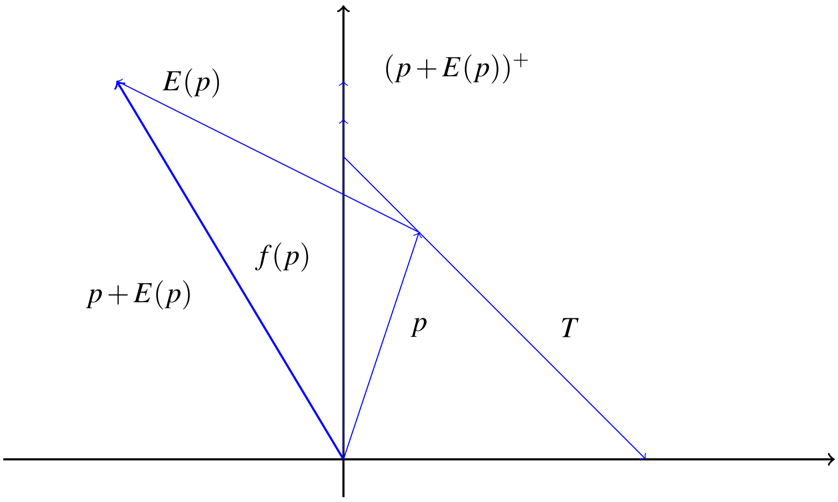


Figura 3.2: Los vectores.

El hecho de que $D(p)$ sea continuo implica que la función de cambio de precio $f(p)$ también es continuo. Ahora, estamos listos para aplicar el Teorema de Punto Fijo de Brouwer Bidimensional. Dado que $f : T \longrightarrow T$ es una función continua y T es un disco, debe ser un vector de precios p^* tal que $f(p^*) = p^*$. Es decir, hay algunos vector de precio que está fijado por f.
Mostramos, de hecho, que dicho vector es el vector de precios de equilibrio que buscamos.

Teorema 3.1
Los puntos fijos de la función de variación de precios f son vectores de equilibrio de precios.

Para probar este teorema, necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.1. *Si p^* es un punto fijo de f, entonces $\beta(p^*) = 1$.*

Demostración

Como p^* es un punto fijo de f, tenemos

$$f(p^*) = \frac{(p^* + E(p^*))^+}{\beta(p^*)} = p^*. \tag{3.3}$$

Esto implica que, para $j = 1,2,3$,

$$(p^* + E(p^*))_j^+ = \beta(p^+)p_j^+. \tag{3.4}$$

Sea α un valor de índice (igual a 1, 2 o 3) tal que $p_\alpha^* > 0$. Tal α existe ya que la suma de las entradas de p^* es 1. Ya que $\beta(p^*) > 0$ de la Ecuación 3.4 se deduce que

$$(p^* + E(p^*))_\alpha^+ > 0.$$

Por lo tanto

$$(p^* + E(p^*))_j^+ = (p^* + E(p^*))_\alpha$$

Volviendo a conectar esto a la Ecuación 3.4, tenemos

$$(p^* + E(p^*))_\alpha = \beta(p^*)p_\alpha^*,$$

y por lo tanto

$$E_\alpha(p^*) = (\beta(p^*) - 1)p_\alpha^*,$$

Multiplicando ambos lados por p_α^*, obtenemos

$$p_\alpha^* \cdot E_\alpha(p^*) = (\beta(p^*) - 1)p_\alpha^* p_\alpha^* \tag{3.5}$$

Aunque derivamos la ecuación 3.5 con la suposición de que $p_\alpha^* > 0$, la ecuación también se mantiene cuando $p_\alpha^* = 0$ ya que se reduce a $0 = 0$.
Por lo tanto, como p_j^* es no negativo, la ecuación 3.5 es válida para todos los p_j^*. Ahora, sumando la ecuación 3.5 sobre todo $j's$, obtenemos

$$p^* \cdot E(p^*) = \sum_{j=1}^{3} p_j^3 \cdot E_j(p^*)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (\beta(p^*) - 1)p_j^* p_j^*$$

$$= (\beta(p^*) - 1) \sum_{j=1}^{3} p_j^* p_j^*$$

$$= (\beta(p^*) - 1)p^* p^*.$$

Por la segunda forma de la Ley de Walras (Ecuación 3.2). $p^* \cdot E(p^*) = 0$.

Luego, $0 = (\beta(p^*) - 1)p^* p^*$. Ya que $p^* \in T$, sigue que $p^* \cdot p^* = 1$.

Por lo tanto, debe ser que $\beta(p^*) - 1 = 0$, lo que implica que $\beta(p^*) = 1$, como se deseaba.

□

Con la ayuda del Lema 3.1, ahora podemos probar el Teorema 3.1.

Demostración del Teorema 3.1

Sea p^* un punto fijo para f. Entonces $f(p^*) - p^*$.

Como $\beta(p^*) = 1$, la Ecuación 3.3 se convierte en

$$(p^* + E(p^*))^+ = p^*,$$

que en realidad son tres ecuaciones de la forma

$$(p^* + E(p^*))_j^+ = p_j^*. \tag{3.6}$$

Consideremos dos posibilidades para p_j^*: bien $p_j^* = 0$ o bien $p_j^* > 0$ tenga en cuenta que todos los precios deben ser no negativos.

Si $p_j^* = 0$, entonces $(p^* + E(p^*))_j^* = 0$. Por lo tanto $E_j(p^*)^+ = 0$, y de ello se sigue que $E_j(p^*) \leqslant 0$.

Esto significa que no hay exceso de demanda de punto j en este caso.

Ahora, considere el caso en el que $p_j^* > 0$. Luego, por la Ecuación 3.6, $(p^* + E(p^*))_j^+ > 0$. Así,

$$(p^* + E(p^*))_j^+ = (p^* + E(p^*))_j.$$

Conectando de nuevo en la Ecuación 3.6, obtenemos $(p^* + E(p^*))_j = p_j^*$ y por lo tanto $E_j(p^*) = 0$.

En conjunto, estos casos implican que $E_j(p^*) \leqslant 0$ para todos los j.

Por lo tanto, $D_j(p^*) \leqslant S_j$ para todo j y p^* es un vector de precios de equilibrio.

□

Cuando tenemos un vector de precios de equilibrio p^*, donde $D_j(p^*) \leqslant S_j$ para todo j, decimos que los mercados están claros. Todos pueden lograr su vector de demanda. El Teorema de Punto Fijo de Brouwer nos dice que existe tal precio. Así todos pueden estar tranquilos.

Nada de lo que hemos dicho dependía del hecho de que teníamos tres puntos disponible. Lo mismo se aplicaría a una economía con cientos de miles de artículos y millones de individuos. Por supuesto, establecer el resultado para un ajuste general requeriría el Teorema de Punto fijo de Brouwer $n-$dimensional.

CONCLUSIÓN

Una vez concluida la investigación nos dimos cuenta que en efecto el teorema de punto fijo de Brouwer nos ayuda a probar la existencia de distribución de equilibrio de precios en una economía de intercambio puro, puesto que se trata de un modelo económico y se base en la oferta y demanda de los bienes que se aplica a una economía con cientos de miles de bienes y millones de individuos, y que dicho equilibrio se encuentra en el mercado que está en constante cambio. Entonces lo expuesto en este trabajo hace evidente la fuerte relación que tiene el área de la Matemática con la Economía, debido a que genera una valiosa ayuda para simplificar, aclarar y verificar su razonamiento para construir modelos que permitan llevar a interesantes conclusiones, puesto que muchos de ellos son vistos en nuestro día a día.

Bibliografía

[A08] **ADAMS, C. & FRANZOSA, R.** *Introduction to topology: pure and applied*. India: Pearson, 2008.

[B22] **BARGE, H. & ZAMORA, A.** *Topología* [en línea]. Madrid: Sanz y Torres, 2021. [Consulta: 15 octubre 2022]. Disponible en https://books.google.com.ec/books?id=e6iAEAAAQBAJ&pg=PA44&dq=topología&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwj9jOnZgMX8AhV0SzABHcY3Cko4ChDoAXoECAgQAg#v=onepage&q=topología&f=false

[D66] **DUGUNGJI, J.** *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[G20] **GARCÍA, D.** Teoremas del punto fijo y aplicaciones. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad de Barcelona, Matemáticas e Informática. Barcelona. 2020. pp. 1-48. [Consulta: 02 mayo 2022]. Disponible en http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/164998/2/164998.pdf.

[G19] **GARCÍA, M.** Una aplicación de la teoría del punto fijo a la teoría económica. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad autónoma del estado de México, Ciencias. México 2019. pp.1-59. [Consulta: 02 julio 2022]. Disponible en https://repositorioslatinoamericanos.uchile.cl/handle/2250/3094488

[H02] **HATCHER, A.** *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[K21] **KOSNIOWSKI, C.** *Topología Algebraica* [en línea]. Barcelona-España: Reverté, 2021. [Consulta: 03 diciembre 2022]. Disponible enhttps://books.google.com.ec/books?id=vuAbEAAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=introduccion+a+la+topologia+algebraica&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwi0lPSp-cT8AhWGTTABHVXXCVM4ChDoAXoECAkQAg#v=onepage&q=introduccion%20a%20la%20topologia%20algebraica&f=false

[M02] **MACHO, M.** *Topología General*. Marta Macho Stadler, 2002.

[M82] **MASSEY, W.** *Introducción a la topología algebraica* [en línea]. Barcelona: Reverté, 1982. [Consulta: 25 septiembre 2022]. Disponible en https://books.google.com.ec/books?

id=GsSvt-KcUi8C&printsec=frontcover&dq=introduccion+a+la+topologia+algebraica&hl=es&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=introduccion%20a%20la%20topologia%20algebraica&f=false

[M09] **MEDINA, S.** Teoremas de punto fijo para multifunciones y aplicacón al equilibrio walrasiano. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Prosgrado) Universidad de Murcia. Murcia. 2009. pp. 1-83 [Consulta: 06 julio 2022]. Disponible en https://webs.um.es/beca/Investigacion/SergioMaster.pdf

[M06] **MORALES, J.** La teoría del punto fijo para un par de funciones. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad de los Andes, Ciencias, Departamento de Matemáticas. Colombia. 2006. pp. 1-90 [Consulta: 13 junio 2022]. Disponible en https://docplayer.es/23634673-La-teoria-del-punto-fijo-para-un-par-de-funciones.html

[M00] **MUNKRES, J.** *Topology* [en línea]. Madrid-España: Prentice Hall, 2000. 2nd ed. [Consulta: 11 mayo 2022]. Disponible en https://psm73.files.wordpress.com/2009/11/topologia-munkres.pdf

[M03] **MUÑOZ, J.** *Topología Básica* [en línea]. Bogotá-Colombia: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Física y Naturales, 2003. [Consulta: 11 agosto 2022]. Disponible en file:///C:/Users/USER_HP/Downloads/ACCEFVN-AC-spa-2003-Topología20básica..pdf

[N08] **NICHOLSON, W.** *Teoría microecoómica. Principios básicos y aplicaciones*. México: Cengage Learning, 2008.

[L70] **LIPSCHUTZ, S.** *Topología General*. Colombia: McGraw Hill, 1970.

[O08] **ORDOÑES, D.** Una aplicación de lógica modal a la teoría del equilibrio general. [En línea] (Trabajo de Titulación). (Pregrado) Universidad de los Andes, Ciencias, Departamento de Matemáticas. Colombia. 2008. pp. 1-51. [Consulta: 06 junio 2022]. Disponible en https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/24229/u365015.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[P12] **PRIETO, C.** *Topología Básica*. Ediciones Cientificas Universitarias, 2012. Vol. 1, pág. 677.

[R00] **RUBIANO, G**. *Topología Gneral* [en línea]. Bogotá-Colombia: Universidad Nacinal de Colombia, 2000. [Consulta: 15 agosto 2022]. Disponible en https://books.google.com.ec/books?id=lVsff1JINwYC&printsec=frontcover&dq=introduccion+a+la+topologia+algebraica&hl=es&sa=X&ved=

2ahUKEwiUmNq5-8T8AhUVQjABHc3FDw84FBDoAXoECAgQAg#v=onepage&q=introduccion%20a%20la%20topologia%20algebraica&f=false

[S63] **SIMMONS, G.** *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Tokyo: McGraw-Hill/Kogakusha, 1963.

UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y DOCUMENTAL

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 18 / 05 / 2023

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: Evelyn Elizabeth Pilachanga Toaza
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemática
f. Analista de Biblioteca responsable: Ing. Rafael Inty Salto Hidalgo

0783-DBRA-UTP-2023