



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

Implementación del método de Crank–Nicolson para resolver la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre para estudiantes de cuarto semestre, Carrera de Telecomunicaciones de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

EDISSON WILFRIDO LASCANO MORA

Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo, presentado ante el Instituto de Posgrado y Educación Continua de la ESPOCH, como requisito parcial para la obtención del grado de:

MAGÍSTER EN MATEMÁTICA, MENCIÓN MODELACIÓN Y DOCENCIA

Riobamba – Ecuador

Agosto de 2023

DECLARACIÓN DE AUTENTICIDAD

Yo, Edison Wilfrido Lascano Mora, declaro que el presente **Trabajo de Titulación Proyectos de Investigación y Desarrollo**, es de mi autoría y que los resultados del mismo son auténticos y originales. Los textos constantes en el documento que provienen de otra fuente están debidamente citados y referenciados.

Como autor, asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Titulación de Maestría, el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, agosto de 2023



#firmado_digitalmente_por
EDISSON WILFRIDO
LASCANO MORA

EDISSON WILFRIDO LASCANO MORA

No. Cédula: 180209344-1

©2023, Edison Wilfrido Lascano Mora

Se autoriza la reproducción total o parcial con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

EL TRIBUNAL DEL TRABAJO DE TITULACIÓN CERTIFICA QUE:

El Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo, titulado: "Implementación del método de Crank—Nicolson para resolver la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre para estudiantes de cuarto semestre, carrera de Telecomunicaciones de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo", de responsabilidad del señor Edison Wilfrido Lascano Mora, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del trabajo de titulación, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos y legales; en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

Dra. Silvia Mariana Haro Rivera; Mgtr.

PRESIDENTA



Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
SILVIA MARIANA HARO
RIVERA

Ing. Deysi Margoth Guanga Chunata, Mgtr.

DIRECTOR



Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
DEYSI MARGOTH
GUANGA CHUNATA

Dr. Klever Hernán Torres Rodríguez, Mgtr.

MIEMBRO



Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
KLEVER HERNAN
TORRES RODRIGUEZ

Dr. Franklin Marcelo Coronel Maji, Mgtr.

MIEMBRO



Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
FRANKLIN MARCELO
CORONEL MAJI

Riobamba, agosto de 2023

DEDICATORIA

A mi padre y a mi madre, como un pequeño homenaje por su lucha, por su amor, por su esfuerzo, por su fe, por su constancia, por su entrega, por su incondicional apoyo, por creer en mí.

A mi familia, por creer en mí y por su apoyo incondicional.

A mi hijo, José Alberto: razón de vida, con amor.

A mis amigos, por ser compañeros de vida.

Edisson

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, al Único Dios Verdadero. Gracias.

A mi padre y a mi madre, millones de gracias.

A mi hijo, José Alberto, por acompañarme en todo momento. Millones de gracias, hijo.

A mis hermanos, millones de gracias.

A mi familia, gracias imperecederas.

A mis amigos, en especial a Franklin, muchas gracias.

A mis tutores, infinitas gracias.

A mis maestros, muchas gracias.

Al MSc. Pedro Cornejo: por toda la ayuda, por su nobleza, por su desinterés, por la guía; infinitas gracias.

A la Dra. Silvia Haro: muchas gracias por su enorme ayuda, otorgada cuando la pedí y cuando no la pedí.

A todos quienes aportaron de una u otra forma para hacer realidad este proyecto de vida, gracias.

Simplemente, sinceramente: gracias.

Edisson

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	xiii
SUMMARY	xiv

CAPÍTULO I

1	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	Planteamiento del problema.....	1
1.2	Situación problemática	1
1.3	Justificación de la investigación	2
1.3.1	<i>La ecuación del calor con incertidumbre. Antecedentes</i>	2
1.3.2	<i>Conceptos fundamentales de la Teoría de la Incertidumbre de Liu</i>	3
1.3.3	<i>Expresión general de la ecuación del calor con incertidumbre</i>	6
1.3.4	<i>El concepto de la α-trayectoria, valor esperado y extremo para la solución de la ecuación del calor con incertidumbre</i>	7
1.4	Métodos de resolución.....	8
1.4.1	<i>El método de diferencias finitas</i>	8
1.4.2	<i>Método de Elementos Finitos</i>	9
1.5	Objetivo General y preguntas de investigación	9
1.6	Objetivos específicos	10
	CAPÍTULO II	11

2	MARCO TEÓRICO	11
2.1	Antecedentes del problema.....	11
2.1.1	<i>Ecuación del calor unidimensional</i>	11
2.1.2	<i>Diferencias hacia delante, hacia detrás y centrada</i>	12
2.1.3	<i>Métodos de Euler aplicados a la ecuación del calor unidimensional</i>	14
2.1.4	<i>Método de Euler hacia delante</i>	15
2.1.5	<i>Método de Euler hacia atrás</i>	16
2.2	El método de Crank-Nicolson aplicado a la ecuación del calor con incertidumbre.....	17
2.2.1	<i>Algoritmos de Crank-Nicolson para el cálculo de las α –trayectorias, el valor esperado y el valor máximo.</i>	19
2.3	Ejercicios de aplicación.....	22
2.3.1	<i>Ejemplos de α –trayectorias.</i>	22
2.3.2	<i>Valores esperados</i>	24

2.3.3	Valores extremos	26
-------	------------------------	----

CAPÍTULO III

3.	METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	28
3.1	Descripción matemática.....	29
3.2.	MEF para problemas parabólicos.....	32
3.2.1	Algoritmos de Galerkin para el cálculo de las α –trayectorias, el valor esperado y el valor máximo.....	34
3.2.2	Ejemplos de α –trayectorias.....	37

CAPÍTULO IV

4.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	38
4.1	Errores de aproximación numérica.....	38
4.1.1	Estimación del error.....	38
4.2	Estabilidad numérica	39
4.3	Estimación de Error y Estabilidad en los Métodos de Diferencias Finitas	40
4.4	Análisis del error en el Método de Elementos Finitos.....	42
4.5	Comparación de errores y tiempo de cálculo para los métodos de Galerkin y Crank-Nicolson	43
4.6	Resultados y discusión	46
4.7	Solución de la EDO	47
4.8	Resultados de la socialización.....	49
4.9	Análisis de resultados de las encuestas planteadas a los estudiantes.....	53
	CONCLUSIONES.....	57
	RECOMENDACIONES.....	58

GLOSARIO

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1-2:	Algoritmo de Crank-Nicolson para obtener las α –trayectorias asociadas a la ecuación (10).....	19
Tabla 2-2:	Algoritmo para el cálculo del valor esperado utilizando el método de Crank-Nicolson	20
Tabla 3-2:	Algoritmo para el cálculo de los valores extremos utilizando en método de Crank-Nicolson	21
Tabla 1-3:	Algoritmo de Galerkin para obtener las α –trayectorias asociadas a la ecuación (10).....	35
Tabla 2-3:	Algoritmo para el cálculo del valor esperado utilizando el método de Galerkin.	35
Tabla 3-3:	Algoritmo para el cálculo de los valores extremos utilizando en método de Galerkin	36

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1-2:	Solución $Ux, t\alpha$ de la ecuación (66) con $\alpha = 0.6$, utilizando el método de Crank-Nicolson	23
Gráfico 2-2:	Solución $Ux, t\alpha$ de la ecuación (67) con $\alpha = 0.7$, utilizando el método de Crank-Nicolson.....	24
Gráfico 3-2:	Solución $Ux, t\alpha$ de la ecuación (68) con $\alpha = 0.3$, utilizando el método de Crank-Nicolson	24
Gráfico 4-2:	Valor esperado para la ecuación (66), tomando $t \in 0, 1, x \in 0, 20, m = 200, n = 200$	25
Gráfico 5-2:	Valor esperado para la ecuación (67), tomando $t \in 0, 1, x \in 0, 20, m = 200, n = 200$	25
Gráfico 6-2:	Valor esperado para la ecuación (68), tomando $t \in 0, 2, x \in 0, 2, m = 400, n = 20$	26
Gráfico 7-2:	Valores extremos para la ecuación (66), tomando $t \in 0, 1, x \in 0, 20, m = 1000, n = 200$	26
Gráfico 8-2:	Valores extremos para la ecuación (67), tomando $t \in 0, 1, x \in 0, 20, m = 200, n = 200$	27
Gráfico 1-3:	Valores extremos para la ecuación (68), tomando $t \in 0, 1, x \in 0, 2, m = 400, n = 20$	28
Gráfico 2-3:	Diagrama de una malla y las funciones base descritas en (77)	31
Gráfico 3-3:	Solución $Ux, t\alpha$ de la ecuación (66) con $\alpha = 0.6$, utilizando el método de Galerkin	37
Gráfico 1-4:	Salida del programa de Matlab en el que se implementaron los algoritmos.....	43
Gráfico 2-4:	Comparación entre los errores y tiempos de cálculo utilizando los métodos de Crank-Nicolson y Galerkin para distintas α –trayectorias y distintos valores de m	43
Gráfico 3-4:	Comparación entre los errores y tiempos de cálculo utilizando los métodos de Crank-Nicolson y Galerkin para distintos valores de m	44
Gráfico 4-4:	Comparación entre los errores y tiempos de cálculo utilizando los métodos de Crank-Nicolson y Galerkin para distintas α –trayectorias.	45
Gráfico 5-4:	Gráficas de las soluciones numérica y analítica de (111)	48
Gráfico 6-4:	Percepción de los estudiantes acerca de la utilidad de los problemas de ecuaciones diferenciales con incertidumbre.	54

Gráfico 7-4:	Frecuencia con la que los estudiantes revisan material sobre ecuaciones diferenciales.....	54
Gráfico 8-4:	Probabilidad de aplicación de problemas con incertidumbre VS la utilidad de estudiar problemas con incertidumbre.....	55
Gráfico 9-4:	Comparativa de estudiantes que programan sus propios scripts frente a los que desean aprender un lenguaje de programación.....	56

ÍNDICE DE ANEXOS

- ANEXO A:** CÓDIGO PARA RESOLVER LA ECUACIÓN UNIDIMENSIONAL DEL CALOR CON INCERTIDUMBRE CON EL MÉTODO DE CRANK-NICOLSON
- ANEXO B:** CÓDIGO PARA RESOLVER LA ECUACIÓN UNIDIMENSIONAL DEL CALOR CON INCERTIDUMBRE CON EL MÉTODO DE GALERKIN
- ANEXO C:** CÓDIGO EMPLEADO EN LA CLASE DEMOSTRATIVA

RESUMEN

El objetivo fue implementar el método de Crank-Nicolson para la resolución de la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre y mostrar este desarrollo a estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Telecomunicaciones de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Metodológicamente se realizó un análisis de los métodos de las diferencias finitas, de los elementos finitos y se puso de relieve al método de Euler, como una simplificación, y como un caso particular del método de diferencias finitas. Adicionalmente, se analizó al método de Crank-Nicolson y se lo presentó como una opción viable para resolver el problema, resolviendo varios ejercicios de aplicación. Se profundizó en el análisis del método de diferencias finitas para que este estudio sirva de fundamento para la posterior comparación de las eficiencias de ambos métodos. Se realizó el análisis de errores concomitantes a la aplicación de los métodos numéricos y se analizó la estabilidad de los métodos. Además, se utilizaron como parámetros de comparación el tiempo necesario para el cálculo y el costo computacional de la implementación de los métodos numéricos. Se realizó la difusión de resultados y la socialización de la aplicación del método con estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Telecomunicaciones de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Se presentaron los resultados de la encuesta de satisfacción planteada al mencionado grupo de estudiantes y se demostró la validez estadística de los resultados, por medio del cálculo del Alfa de Cronbach y de un análisis estadístico aplicando el software libre R.

Palabras Claves: MATEMÁTICAS, ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES, MÉTODOS NUMÉRICOS, DISCRETIZACIÓN, INCERTIDUMBRE, MÉTODO DE CRANK-NICOLSON, MÉTODO DE GALERKIN



Trabajo desarrollado por:
LUIS ALBERTO
CAMINOS VARGAS



03-08-2023

0087-DBRA-UPT-IPEC-2023

SUMMARY

The objective was to implement the Crank-Nicolson method to resolve the one-dimensional heat equation with uncertainty and show this development to fourth-semester students of the Telecommunications Career of the Polytechnic School of Chimborazo. Methodologically, an analysis of the finite difference methods of the finite elements was carried out, and Euler's method was highlighted as a simplification and as a particular case of the finite difference method. Additionally, the Crank-Nicolson method was analyzed and presented as a viable option to solve the problem, solving several application exercises. The analysis of the finite difference method was deepened so that this study serves as a foundation for the subsequent comparison of the efficiencies of both methods. The analysis of errors concomitant to the application of the numerical methods was carried out, and the stability of the methods was analyzed. In addition, the time required for the calculation and the computational cost of implementing the numerical methods were used as comparison parameters. The dissemination of results and the socialization of the application of the method with fourth-semester students of the Telecommunications Career of the Higher Polytechnic School of Chimborazo were carried out. The results of the satisfaction survey posed to the group mentioned above students were presented, and the statistical validity of the results was demonstrated using the calculation of Cronbach's Alpha and a statistical analysis applying the free software R.

Keywords: MATHEMATICS, PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, NUMERICAL METHODS, DISCRETIZATION, UNCERTAINTY, CRANK -NICOLSON METHOD, GALERKIN METHOD

CAPÍTULO I

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, son un tema de constante investigación por su importancia intrínseca en las matemáticas y por su gran campo de aplicación en la modelación de fenómenos, tanto naturales como relacionados a procesos industriales, entre otros. La modelación del desarrollo de la pandemia del Covid-19 es un ejemplo de actualidad, en el que se han aplicado las ecuaciones diferenciales. Como es lógico, una vez estructurado el modelo, debe hallarse la solución para obtener predicciones, conclusiones y resultados fiables; es en ese instante cuando resalta la importancia de los métodos numéricos, ya que la mayor parte de las veces las ecuaciones diferenciales (o los sistemas que se involucran) tienen soluciones analíticas muy complejas o, de hecho, no existen soluciones analíticas.

En el campo de la ingeniería, las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) ocupan un lugar trascendente. Estas, usualmente empleadas en la formulación matemática de procesos que suelen estar distribuidos en el espacio y el tiempo, han sido la base para describir nuestra concepción del mundo *más natural*, la de un espacio tridimensional que evoluciona y cambia en el tiempo.

En la teoría clásica de las EDP encontramos tres clasificaciones: elípticas, hiperbólicas y parabólicas. Las primeras que permiten describir procesos estacionarios o de equilibrio. Las hiperbólicas y las parabólicas, representadas respectivamente por la ecuación de la onda y la ecuación del calor, son los modelos representativos de las EDP de evolución.

1.2 Situación problemática

La ingeniería, en general, tiene un margen reducido para cometer errores. Los errores cometidos durante las etapas de diseño o fabricación pueden suponer costes muy elevados, habitualmente económicos y en ocasiones humanos. Es de fundamental importancia minimizar dichos errores y para ello el primer paso es preverlos. Para ello es necesario un adecuado control de aquellos elementos del diseño que sólo pueden conocerse con una determinada precisión o **incertidumbre**. Como un nuevo sistema matemático para modelar los grados de creencia humana, la teoría de la incertidumbre fue establecida por Liu (2007) y perfeccionada por Liu (2009). Se basa en los axiomas de normalidad, dualidad, subaditividad y producto. Un proceso incierto es una secuencia de variables inciertas indexadas por tiempo para describir el comportamiento dinámico de fenómenos, también inciertos.

Por otra parte, el incesante desarrollo de la ciencia demanda el uso de recursos tecnológicos adecuados para la investigación y, al mismo tiempo de métodos más eficientes para enfrentar los nuevos problemas.

En este trabajo de investigación, se propone implementar el método numérico de Crank–Nicolson para resolver la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre con el propósito de determinar su eficiencia.

1.3 Justificación de la investigación

1.3.1 La ecuación del calor con incertidumbre. Antecedentes

En la práctica, una fuente de calor a menudo se ve afectada por la interferencia del ruido. Por esta razón, Walsh (1986) inició una ecuación de calor estocástica impulsada por el proceso de Wiener. En los años siguientes la ecuación estocástica del calor fue estudiada por varios investigadores como Holden et al. (1994) y Swanson (2007). Yang y Yao (2017) mostraron que no es razonable que la ecuación de calor estocástica modele la conducción de calor real, lo cual les motivó a presentar la ecuación de calor con incertidumbres impulsada por el proceso de Liu.

El proceso de Liu (2007) fue diseñado por este como una contraparte del proceso de Wiener para lidiar con el ruido blanco. Desde el establecimiento de la teoría de la incertidumbre (B. Liu, 2009) y su perfeccionamiento (B. Liu, 2010), esta teoría se ha convertido en una nueva rama de las matemáticas para modelar fenómenos no determinísticos. En el marco de la teoría de la incertidumbre, Liu propuso un proceso canónico, el cual se caracteriza por ser un proceso incierto continuo de Lipschitz con incrementos independientes estacionarios. Los incrementos serán variables inciertas normales. Además, Liu introdujo el cálculo incierto para tratar con la diferenciación e integración de procesos inciertos.

La ecuación diferencial con incertidumbre, un tipo de ecuaciones diferenciales impulsadas por procesos de Liu, fue presentada por primera vez por Liu (2008). Posteriormente, Chen y Liu (2010) demostraron el teorema de existencia y unicidad para la solución de una ecuación diferencial con incertidumbre bajo condiciones de crecimiento lineal y condición continua de Lipschitz. Gao, (2012) verificó este teorema bajo la condición de crecimiento lineal local y la condición continua de Lipschitz local. Liu (2009) introdujo el concepto de estabilidad de una ecuación diferencial incierta, y Yao et al., (2013) probaron algunos teoremas de estabilidad. Con base en este trabajo se ampliaron diferentes tipos de estabilidad, por ejemplo, estabilidad en la

media (Kai Yao et al., 2015); estabilidad en el momento (Sheng y Wang, 2014); estabilidad casi segura (H. Liu et al., 2014); y estabilidad exponencial (Sheng y Gao, 2015).

Afortunadamente, Yao y Chen (2013) demostraron que la solución de una ecuación diferencial con incertidumbre se puede representar mediante un espectro de ecuaciones diferenciales ordinarias. Hoy en día, la ecuación diferencial con incertidumbre se ha aplicado ampliamente en muchos campos, como las finanzas (Liu, 2013), el control óptimo incierto (Zhu, 2010) y el juego diferencial incierto (Zhang et al., 2021).

1.3.2 Conceptos fundamentales de la Teoría de la Incertidumbre de Liu

(Yang, 2018; Yang & Ralescu, 2015; Gao, 2016)

En esta sección introduciremos algunos conceptos y teoremas de la Teoría de la Incertidumbre presentada por Liu (2010).

Definición 1.1. Sea \mathcal{L} una σ -álgebra en un conjunto no vacío Γ . La función $\mathcal{M}: \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$ se dice medida incierta si cumple con los siguientes axiomas:

1. (Normalidad) $\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$ para el conjunto universal Γ .
2. (Dualidad) $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = 1$ para cualquier evento Λ .
3. (Subaditividad) Para cualquier sucesión contable de eventos $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ se tiene

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} \quad (1)$$

4. (Producto) Sean $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ espacios inciertos para $k = 1, 2, \dots$. La medida incierta producto \mathcal{M} es una medida incierta que satisface

$$\mathcal{M}\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_k\} \quad (2)$$

Siendo Λ_k eventos arbitrarios de \mathcal{L}_k para $k = 1, 2, \dots$ respectivamente.

Teorema 1.2. (Teorema de Monotonía) Una medida incierta \mathcal{M} es una función monótona creciente. Esto es que, para todo $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ se tiene que:

$$\mathcal{M}\{\Lambda_1\} \leq \mathcal{M}\{\Lambda_2\} \quad (3)$$

Definición 1.3. Una variable incierta ξ es una función de un espacio incierto $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ al conjunto de los números reales, tal que, para cada conjunto de Borel de números reales, el conjunto

$$\{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \xi(\gamma) \in B\} \quad (4)$$

es un evento.

La distribución incierta $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de una variable incierta ξ se define como $\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\}$. Además, una distribución incierta se dice regular si es una función continua y estrictamente creciente con respecto a x , en la cual, $0 < \Phi(x) < 1$ y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$$

Sea ξ una variable incierta con una distribución regular incierta Φ , llamamos función inversa $\Phi^{-1}(\alpha)$ a la inversa de la función de distribución incierta de ξ . Las variables inciertas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ se dicen independientes si:

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^m \{\xi_i \in B_i\}\right\} = \bigwedge_{i=1}^m \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\} \quad (5)$$

para cualesquiera conjuntos de Borel B_1, B_2, \dots, B_m de números reales.

Teorema 1.4. Sean $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ variables inciertas independientes con distribuciones regulares inciertas $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, respectivamente. Si la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es estrictamente creciente con respecto a x_1, x_2, \dots, x_m y estrictamente decreciente con respecto a $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, entonces $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ es una variable incierta con distribución incierta inversa

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f\left(\Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1 - \alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1 - \alpha)\right) \quad (6)$$

Un proceso incierto es esencialmente una sucesión de variables inciertas indexadas por tiempo para modelar la evolución de fenómenos inciertos.

Definición 1.5. Sea T un conjunto totalmente ordenado y $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ un espacio incierto. Un proceso incierto es una función $X_t: T \times (\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{X_t \in B\}$ es un evento para cualquier conjunto de Borel B de números reales en cada instante de tiempo t .

Un proceso incierto X_t se dice que tiene incrementos independientes si $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ son variables inciertas independientes, siendo t_0 el instante inicial y t_1, t_2, \dots, t_k instantes de tiempo tales que $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$. Un proceso incierto se dice que tiene incrementos estacionarios si, para cualquier $t > 0$, los incrementos $X_{s+t} - X_s$ son variables inciertas idénticamente distribuidas para todo $s > 0$.

Definición 1.6. Un proceso incierto C_t se denomina proceso de Liu si

- i. $C_0 = 0$ y casi todas las trayectorias de muestra son Lipschitz-continuas.
- ii. C_t tiene incrementos estacionarios e independientes
- iii. Cada incremento $C_{s+t} - C_s$ es una variable incierta normal con una distribución incierta

$$\Phi(x) = \left(1 + e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{3t}}} \right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Para poder trabajar con la integración y diferenciación de un proceso de Liu, se define la integral de Liu de la siguiente forma:

Definición 1.7. Sea X_t un proceso incierto y C_t un proceso de Liu. Para cualquier partición del intervalo cerrado $[a, b]$ con $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1} = b$, la finura de la partición se define como $\Delta = \max_{1 \leq i \leq k} |t_{i+1} - t_i|$. La integral del Liu de X_t con respecto a C_t se define como:

$$\int_a^b X_t dC_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k X_{t_i} \cdot (C_{t_{i+1}} - C_{t_i}) \quad (8)$$

asumiendo la existencia casi segura del límite y siendo este finito. En este caso, el proceso incierto X_t se denomina Liu integrable.

Sea $h(t, c)$ una función continuamente diferenciable. Entonces $Z_t = h(t, C_t)$ tiene un diferencial incierto

$$dZ_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t, C_t)dt + \frac{\partial h}{\partial C}(t, C_t)dC_t \quad (9)$$

Definición 1.8. Sea T un conjunto parcialmente ordenado (ej. tiempo \times espacio) y sea $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ un espacio incierto. Un campo incierto es una función $X_t: T \times (\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{X_t \in B\}$ es un evento para cualquier conjunto de Borel B de números reales en cada instante de tiempo t .

1.3.3 Expresión general de la ecuación del calor con incertidumbre

En esta sección, se presentará la forma general de la ecuación del calor con incertidumbre. Estas incertidumbres aparecen como efecto de ruidos que, en aplicaciones prácticas, afectan a la fuente de calor. Para modelar estos ruidos Yang y Yao (2017) propusieron la ecuación del calor con incertidumbre en una dimensión, para la cual el ruido que afecta la fuente de calor es descrito por medio de un proceso de Liu de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{t,x}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U_{t,x}}{\partial x^2} = f(t, x) + \sigma(t, x)\dot{C}_t \\ U_{0,x} = \varphi(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (10)$$

siendo a^2 la difusividad térmica constante ($a > 0$), $\dot{C}_t = \frac{dC_t}{dt}$ denota el ruido blanco, C_t es un proceso de Liu, $f(t, x)$ es una fuente de calor, $\sigma(t, x)$ es el término de difusión de la fuente de calor y $\varphi(x)$ es una temperatura inicial dada en $t = 0$. Yang y Yao demostraron que la solución para la ecuación de calor con incertidumbre anterior es

$$\begin{aligned} U_{t,x} = & \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, x-y)\varphi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s, x-y)f(s, y)dy ds \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s, x-y)\sigma(s, y)dy dC_s \end{aligned} \quad (11)$$

Dónde

$$K(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \quad (12)$$

Para una ecuación del calor general con incertidumbre

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{t,x}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U_{t,x}}{\partial x^2} = f(t, x, U_{t,x}) + \sigma(t, x, U_{t,x})\dot{C}_t \\ U_{0,x} = \varphi(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (13)$$

dónde $\varphi(x)$ es una función acotada real, Yang y Ni (2019) demostraron un Teorema de Existencia y Unicidad de la solución, bajo condiciones de crecimiento lineal

$$|f(t, x, u)| + |\sigma(t, x, u)| \leq L(1 + |u|), \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (14)$$

y con la condición de Lipschitz:

$$|f(t, x, u) - f(t, x, v)| + |\sigma(t, x, u) - \sigma(t, x, v)| \leq L(u - v), \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (15)$$

para alguna constante L . Para la ecuación (10), su solución (11) es única si $f(t, x)$, $\sigma(t, x)$ y $\varphi(x)$ son funciones acotadas.

1.3.4 El concepto de la α -trayectoria, valor esperado y extremo para la solución de la ecuación del calor con incertidumbre

En esta sección se introduce el concepto de α -trayectoria para la ecuación del calor con incertidumbre, el cual es de gran importancia en la resolución numérica de la misma.

Definición 1.9. Sea α un número real, tal que $0 < \alpha < 1$. La ecuación del calor con incertidumbre (13) se dice que posee una α -trayectoria $U_{t,x}^\alpha$ si esta resuelve la correspondiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial x^2} = f(t, x, U_{t,x}^\alpha) + |\sigma(t, x, U_{t,x}^\alpha)| \Phi^{-1}(\alpha) \quad (16)$$

dónde $\Phi^{-1}(\alpha)$ es la distribución inversa incierta normal, o sea,

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (17)$$

Sea ahora $J(\cdot)$ una función monótona y $U_{t,x}$ una solución de (16). Definimos el valor esperado $E[J(U_{T,x})]$ en un tiempo fijo T a partir de calcular, para α_k -trayectorias, $k = 1, 2, \dots, M$, como

$$E[J(U_{T,x})] = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M J(U_{T,x}^{\alpha_k}) \quad (18)$$

Retomemos seguidamente algunos de los resultados presentados por Yang y Ni (2019) relacionados con los valores extremos de la solución de (13):

Teorema 1.10. Sean $U_{t,x}$ y $U_{t,x}^\alpha$ la solución y la α –trayectoria de la ecuación del calor con incertidumbre dada en (13), respectivamente, para cualquier tiempo $t > 0$ y cualquier punto $x \in \mathbb{R}$. Sea además la función $J(\cdot)$ estrictamente creciente, entonces el supremo

$$\sup_{0 \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}} J(U_s, x) \quad (19)$$

tiene una distribución inversa incierta

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \sup_{0 \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}} J(U_s^\alpha, x) \quad (20)$$

Asimismo, el ínfimo

$$\inf_{0 \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}} J(U_s, x) \quad (21)$$

tiene una distribución inversa incierta

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \inf_{0 \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}} J(U_s^\alpha, x) \quad (22)$$

1.4 Métodos de resolución

1.4.1 El método de diferencias finitas

Las aproximaciones en diferencias finitas son uno de los métodos más simples y antiguos para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Su versión para una dimensión está dada por el método de Euler y se amplía a dos dimensiones con los métodos de Runge–Kutta de diferentes órdenes. El advenimiento de las técnicas de diferencias finitas en aplicaciones numéricas comenzó a principios de la década de 1950 y su desarrollo fue estimulado por la aparición de computadoras que ofrecieron un marco conveniente para tratar problemas complejos de ciencia y tecnología. Desde entonces se han obtenido resultados teóricos en cuanto a la precisión, estabilidad y convergencia del método de diferencias finitas para ecuaciones en derivadas parciales (Gu et al., 2019; Robertsson y Blanch, 2020).

El método de Crank–Nicolson para resolver ecuaciones diferenciales parciales parabólicas fue desarrollado por John Crank y Phyllis Nicolson a mediados del siglo XX. Crank y Nicolson (1947) consideraron un método práctico para la evaluación numérica de ecuaciones diferenciales

parciales del tipo de conducción de calor. Fort y Frankel (1953) modificaron el esquema explícito simple y demostraron que la variante presentada por ellos es mucho más estable, lo que permite utilizar pasos de tiempo más grandes.

1.4.2 Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos (MEF) es un método numérico para resolver una ecuación diferencial o integral. Se ha aplicado a una serie de problemas físicos, donde las ecuaciones diferenciales gobernantes están disponibles. Los métodos de elementos finitos para resolver ecuaciones diferenciales parciales utilizan conceptos residuales ponderados. La idea detrás del método de elementos finitos es dividir el dominio espacial en varios elementos geométricos simples, como triángulos o cuadriláteros. El concepto residual ponderado se usa luego para aproximar la función de solución sobre cada dominio de elementos finitos. Se debe tener cuidado para asegurar la continuidad de las variables dependientes y sus primeras parciales al pasar de un elemento a otro. Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales parciales se transforman en conjuntos de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo. El método es particularmente adecuado para resolver problemas que involucran geometrías irregulares y pendientes pronunciadas.

1.5 Objetivo General y preguntas de investigación

Los métodos numéricos anteriormente citados (Euler, Runge–Kutta, diferencias finitas y Crank–Nicolson) son los comúnmente utilizados en los cursos de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, las comparaciones y análisis de estabilidad normalmente se concentran en los métodos utilizados para la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. La implementación de los métodos de diferencia finita y Crank-Nicolson es poco estudiada, usualmente por razones de tiempo docente. Siendo así, las diferencias en estabilidad y precisión de los resultados queda quizás en una mención en las clases teóricas, pero nunca vista en la práctica.

En el presente trabajo nos hemos planteado las siguientes preguntas

- ¿Cuál es la calidad de la solución obtenida al aplicar el método de Crank–Nicolson para resolver la ecuación de calor con incertidumbre?
- ¿Cuál es el costo computacional al aplicar el método de Crank–Nicolson para resolver la ecuación de calor con incertidumbre?
- ¿Es matemáticamente estable el método de Crank–Nicolson en la resolución de la ecuación del calor con incertidumbre?

Siguiendo estas preguntas, surge la siguiente hipótesis: El método de Crank–Nicolson es más eficiente que el de Runge–Kutta, al aplicarlo para la resolución de la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre.

Para responder a lo anterior, nos hemos planteado como objetivo: Implementar el método de Crank-Nicolson para la resolución de la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre y mostrar este desarrollo a estudiantes de cuarto semestre carrera de telecomunicaciones de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

1.6 Objetivos específicos

Este objetivo general puede plantearse a partir de tres objetivos específicos:

- a) Determinar la calidad de la solución obtenida al aplicar el método de Crank–Nicolson para resolver la ecuación de calor con incertidumbre.
- b) Determinar la estabilidad del método de Crank–Nicolson para resolver la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre.
- c) Determinar el costo computacional al aplicar el método de Crank–Nicolson para resolver la ecuación de calor.

CAPÍTULO II

2 MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del problema

2.1.1 Ecuación del calor unidimensional

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) de la forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} = LU \quad (23)$$

donde t usualmente denota el tiempo y L es un operador diferencial elíptico en una o más variables espaciales, se denomina *ecuación parabólica*. En su forma canónica general, la ecuación parabólica puede expresarse como

$$a(x, t) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b(x, t) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + c(x, t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \text{términos de orden inferior} \\ = f(t, x) \quad (24)$$

dónde $b^2 - 4ac \equiv 0$ en todo el dominio de x y t .

Entre las ecuaciones parabólicas, una de las más estudiadas es la ecuación general del calor:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla(\beta \nabla U) + f(t, \mathbf{x}) \quad (25)$$

siendo β un coeficiente de difusión y $f(\mathbf{x}, t)$ una fuente de calor. Para el caso unidimensional la ecuación del calor tiene la forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(t, x) \quad (26)$$

En los problemas dependientes del tiempo, usualmente se especifica una condición inicial en $t = 0$, o sea, para el caso unidimensional esto sería:

$$U(0, x) = \varphi(x) \quad (27)$$

Además de esta, se prescriben condiciones de contorno en la frontera del dominio de x . Por ejemplo, podríamos dar condiciones de Dirichlet para $a < x < b$ de la forma

$$U(t, a) = g_1(t), \quad U(t, b) = g_2(t) \quad (28)$$

Para que exista consistencia entre la condición inicial y las condiciones de contorno debe cumplirse que

$$\varphi(a) = g_1(0), \quad \varphi(b) = g_2(0) \quad (29)$$

Entre los métodos más comunes de resolución de la ecuación parabólica se encuentran los métodos de diferencias finitas, particularmente:

- Los métodos de Euler hacia adelante y hacia atrás.
- El método de Crank-Nicolson y el método θ .

En las siguientes secciones describiremos estos métodos.

2.1.2 Diferencias hacia delante, hacia detrás y centrada

La expansión de Taylor es la herramienta más importante en el análisis de los métodos de diferencias finitas. Con esta, una función $u(x)$ puede ser escrita como una serie infinita:

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \dots + \frac{h^k}{k!}u^{(k)}(x) + \dots \quad (30)$$

si u es infinitamente diferenciable. En el caso en el que u sea diferenciable hasta el k -ésimo orden, se tiene que:

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \dots + \frac{h^k}{k!}u^{(k)}(\xi) \quad (31)$$

dónde $x < \xi < x + h$. Las derivadas implicadas en una ecuación diferencial pueden representarse por medio de fórmulas de diferencias finitas, una vez discretizado el dominio. Con esto se obtienen sistemas algebraicos (lineales o no lineales). Hay varios tipos de fórmulas de diferencias finitas, pero en general, la exactitud del método dependerá del valor de h , el cual es normalmente un número real muy pequeño.

Consideremos primeramente la primera derivada $u'(x)$ de cierta función $u(x)$ en el punto \bar{x} usando los valores del entorno $u(\bar{x} \pm h)$, donde h es el paso utilizado en la discretización del dominio. En esta aproximación se utilizan tres fórmulas muy comunes:

- Diferencia hacia delante: $u'(\bar{x}) \sim \Delta_+ u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}+h)-u(\bar{x})}{h}$
- Diferencia hacia atrás: $u'(\bar{x}) \sim \Delta_- u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x})-u(\bar{x}-h)}{h}$ (32)
- Diferencia centrada: $u'(\bar{x}) \sim \delta u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x}+h)-u(\bar{x}-h)}{2h}$

Geoméricamente, estas expresiones representan la pendiente de las rectas secantes en los puntos \bar{x} y $\bar{x} + h$, para el caso de las diferencias hacia delante y hacia atrás, y en los puntos $\bar{x} - h$ y $\bar{x} + h$ para el caso de la diferencia centrada. Estas pendientes tienden a la pendiente de la recta tangente cuando $h \rightarrow 0$.

En la sección 0 se ofrecen los fundamentos de la teoría de errores para los métodos de diferencias finitas. Para determinar cuán cercanas se encuentran $\Delta_+ u(\bar{x})$ y $\Delta_- u(\bar{x})$ de $u'(\bar{x})$, podemos hacer uso de la serie de Taylor (31) hasta el segundo orden.

$$u(\bar{x} + h) = u(\bar{x}) + hu'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2} u''(\xi) \quad (33)$$

Por lo que obtenemos una estimación del error:

$$E_d(h) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} - u'(\bar{x}) = \frac{1}{2} u''(\xi) h = O(h) \quad (34)$$

para el caso de la diferencia hacia adelante y

$$E_a(h) = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h} - u'(\bar{x}) = -\frac{1}{2} u''(\xi) h = O(h) \quad (35)$$

para el caso de la diferencia hacia atrás.

Para estimar el error de la diferencia centrada procedemos de forma similar, pero consideremos el desarrollo de Taylor hasta el término de cuarto orden:

$$u(\bar{x} + h) = u(\bar{x}) + hu'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2} u''(\bar{x}) + \frac{h^3}{6} u'''(\bar{x}) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\xi) \quad (36)$$

$$u(\bar{x} - h) = u(\bar{x}) - hu'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2}u''(\bar{x}) - \frac{h^3}{6}u'''(\bar{x}) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi)$$

lo cual conduce a:

$$E_c(h) = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x} - h)}{2h} - u'(\bar{x}) = \frac{1}{6}u'''(\bar{x})h^2 = O(h^2) \quad (37)$$

lo que indica que la diferencia centrada tiene un orden de precisión de segundo orden.

Podemos aplicar un operador de diferencia finita dos veces para obtener la fórmula de diferencia finita que aproxima una derivada de segundo orden $u''(x)$. Por ejemplo, la diferencia finita centrada resulta

$$u''(\bar{x}) \sim \delta^2 u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} - h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} + h)}{h^2} \quad (38)$$

En un intervalo $a \leq x \leq b$ discretizado, si se emplea la notación

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b - a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (39)$$

Con esta notación, las fórmulas de diferencias finitas presentadas en (32) se escribirían como

- Diferencia hacia delante: $u'_i \sim \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$
 - Diferencia hacia atrás: $u'_i \sim \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$
 - Diferencia centrada: $u'_i \sim \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$
- (40)

dónde $u_i = u(x_i)$ y $u'_i = u'(x_i)$. Asimismo, la derivada de segundo orden dada en (38) se escribirá como

$$u''_i \sim \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \quad (41)$$

En las siguientes secciones veremos cómo se aplican estas diferencias finitas a la ecuación parabólica.

2.1.3 Métodos de Euler aplicados a la ecuación del calor unidimensional

Retomemos la ecuación del calor unidimensional dada en (26) con condiciones iniciales y de frontera (27) y (28).

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(t, x) \quad (42)$$

$$U(a, t) = g_1(t), \quad U(b, t) = g_2(t), \quad U(x, 0) = \varphi(x) \quad (43)$$

Buscamos una solución numérica para $U(x, t)$ en cierto intervalo de tiempo $0 < t < T$. Como primer paso, generamos una rejilla discretizando el dominio de forma similar a como se presentó en (39):

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n \\ t_k &= j\tau, \quad \tau = \frac{T}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \quad (44)$$

En el dominio discretizado se denotará $U_{i,j} = U(t_j, x_i)$. Igualmente $f_{i,j} = f(t_j, x_i)$.

El segundo paso es aproximar las derivadas con las fórmulas de diferencias finitas presentadas en (40) y (41). Utilizaremos la expresión de diferencia finita centrada para la variable espacial y presentaremos dos variantes para la aproximación de la derivada temporal.

2.1.4 Método de Euler hacia adelante

Comenzaremos utilizando la expresión de diferencia finita hacia adelante para aproximar la derivada temporal, o sea

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\tau} \quad (45)$$

De esta forma, la ecuación (42) queda escrita como

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\tau} = \beta \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} - U_{i+1,j}}{h^2} + f_{i,j} + T_{i,j} \quad (46)$$

Aquí $T_{i,j}$ representa el error de truncamiento local, el cual será

$$T(t_j, x_i) = -\frac{h^2 \beta}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t_j, x_i) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_j, x_i) + \dots \quad (47)$$

por lo que la discretización será de orden $O(h^2 + \tau)$.

Cuando $j = 0$ estaremos en la condición inicial $U_{i,0}$ y, a partir de los valores de $U_{i,j}$ en el nivel j se podrán calcular los del siguiente nivel $j + 1$ como

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \tau \left(\beta \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} - U_{i+1,j}}{h^2} + f_{i,j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (48)$$

Las soluciones de las ecuaciones de diferencias finitas serán obtenidas directamente de la aproximación de la solución en pasos temporales previos, sin necesidad de resolver un sistema algebraico de ecuaciones, como veremos que ocurre en los casos posteriores.

2.1.5 Método de Euler hacia atrás

Emplearemos ahora la expresión de diferencia finita hacia atrás para aproximar la derivada temporal, o sea

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\tau} \quad (49)$$

De esta forma, la ecuación (42) queda escrita como

$$\frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\tau} = \beta \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} - U_{i+1,j}}{h^2} + f_{i,j} \quad (50)$$

con error de discretización $T_{i,j} = O(h^2 + \tau)$. Por cuestiones de conveniencia, expresemos la ecuación anterior como

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\tau} = \beta \frac{U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} - U_{i+1,j+1}}{h^2} + f_{i,j+1}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (51)$$

Como puede apreciarse, a diferencia del caso anterior, en este no podemos obtener el valor de $U_{i,j+1}$ en términos del instante de tiempo anterior, puesto que todos los términos en el paso $j + 1$ están acoplados. En su lugar, se necesitará resolver un sistema tridiagonal de ecuaciones, para poder aproximar la solución. Este sistema, en forma matricial, puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & & & \\ -r & 1+2r & -r & & & & \\ & -r & 1+2r & -r & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ \vdots \\ U_{n-2,j+1} \\ U_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1,j} + \tau f_{1,j+1} + r g_{1,j+1} \\ U_{2,j} + \tau f_{2,j+1} \\ U_{3,j} + \tau f_{3,j+1} \\ \vdots \\ U_{n-2,j} + \tau f_{n-2,j+1} \\ U_{n-1,j} + \tau f_{n-1,j+1} + r g_{2,j+1} \end{bmatrix} \quad (52)$$

donde $g_{1,j+1} = g_1(t_{j+1})$ y $g_{2,j+1} = g_2(t_{j+1})$ son las funciones que determinan las condiciones de frontera.

2.2 El método de Crank-Nicolson aplicado a la ecuación del calor con incertidumbre

En esta sección se presentará la formulación para el método de Crank-Nicolson de la ecuación del calor con incertidumbre. Primero se presentará el método para una ecuación del calor simple, de la forma:

$$\frac{\partial U_{t,x}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U_{t,x}}{\partial x^2} = f(t, x, U_{t,x}) \quad (53)$$

Se denotarán como h y τ a los espacios espacial y temporal, respectivamente. De esta forma, el dominio quedará discretizado con los puntos $x_j = jh, t_i = i\tau, i, j \in \mathbb{N}$. El resultado de evaluar las funciones U y f en dichos puntos se denotará por $U_{i,j}$ y $f_{i,j}$, o sea, $U_{i,j} = U_{t_i, x_j}$ y $f_{i,j} = f(t_i, x_j, U_{t_i, x_j})$.

El esquema de diferencia hacia delante de Euler se representa como

$$\begin{cases} \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\tau} - a^2 \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j} \\ U_{0,j} = \varphi(x_j) \end{cases} \quad (54)$$

Podemos reescribir la ecuación (54). para obtener el término $U_{(i+1,j)}$ como

$$U_{i+1,j} = (1 - 2r)U_{i,j} + rU_{i,j+1} + rU_{i,j-1} + \tau f_{i,j} \quad (55)$$

dónde $r = \frac{\tau a^2}{h^2}$. Se tiene además que, para la diferencia hacia adelante (55) su error de truncamiento es $O(\tau + h^2)$ y la condición de estabilidad es $r \leq \frac{1}{2}$.

La diferencia hacia atrás, por su parte, tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\tau} - a^2 \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j} \\ U_{0,j} = \varphi(x_j) \end{cases} \quad (56)$$

Esto es

$$U_{i-1,j} = (1 + 2r)U_{i,j} - rU_{i,j+1} - rU_{i,j-1} - \tau f_{i,j} \quad (57)$$

Siendo el error de truncamiento $O(\tau + h^2)$ y siendo incondicionalmente estable.

Reescribiremos la ecuación (54) como

$$\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\tau} - a^2 \frac{U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1} - 2U_{i-1,j}}{h^2} = f_{i-1,j} \quad (58)$$

para tomar una combinación convexa de las expresiones (56) y (58) con coeficientes $\theta \in [0, 1]$ y $1 - \theta$ respectivamente, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\tau} - a^2 \left[\begin{array}{l} \theta \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2} + \\ (1 - \theta) \frac{U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1} - 2U_{i-1,j}}{h^2} \end{array} \right] \\ = \theta f_{i,j} + (1 - \theta) f_{i-1,j} \end{aligned} \quad (59)$$

Esto es

$$\begin{aligned} (1 + 2r\theta)U_{i,j} - r\theta U_{i,j+1} - r\theta U_{i,j-1} - \tau\theta f_{i,j} \\ = r(1 - \theta)U_{i-1,j+1} + [1 - 2r(1 - \theta)]U_{i-1,j} \\ + \tau(1 - \theta)f_{i-1,j} + r(1 - \theta)U_{i-1,j-1} \end{aligned} \quad (60)$$

Cuando $\theta \neq \frac{1}{2}$, el error de truncamiento de (60) es $O(\tau + h^2)$, cuando $\theta = \frac{1}{2}$ el error de truncamiento es $O(\tau^2 + h^2)$. Nótese además de la fórmula (60) es la diferencia hacia adelante cuando $\theta = 0$ y la diferencia hacia atrás, cuando $\theta = 1$.

Cuando $\theta = \frac{1}{2}$, la fórmula (60) es llamada el método de Crank-Nicolson, el cual resultaría como

$$\begin{aligned} -rU_{i,j+1} + 2(1 + r)U_{i,j} - rU_{i,j-1} - \tau f_{i,j} \\ = 2(1 - r)U_{i-1,j} + rU_{i-1,j+1} + rU_{i-1,j-1} + \tau f_{i-1,j} \end{aligned} \quad (61)$$

Debe notarse que la expresión (61) es un método implícito. Para cada $i - 1$, si se desea obtener los próximos valores $U_{i,j}$, debe resolverse un sistema de ecuaciones. Resaltemos, además, que la

expresión (61) es incondicionalmente estable cuando $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, mientras que si $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, la condición de estabilidad es:

$$2r \leq \frac{1}{1 - 2\theta} \quad (62)$$

O sea, que el método de Crank-Nicolson será incondicionalmente estable.

Podemos proseguir, a continuación, a aplicar el método de Crank-Nicolson para resolver la ecuación (10). Si $f(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ satisfacen las condiciones de Lipschitz, y la condición inicial está determinada por una función $\varphi(x)$ acotada, entonces la solución a la ecuación (10) será única. Además, posee una α -trayectoria asociada a la solución de la ecuación (16). Para mayor simplicidad denotemos:

$$h^\alpha(x, t, U_{t,x}^\alpha) = f(t, x, U_{t,x}^\alpha) + |\sigma(t, x, U_{t,x}^\alpha)|\Phi^{-1}(\alpha) \quad (63)$$

con lo cual, la ecuación (63) quedará escrita como

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial t} - a^2 \frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial x^2} = h^\alpha(t, x, U_{t,x}^\alpha) \\ U_{0,x}^\alpha = \varphi(x) \end{cases} \quad (64)$$

2.2.1 Algoritmos de Crank-Nicolson para el cálculo de las α -trayectorias, el valor esperado y el valor máximo.

Para obtener la distribución incierta inversa o la α -trayectoria de la solución de la ecuación del calor con incertidumbre, se diseña un algoritmo de Crank-Nicolson, el cual se muestra a continuación (Liu y Hao, 2022).

Tabla 1-2: Algoritmo de Crank-Nicolson para obtener las α -trayectorias asociadas a la ecuación (10).

<i>Paso 0.</i>	Dominio $D = \{(t, x) 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$
<i>Paso 1.</i>	Entrar dos enteros positivos m y n , y definir los pasos temporales y espaciales $\tau = \frac{T}{m}$, $h = \frac{L}{n}$, respectivamente.
<i>Paso 2.</i>	Construir la malla asignando $t_i = i\tau, i = 0..m$, $x_j = jh, j = 0..n$.
<i>Paso 3.</i>	Escoger $\alpha \in (0,1)$.

<p><i>Paso 4.</i> Calcular $U_{i+1,j}^\alpha$ ($i = 0..m - 1, j = 0 \dots n$) como</p> $U_{i+1,0}^\alpha = (1 - r)U_{i,0}^\alpha + rU_{i,1}^\alpha + \tau h_{i,0}^\alpha$ $-rU_{i+1,j+1}^\alpha + 2(1 + r)U_{i+1,j}^\alpha - rU_{i+1,j-1}^\alpha - \tau h_{i+1,j}^\alpha$ $= 2(1 - r)U_{i,j}^\alpha + rU_{i,j+1}^\alpha + rU_{i,j-1}^\alpha + \tau h_{i,j}^\alpha, \quad (65)$ $j = 1..n - 1$ $U_{i+1,n}^\alpha = (1 - r)U_{i,n}^\alpha + rU_{i,n-1}^\alpha + \tau h_{i,n}^\alpha$ <p><i>Paso 5.</i> Repetir los Paso 3 y Paso 4 para diferentes valores de α</p> <p><i>Paso 6.</i> Obtener la α -trayectoria.</p>
--

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

Para obtener el valor esperado, según la ecuación (16) y utilizando una función $J(\cdot)$ monótona, puede aplicarse el siguiente algoritmo:

Tabla 2-2: Algoritmo para el cálculo del valor esperado utilizando el método de Crank-Nicolson

<p><i>Paso 0.</i> Dominio $D = \{(t, x) 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$</p> <p><i>Paso 1.</i> Entrar dos enteros positivos m y n, y definir los pasos temporales y espaciales $\tau = \frac{T}{m}$, $h = \frac{L}{n}$, respectivamente. Inicializar $k = 0$ y establecer un número M de iteraciones.</p> <p><i>Paso 2.</i> Construir la malla asignando $t_i = i\tau, i = 0..m$, $x_j = jh, j = 0..n$.</p> <p><i>Paso 3.</i> Hacer $k = k + 1$ y $\alpha = \frac{k}{M}$.</p> <p><i>Paso 4.</i> Calcular $U_{i+1,j}^\alpha$ ($i = 0..m - 1, j = 0 \dots n$) como</p> $U_{i+1,0}^\alpha = (1 - r)U_{i,0}^\alpha + rU_{i,1}^\alpha + \tau h_{i,0}^\alpha$ $-rU_{i+1,j+1}^\alpha + 2(1 + r)U_{i+1,j}^\alpha - rU_{i+1,j-1}^\alpha - \tau h_{i+1,j}^\alpha$ $= 2(1 - r)U_{i,j}^\alpha + rU_{i,j+1}^\alpha + rU_{i,j-1}^\alpha + \tau h_{i,j}^\alpha, \quad (66)$ $j = 1..n - 1$ $U_{i+1,n}^\alpha = (1 - r)U_{i,n}^\alpha + rU_{i,n-1}^\alpha + \tau h_{i,n}^\alpha$
--

<p><i>Paso 5.</i> Obtener la U_{T,x_j}^α ($j = 0,1, \dots, n$) y regresar al <i>Paso 3</i> hasta que $k > M$.</p> <p><i>Paso 6.</i> Calcular $E = [J(U_{T,x_j})] = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M-1} J\left(U_{T,x_j}^{\frac{k}{M}}\right)$</p>
--

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

Además, atendiendo a los resultados del **Teorema 1.10**, podemos también establecer un algoritmo para el cálculo de los valores extremos de la solución de la ecuación del calor con incertidumbre dada en (13):

Tabla 3-2: Algoritmo para el cálculo de los valores extremos utilizando en método de Crank-Nicolson

<p><i>Paso 0.</i> Dominio $D = \{(t, x) 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$</p> <p><i>Paso 1.</i> Entrar dos enteros positivos m y n, y definir los pasos temporales y espaciales $\tau = \frac{T}{m}$, $h = \frac{L}{n}$, respectivamente.</p> <p><i>Paso 2.</i> Construir la malla asignando $t_i = i\tau, i = 0..m$, $x_j = jh, j = 0..n$.</p> <p><i>Paso 3.</i> Tomar $0 < \alpha < 1$. Inicializar $i = 0$.</p> <p><i>Paso 4.</i> Definir</p> $S = \max\{J(\varphi(x_j)), j = 0,1, \dots, n\}$ $I = \min\{J(\varphi(x_j)), j = 0,1, \dots, n\}$ <p><i>Paso 5.</i> Calcular $U_{i+1,j}^\alpha$ ($i = 0..m - 1, j = 0 \dots n$) como</p> $U_{i+1,0}^\alpha = (1 - r)U_{i,0}^\alpha + rU_{i,1}^\alpha + \tau h_{i,0}^\alpha$ $-rU_{i+1,j+1}^\alpha + 2(1 + r)U_{i+1,j}^\alpha - rU_{i+1,j-1}^\alpha - \tau h_{i+1,j}^\alpha$ $= 2(1 - r)U_{i,j}^\alpha + rU_{i,j+1}^\alpha + rU_{i,j-1}^\alpha + \tau h_{i,j}^\alpha, \tag{67}$ $j = 1..n - 1$ $U_{i+1,n}^\alpha = (1 - r)U_{i,n}^\alpha + rU_{i,n-1}^\alpha + \tau h_{i,n}^\alpha$
--

Paso 6. Calcular

$$S = \max\{S, J(U_{j,i+1}^\alpha), j = 0, 1, \dots, n\}$$

$$I = \min\{I, J(U_{j,i+1}^\alpha), j = 0, 1, \dots, n\}$$

Incrementar $i = i + 1$

Paso 7. Repetir Paso 5-Paso 6 n veces

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

En la siguiente sección se muestran algunos problemas de aplicación donde se ilustran los resultados de aplicar los algoritmos anteriores.

2.3 Ejercicios de aplicación

2.3.1 Ejemplos de α –trayectorias.

En esta sección se presentarán algunos ejemplos de los cálculos de las α –trayectorias, según el algoritmo dado en la Tabla 1-2.

Ejemplo 1.

Consideremos la ecuación del calor con incertidumbre de la forma (10) con $f(t, x, U_{t,x}) = 0$, $\sigma(t, x, U_{t,x}) = e^{-t}$ y $\varphi(x) = 0$. El problema equivalente para la α –trayectoria será:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial t} - a^2 \frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial x^2} = |e^{-t}| \Phi^{-1}(\alpha) \\ U_{0,x}^\alpha = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (68)$$

Para el cálculo de las α –trayectorias como solución de (64) tendremos que $h(t, x, U_{t,x}^\alpha) = e^{-t}$. Nos concentramos en el dominio $D = \{[0,1] \times [0,1]\}$, con una rejilla formada por $m = 150$ puntos temporales y $n = 10$ puntos espaciales. El algoritmo se implementó en el software MATLAB, aunque también funciona en el software libre Octave y demoró 0.3540 s en ser ejecutado, consumiendo 1447.09 MB de memoria.

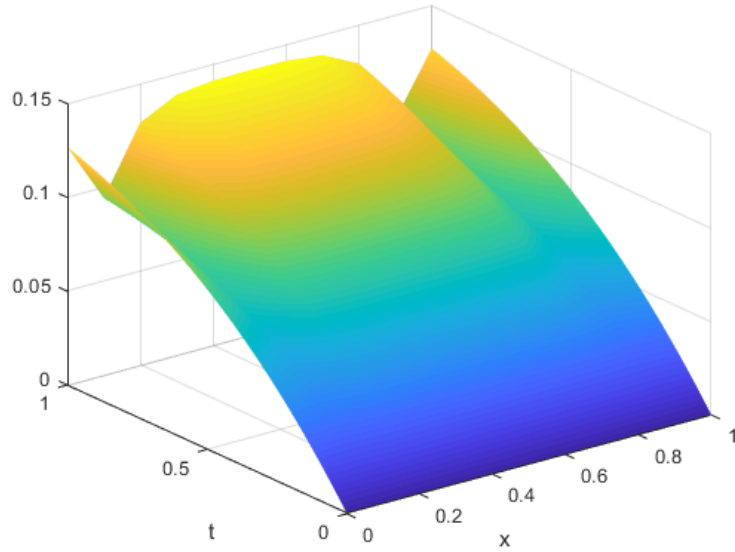


Gráfico 1-2: Solución $U_{x,t}^\alpha$ de la ecuación (68) con $\alpha = 0.6$,
utilizando el método de Crank-Nicolson

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

Ejemplo 2.

Consideremos ahora $f(t, x, U_{t,x}) = e^{-t} \sin(x)$, $\sigma(t, x, U_{t,x}) = 1 + \cos(x)$ y $\varphi(x) = \sin(x)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial t} - a^2 \frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial x^2} = e^{-t} \sin(x) + |1 + \cos(x)| \Phi^{-1}(\alpha) \\ U_{0,x}^\alpha = \sin(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (69)$$

Se trabaja en el dominio $D = \{[0, 1] \times [0, 10]\}$, con una rejilla formada por $m = 200$ puntos temporales y $n = 200$ puntos espaciales. El programa demoró 0.2510 s en ser ejecutado, consumiendo 1632.32 MB de memoria.

Ejemplo 3.

Mostremos por último el caso en que $f(t, x, U_{t,x}) = 2 \sin(3x)$, $\sigma(t, x, U_{t,x}) = e^{-t}$ y $\varphi(x) = e^x \sin(x)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial t} - a^2 \frac{\partial U_{t,x}^\alpha}{\partial x^2} = 2 \sin(3x) + |e^{-t}| \Phi^{-1}(\alpha) \\ U_{0,x}^\alpha = e^x \sin(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (70)$$

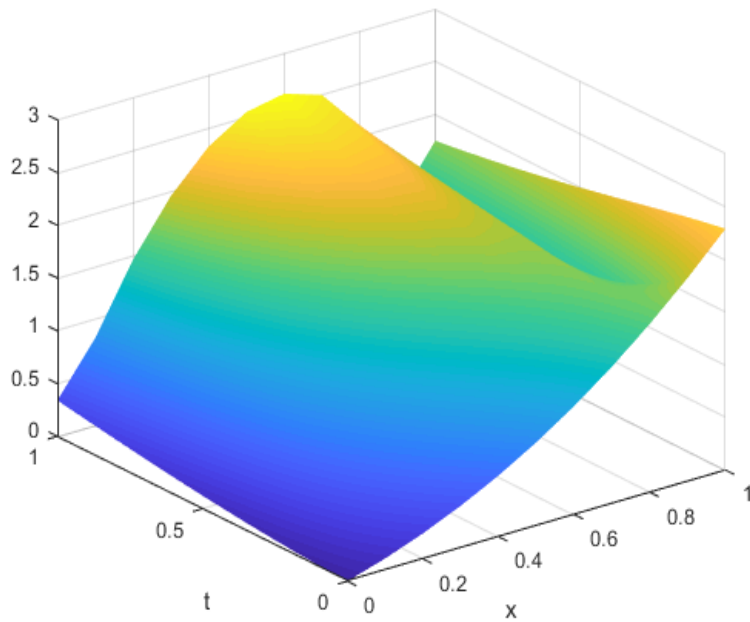


Gráfico 2-2: Solución $U_{x,t}^\alpha$ de la ecuación (69) con $\alpha = 0.7$, utilizando el método de Crank-Nicolson

Realizado por: Lascano, Edisson, 2023.

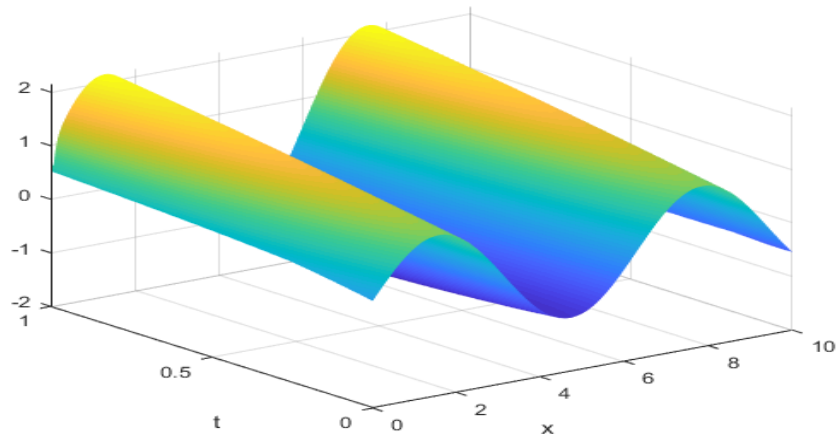


Gráfico 3-2: Solución $U_{x,t}^\alpha$ de la ecuación (70) con $\alpha = 0.3$, utilizando el método de Crank-Nicolson

Realizado por: Lascano, Edisson, 2023.

2.3.2 Valores esperados

En esta sección mostraremos algunos resultados de aplicar el algoritmo dado en la Tabla 1-2 para el cálculo del valor esperado. En todos los casos consideraremos que la función monótona será $J(x) = x$.

Comencemos con el ejemplo 1 dado en la sección anterior. Este resultado está reflejado en el Gráfico 4-2.

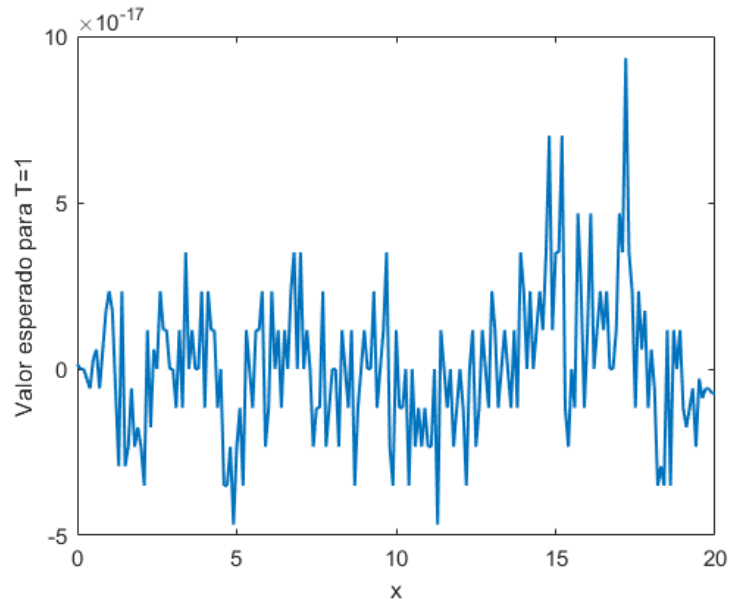


Gráfico 4-2: Valor esperado para la ecuación (68), tomando $t \in [0, 1], x \in [0, 20], m = 200, n = 200$

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

Para el Ejemplo 2 se observa un comportamiento sinusoidal de los valores esperados. Este se muestra en el Gráfico 5-5. Este comportamiento tiene sentido, teniendo en cuenta los resultados de la solución mostrados en la solución mostrados en el Gráfico 5-2.

Para el Ejemplo 3 el valor esperado está reflejado en la siguiente figura:

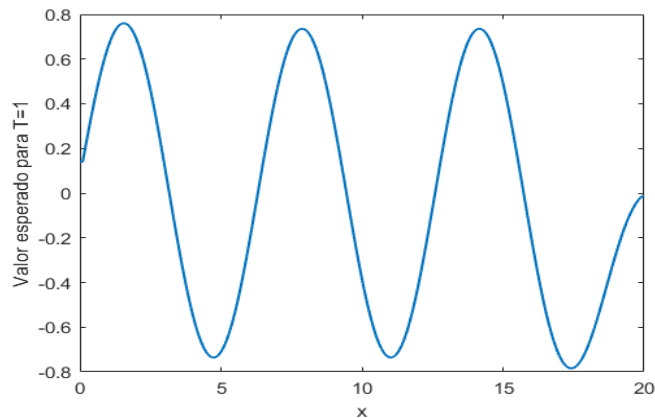


Gráfico 5-2: Valor esperado para la ecuación (69), tomando $t \in [0,1], x \in [0,20], m = 200, n = 200$

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

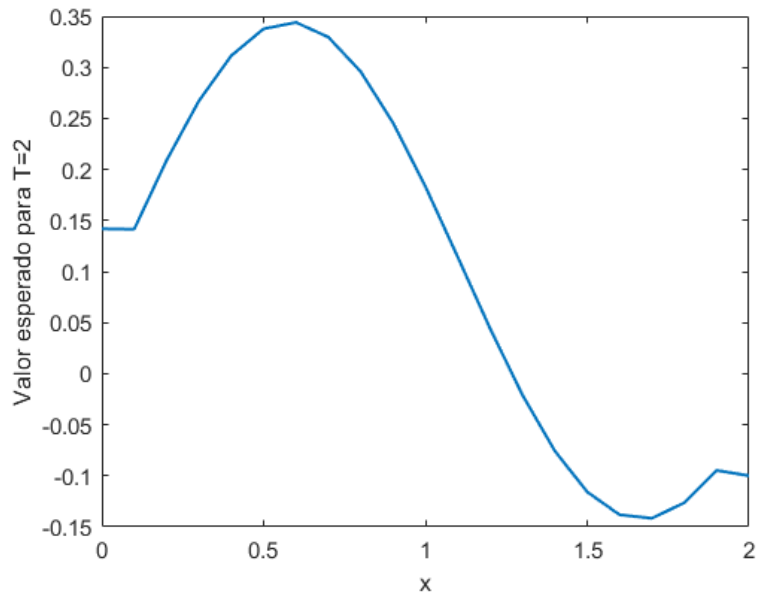


Gráfico 6-2: Valor esperado para la ecuación (70), tomando $t \in [0, 2], x \in [0, 2], m = 400, n = 20$

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

2.3.3 Valores extremos

Para los ejemplos discutidos en esta sección también podemos presentar los valores extremos, siguiendo el algoritmo dado en la Tabla 3-2. Estos se muestran en las figuras correspondientes a los ejemplos 1, 2 y 3 respectivamente.

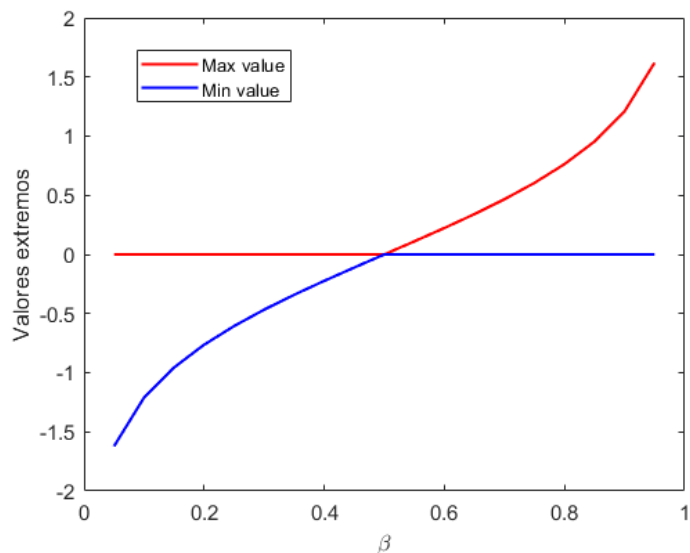


Gráfico 7-2: Valores extremos para la ecuación (68), tomando $t \in [0, 1], x \in [0, 20], m = 1000, n = 200$

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

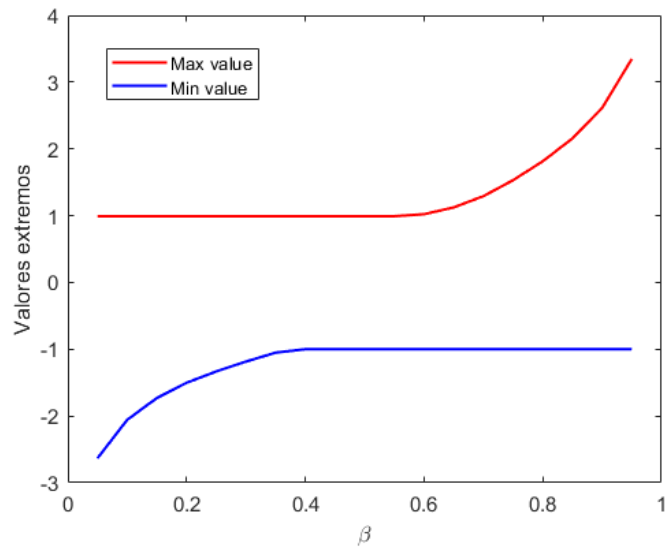


Gráfico 8-2: Valores extremos para la ecuación (69), tomando $t \in [0,1], x \in [0,20], m = 200, n = 200$

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

CAPÍTULO III

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El Método de Elementos Finitos (MEF) fue desarrollado para resolver complicados problemas de la ingeniería, destacándose los problemas de elasticidad y modelos de mecánica estructural que involucran ecuaciones en derivadas parciales y geometrías complejas. Pero en nuestros días, el rango de aplicación es bastante extenso. Para introducir el método, comencemos por el caso unidimensional

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \quad (71)$$

dónde Ω es un dominio acotado en el plano (x, y) con frontera $\partial\Omega$.

Para este problema existen, al menos, tres formulaciones diferentes:

1. La formulación diferencial, planteada con la ecuación original.
2. La formulación variacional o formulación débil.

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 fv dx \quad (72)$$

para cualquier función $v \in H_0^1(0,1)$, el espacio de Sobolev para las funciones integrales. El MEF correspondiente a esta formulación se denomina *Método de Galerkin*.

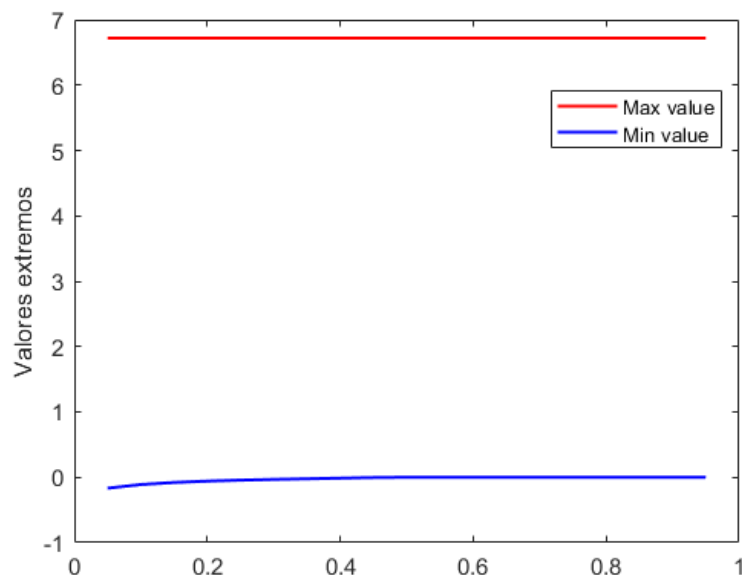


Gráfico 1-3: Valores extremos para la ecuación (70), tomando $t \in [0,1], x \in [0,2], m = 400, n = 20$

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

3. La formulación de minimización

$$\min_{v(x) \in H_0^1(0,1)} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (v')^2 - f v \right) dx \right\} \quad (73)$$

El MEF correspondiente a esta formulación se denomina *Método de Ritz*.

Puede demostrarse que estas tres formulaciones son equivalentes.

3.1 Descripción matemática

En esta sección presentaremos las componentes básicas del MEF para el problema unidimensional (71). Comenzaremos por definir una malla de puntos en el intervalo de interés de la forma $0 = x_1, x_2, \dots, x_n = 1$. Tendremos además el paso espacial $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Estos elementos se denominan:

- x_i se llamará nodo,
- (x_i, x_{i+1}) se llamará elemento,
- $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i$ es el tamaño de la malla, la cual es una medida de cuán fina es la partición.

Dado que la solución está en un espacio $V \in H_0^1(0,1)$, basados en la malla, nos interesará construir un subespacio V_h de dimensión finita contenido en V de forma que el problema discreto esté contenido en el problema continuo. Los distintos espacios de dimensión finita generan diferentes soluciones de elementos finitos. Como V_h tiene una dimensión finita, podemos encontrar un conjunto de soluciones base

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1} \subset V_h \quad (74)$$

que serán linealmente independientes, o sea

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0 \quad (75)$$

Por tanto, V_h estará generado por las funciones base ϕ_i , esto es:

$$V_h = \left\{ v_h(x) : v_h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j \right\} \quad (76)$$

El espacio de dimensión finita más simple es el de las funciones continuas a trozos sobre una malla, con igual valor en los extremos. En el caso del intervalo $[0, 1]$ esto sería $v_h(0) = v_h(1) = 0$.

Es conocido que una función lineal $l(x)$ en un intervalo (x_i, x_{i+1}) está únicamente determinada por sus valores en los extremos del intervalo:

$$l(x) = l(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + l(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (77)$$

Se cuenta con $n - 1$ valores de nodos $l(x_i)$ para una función lineal continua a trozos. Además, se tiene que $l(x_0) = l(x_n) = 0$. Dado un vector $[l(x_1), l(x_2), \dots, l(x_{n-1})]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, se puede construir $v_h(x) \in V_h$ tomando $v_h(x_i) = l(x_i)$, $i = 1, \dots, n - 1$. Por otra parte, dada $v_h(x) \in V_h$ obtenemos el vector $[v(x_1), v(x_2), \dots, v(x_{n-1})]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$. Por tanto, existe una relación inyectiva entre V_h y \mathbb{R}^{n-1} . Por lo que podemos afirmar que V_h tiene dimensión finita $n - 1$.

El espacio de dimensión finita puede ser generado por un conjunto finito de funciones base. Por supuesto que hay un número infinito de funciones base, pero debemos escoger uno tal que:

- Sea simple.
- Su imagen sea compacta, esto es, que sea cero en casi todo el dominio excepto en una pequeña región.
- Sea continua y diferenciable en todo su dominio (excepto en los nodos).

El conjunto más sencillo de funciones es una función que satisfaga

$$\phi_i(x_i) = 1, \quad \phi_i(x_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n \quad (78)$$

Estas pueden representarse simplemente como $\phi_i(x_j) = \delta_i^j$. Siendo así, la función en el intervalo $(0, 1)$, queda descrita como (ver Gráfico 2-3).

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & \text{si } x_{i-1} \leq x < x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{si } x_{i+1} \leq x \end{cases} \quad (79)$$

La solución de elementos finitos buscada será

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x) \quad (80)$$

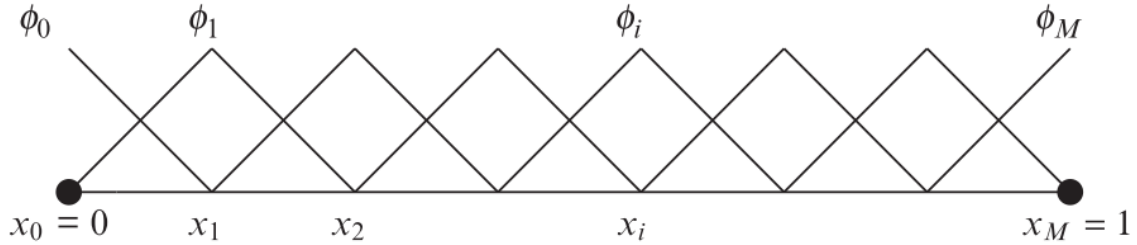


Gráfico 2-3: Diagrama de una malla y las funciones base descritas en (79)

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

Con esta, ambas formulaciones, la de minimización o la débil, pueden ser utilizadas para derivar un sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes α_j . En particular, usando las funciones ϕ_j dadas en (79) tenemos

$$u_h(x_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x_i) = \alpha_i \phi(x_i) = \alpha_i \quad (8154)$$

Como se mencionó anteriormente, para unas funciones base generales, la formulación del método da lugar a un sistema de ecuaciones lineales. Para ello necesitamos conformar:

- La matriz de coeficientes $A = \{a_{ij}\} = \left\{ \int_0^1 \phi_i' \phi_j' dx \right\}$, usualmente llamada *matriz de rigidez para las derivadas de primer orden*.
- El vector independiente $F = \{f_i\} = \left\{ \int_0^1 f_i \phi_i dx \right\}$, usualmente llamado *vector de carga*.

El procedimiento para formar A y F es una parte crucial en el proceso de elementos finitos. Para el problema de estudio, una forma es ensamblando elemento por elemento:

$$\begin{matrix} (x_0, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_{i-1}, x_i) & \dots & (x_{n-1}, x_n) \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \dots & \Omega_i & \dots & \Omega_n \end{matrix} \quad (82)$$

La idea es separar la integración en cada uno de los elementos de forma que, para cualquier función integrable $g(x)$ se tiene

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} g(x)dx \quad (83)$$

Por tanto, la matriz A puede escribirse como:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \int_0^1 (\phi'_1)^2 dx & \int_0^1 \phi'_1 \phi'_2 dx & \dots & \int_0^1 \phi'_1 \phi'_{n-1} dx \\ \int_0^1 \phi'_2 \phi'_1 dx & \int_0^1 (\phi'_2)^2 dx & \dots & \int_0^1 \phi'_2 \phi'_{n-1} dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi'_{n-1} \phi'_1 dx & \int_0^1 \phi'_{n-1} \phi'_2 dx & \dots & \int_0^1 (\phi'_{n-1})^2 dx \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x_1} (\phi'_1)^2 dx & \int_{x_0}^{x_1} \phi'_1 \phi'_2 dx & \dots & \int_{x_0}^{x_1} \phi'_1 \phi'_{n-1} dx \\ \int_{x_0}^{x_1} \phi'_2 \phi'_1 dx & \int_{x_0}^{x_1} (\phi'_2)^2 dx & \dots & \int_{x_0}^{x_1} \phi'_2 \phi'_{n-1} dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{x_0}^{x_1} \phi'_{n-1} \phi'_1 dx & \int_{x_0}^{x_1} \phi'_{n-1} \phi'_2 dx & \dots & \int_{x_0}^{x_1} (\phi'_{n-1})^2 dx \end{bmatrix} \\ &+ \dots \\ &+ \begin{bmatrix} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (\phi'_1)^2 dx & \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi'_1 \phi'_2 dx & \dots & \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi'_1 \phi'_{n-1} dx \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi'_2 \phi'_1 dx & \int_{x_{n-1}}^{x_n} (\phi'_2)^2 dx & \dots & \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi'_2 \phi'_{n-1} dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi'_{n-1} \phi'_1 dx & \int_{x_{n-1}}^{x_n} \phi'_{n-1} \phi'_2 dx & \dots & \int_{x_{n-1}}^{x_n} (\phi'_{n-1})^2 dx \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (84)$$

Así mismo, el vector F se podrá calcular como

$$F = \begin{bmatrix} \int_0^1 f \phi_1 dx \\ \int_0^1 f \phi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f \phi_{n-1} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x_1} f \phi_1 dx \\ \int_{x_0}^{x_1} f \phi_2 dx \\ \vdots \\ \int_{x_0}^{x_1} f \phi_{n-1} dx \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f \phi_1 dx \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f \phi_2 dx \\ \vdots \\ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f \phi_{n-1} dx \end{bmatrix} \quad (85)$$

3.2. MEF para problemas parabólicos.

Podemos aplicar el MEF para resolver problemas dependientes del tiempo usando dos aproximaciones: una variante es discretizar el espacio de las variables usando el método de

elementos finitos, mientras que el espacio temporal se discretiza usando el método de diferencias finitas. Esto es posible si la ecuación es separable. Otra vía es discretizar ambos espacios, espacial y temporal, usando el método de elementos finitos. En esta sección explicaremos brevemente la primera variante que es además más sencilla de implementar.

Tenemos un problema de la forma (53) con condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \frac{\partial U}{\partial x^2} &= f(t, x) \\ U(0, x) &= \varphi(x), \quad U(x_0, t) = U(t, x_1) = 0 \end{aligned} \quad (86)$$

Para aplicar el método de Galerkin a esta ecuación comencemos por multiplicar ambos miembros por una función de prueba $v(x) \in C_{\Omega}^2[x_0, x_1]$ e integrar. Esto nos lleva a la formulación débil de la ecuación en derivadas parciales.

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \frac{\partial U}{\partial x^2} \right) v(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) v(x) dx \quad (87)$$

Como es usual, se aplica la integración por partes una vez para transformar el segundo término del miembro izquierdo. Esto es:

$$\int_{x_0}^{x_1} a^2 \frac{\partial U}{\partial x^2} v(x) dx = -a^2 \frac{\partial U}{\partial x} v(x) \Big|_{x_0}^{x_1} + a^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (88)$$

Dado que la función $v(x)$ se anula en los extremos, tendremos que

$$\int_{x_0}^{x_1} a^2 \frac{\partial U}{\partial x^2} v(x) dx = a^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (89)$$

por lo que la ecuación (87) se transforma en

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial U}{\partial t} v(x) + a^2 \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) v(x) dx \quad (90)$$

Esta es la forma débil de la ecuación del calor. Como se indicó anteriormente, se tomarán $n - 1$ funciones base ϕ_j para expresar la solución como:

$$U_h(x, t) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \phi_j(x) \quad (91)$$

Como la solución depende de t tendremos que asumir que esta dependencia se encuentra reflejada en los coeficientes α_j , es decir

$$U_h(x, t) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(t) \phi_j(x) \quad (92)$$

Sustituyendo esta solución aproximada, junto con la función $v(x) = \phi_i(x)$ en la forma débil, tendremos

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha'_j(t) \phi_j(x) \phi_i(x) + a^2 \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(t) \frac{d\phi_j(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi_i(x)}{dx} \right) dx \\ = \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \phi_i(x) dx \end{aligned} \quad (93)$$

Si se introducen las matrices

$$M_{i,j} = \int_{x_0}^{x_1} \phi_j(x) \phi_i(x) dx, \quad K_{i,j} = \int_{x_0}^{x_1} a^2 \frac{d\phi_j(x)}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx \quad (94)$$

y el vector $F(t)$ cuya j -ésima entrada es

$$F_i(t) = \int_{x_0}^{x_1} f(t, x) \phi_i(x) dx \quad (95)$$

la ecuación (93) se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales en forma matricial

$$M\alpha'(t) = -K\alpha(t) + F \quad (96)$$

La condición inicial para este sistema de ecuaciones estará definida a partir del cumplimiento de la relación

$$U_h(0, x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(0) \phi_j(x) \approx \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(x_j) \phi_j(x) \quad (97)$$

3.2.1 Algoritmos de Galerkin para el cálculo de las α -trayectorias, el valor esperado y el valor máximo.

Para obtener la distribución incierta inversa o la α -trayectoria de la solución de la ecuación del calor con incertidumbre, se diseña un algoritmo de Galerkin como el descrito anteriormente y se procede de forma similar a los algoritmos mostrados dados en la Tabla 1-2: Algoritmo de Crank-Nicolson para obtener las α -trayectorias asociadas a la ecuación (10)., Tabla 2-3 y Tabla 3-3.

Tabla 1-3: Algoritmo de Galerkin para obtener las α –trayectorias asociadas a la ecuación (10).

<i>Paso 0.</i>	Dominio $D = \{(t, x) 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$
<i>Paso 1.</i>	Entrar dos enteros positivos m y n , y definir los pasos temporales y espaciales $\tau = \frac{T}{m}$, $h = \frac{L}{n}$, respectivamente.
<i>Paso 2.</i>	Construir la malla asignando $t_i = i\tau, i = 0..m$, $x_j = jh, j = 0..n$.
<i>Paso 3.</i>	Escoger $\alpha \in (0,1)$.
<i>Paso 4.</i>	Escoger las M funciones base Φ_k
<i>Paso 5.</i>	$M_{l,k} = \int_{x_0}^{x_1} \phi_l(x)\phi_k(x)dx, K_{l,k} = \int_{x_0}^{x_1} a^2 \frac{\phi_l(x)}{dx} \frac{\phi_k(x)}{dx} dx, F_k(t) = \int_{x_0}^{x_1} f(t, x)\phi_k(x)dx$
<i>Paso 6.</i>	Resolver la ecuación diferencial $M\alpha'(t) = -K\alpha(t) + F$
<i>Paso 7.</i>	Calcular $U_{i,j}^\alpha$ ($i = 0..m - 1, j = 0 \dots n$) como $U_{i,j}^\alpha = \sum_{k=1}^M \alpha_k(t_i)\phi_k(x_j)$
<i>Paso 8.</i>	Repetir los Paso 3 y Paso 4 para diferentes valores de α
<i>Paso 9.</i>	Obtener la α –trayectoria.

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

Para obtener el valor esperado, según la ecuación (16) y utilizando una función $J(\cdot)$ monótona, puede aplicarse el siguiente algoritmo:

Tabla 2-3: Algoritmo para el cálculo del valor esperado utilizando el método de Galerkin.

<i>Paso 0.</i>	Dominio $D = \{(t, x) 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$
<i>Paso 1.</i>	Entrar dos enteros positivos m y n , y definir los pasos temporales y espaciales $\tau = \frac{T}{m}$, $h = \frac{L}{n}$, respectivamente. Inicializar $k = 0$ y establecer un número M de iteraciones.
<i>Paso 2.</i>	Construir la malla asignando $t_i = i\tau, i = 0..m$, $x_j = jh, j = 0..n$.
<i>Paso 3.</i>	Hacer $k = k + 1$ y $\alpha = \frac{k}{M}$.
<i>Paso 4.</i>	Escoger las M funciones base Φ_k

<i>Paso 5.</i>	$M_{l,k} = \int_{x_0}^{x_1} \phi_l(x)\phi_k(x)dx, K_{l,k} = \int_{x_0}^{x_1} a^2 \frac{\phi_l(x)}{dx} \frac{\phi_k(x)}{dx} dx, F_k(t) = \int_{x_0}^{x_1} f(t,x)\phi_k(x)dx$
<i>Paso 6.</i>	Resolver la ecuación diferencial $M\alpha'(t) = -K\alpha(t) + F$
<i>Paso 7.</i>	Calcular $U_{T,j}^\alpha$ ($i = 0..m - 1, j = 0 \dots n$) como $U_{T,j}^\alpha = \sum_{k=1}^M \alpha_k(T)\phi_k(x_j)$
<i>Paso 8.</i>	Regresar al <i>Paso 3</i> hasta que $k > M$.
<i>Paso 9.</i>	Calcular $E = \left[J(U_{T,x_j}) \right] = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M-1} J\left(U_{T,x_j}^{\frac{k}{M}} \right)$

Realizado por: Lascano, Edisson, 2023.

Además, atendiendo a los resultados del **Teorema 1.10**, podemos también establecer un algoritmo para el cálculo de los valores extremos de la solución de la ecuación del calor con incertidumbre dada en (13):

Tabla 3-3: Algoritmo para el cálculo de los valores extremos utilizando en método de Galerkin

<i>Paso 0.</i>	Dominio $D = \{(t,x) 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$
<i>Paso 1.</i>	Entrar dos enteros positivos m y n , y definir los pasos temporales y espaciales $\tau = \frac{T}{m}, h = \frac{L}{n}$, respectivamente.
<i>Paso 2.</i>	Construir la malla asignando $t_i = i\tau, i = 0..m, x_j = jh, j = 0..n$.
<i>Paso 3.</i>	Tomar $0 < \alpha < 1$. Inicializar $i = 0$.
<i>Paso 4.</i>	Definir
	$S = \max \{ J(\varphi(x_j)), j = 0,1, \dots, n \}$
	$I = \min \{ J(\varphi(x_j)), j = 0,1, \dots, n \}$
<i>Paso 5.</i>	Escoger las M funciones base Φ_k
<i>Paso 7.</i>	$M_{l,k} = \int_{x_0}^{x_1} \phi_l(x)\phi_k(x)dx, K_{l,k} = \int_{x_0}^{x_1} a^2 \frac{\phi_l(x)}{dx} \frac{\phi_k(x)}{dx} dx, F_k(t) = \int_{x_0}^{x_1} f(t,x)\phi_k(x)dx$
<i>Paso 8.</i>	Resolver la ecuación diferencial $M\alpha'(t) = -K\alpha(t) + F$
<i>Paso 9.</i>	Calcular $U_{i,j}^\alpha$ ($i = 0..m - 1, j = 0 \dots n$) como $U_{i+1,j}^\alpha = \sum_{k=1}^M \alpha_k(t_i)\phi_k(x_j)$

Paso 10. Calcular

$$S = \max\{S, J(U_{j,i+1}^\alpha), j = 0, 1, \dots, n\}$$

$$I = \min\{I, J(U_{j,i+1}^\alpha), j = 0, 1, \dots, n\}$$

Incrementar $i = i + 1$

Paso 11. Repetir los pasos Paso 5-Paso 6 n veces

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

En la siguiente sección se muestran algunos problemas de aplicación donde se ilustran los resultados de aplicar los algoritmos anteriores.

3.2.2 Ejemplos de α –trayectorias.

Utilizando el método de Galerkin, podemos obtener también las soluciones de las α –trayectorias, como se describió en el algoritmo dado en la Tabla 1-3. El resultado obtenido para el Ejemplo 1 de la sección 0 se muestra en el Gráfico 3-3. En la sección 4.5 discutiremos sobre los errores de aproximación de cada uno de los métodos empleados en este trabajo.

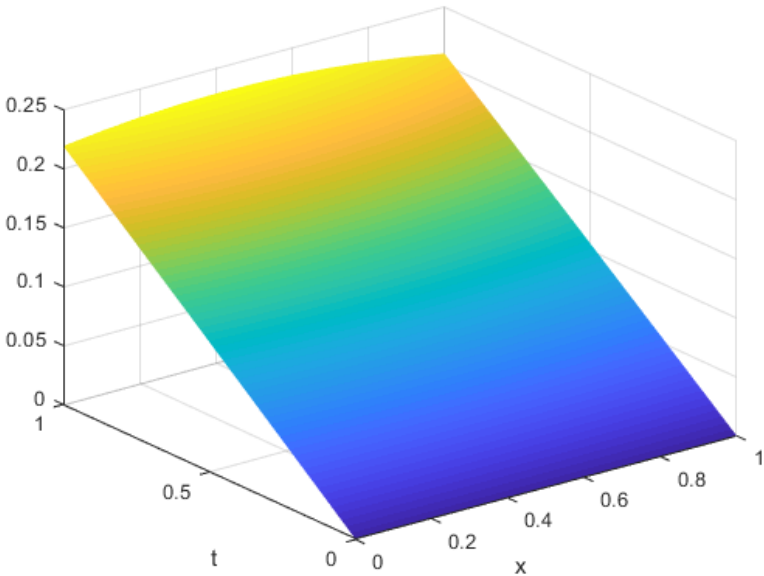


Gráfico 3-3: Solución $U_{x,t}^\alpha$ de la ecuación (68) con $\alpha = 0.6$, utilizando el método de Galerkin

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

CAPÍTULO IV

4. RESULTADO Y DISCUSIÓN

4.1 Errores de aproximación numérica

La ocurrencia de errores en un tema inevitable en el campo de la ciencia computacional. Lejos de intentar evitarlos, los analistas se concentran en investigar la mejor forma de minimizar dichos errores. Los algoritmos numéricos que se diseñan no devuelven soluciones exactas. Entonces, resalta la importancia de la llamada O grande, como cota de los errores de aproximación. Es entonces que se entra en el estudio de cómo lograr un equilibrio entre el tiempo de cómputo y el error de aproximación.

La definición propia de error numérico es la siguiente:

Definición 4.1 Sea x la solución exacta de un problema dado y x^* su solución aproximada. Entonces el error numérico, denotado por e , en la resolución del problema será

$$e = x - x^* \quad (98)$$

4.1.1 Estimación del error

Toda representación computacional de los números reales con parte fraccionaria está obligada a emplear esquemas de redondeo u otras aproximaciones. Algunos de los esquemas de aproximación más comunes son:

- *Truncamiento*: el error viene del hecho de que solo se representa un número finito de todos los posibles valores en \mathbb{R} .
- *Discretización*: el error viene de la adaptación del cálculo al sistema de cómputo. Por ejemplo, las aproximaciones por diferencias finitas que se han estado utilizando a lo largo de este trabajo.
- *Modelación*: el error proviene de descripciones incompletas o poco precisas del problema que se quiere resolver.
- *Constantes empíricas*: el error proviene de representaciones pobres de constantes físicas o matemáticas.
- *Entrada*: el error proviene de aproximaciones de parámetros generados por el usuario para un sistema dado, o simplemente errores de tipografía.

Además de la definición de error numérico podemos clasificar los errores según las siguientes definiciones:

Definición 4.2 El error absoluto está dado por la diferencia absoluta entre el valor real y el valor aproximado. Será el valor absoluto de e :

$$\hat{e} = |x - x^*| \quad (99)$$

Definición 4.3 El error relativo será el resultado de dividir el error absoluto entre valor absoluto del valor real:

$$\tilde{e} = \frac{|x - x^*|}{|x|} \quad (100)$$

4.2 Estabilidad numérica

La estabilidad es una de las más importantes características en un esquema numérico eficiente. Esta podemos definirla como:

Definición 4.4 Un algoritmo numérico se dice estable si el resultado final no se ve afectado por perturbaciones durante el proceso de cómputo. En otro caso, se denomina inestable.

La noción de estabilidad está estrechamente ligada a la noción de *condición*:

Definición 4.5 La condición es una medida de cuán sensible es un resultado a pequeños cambios en los datos de entrada. En la literatura, la condición es también denominada *sensibilidad*.

- Un problema es llamado bien condicionado si pequeños cambios en los datos de entrada conducen a pequeños cambios en los resultados.
- Un problema es llamado mal-condicionado si pequeños cambios en los datos de entrada conducen a cambios relativamente grandes en los resultados.

Definición 4.6 Si f es una función diferenciable en x , entonces el número de condición de f en x se define como

$$\text{Cond}(f(x)) = \frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}, \quad f(x) \neq 0 \quad (101)$$

Definición 4.7 Si A es una matriz no singular, el número de condición de A se define como

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|, \quad \text{con } \|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (102)$$

Veamos a continuación estas definiciones aplicadas a los esquemas numéricos utilizados en este trabajo.

4.3 Estimación de Error y Estabilidad en los Métodos de Diferencias Finitas

Sea $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_n]^T$ la solución aproximada generada por un esquema de diferencias finitas en los puntos x_1, x_2, \dots, x_n y $\mathbf{u} = [u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)]^T$ la solución exacta en dichos puntos. El error global, como se definió en (98), será $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{U}$. Naturalmente, se pretende encontrar la menor cota superior para el vector de error, la cual es comúnmente medida con alguna de las siguientes normas:

- La norma- ∞ , $\|\mathbf{e}\|_\infty = \max_i \{|e_i|\}$.
- La norma-1, $\|\mathbf{e}\|_1 = \sum_i h_i |e_i|$ siendo $h_i = x_{i+1} - x_i$.
- La norma-2, $\|\mathbf{e}\|_2 = \left(\sum_i (h_i |e_i|^2) \right)^{\frac{1}{2}}$.

Si $\|\mathbf{e}\| \leq Ch^p$, $p > 0$ se dice que el método de diferencia finita es de orden p . Siempre se prefiere mantener un orden “razonablemente” alto sin un sacrificio muy grande del costo computacional.

Definición 4.8 Un método de diferencias finitas es convergente si $\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{e}\| = 0$.

El error de truncamiento local se refiere a las diferencias entre la ecuación diferencial original y sus aproximaciones finitas en los puntos de la malla. Los errores de truncamiento local miden cuán bien una discretización aproxima a la ecuación diferencial. Por ejemplo, en el caso de un problema de valor inicial de la forma

$$u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b \quad (103)$$

el error de truncamiento de un esquema de diferencia como el presentado en el 0, es decir:

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

en x_i es

$$T_i = \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2} - f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

De forma general, se define el error de truncamiento como sigue:

Definición 4.9 Sea $P (d/dx)$ un operador diferencial sobre u en una ecuación diferencial lineal. Sea P_h el operador correspondiente en diferencias finitas. El error de truncamiento local se define como:

$$T(x) = P_h u - P u \quad (104)$$

Por ejemplo, para el caso de la ecuación diferencial (103) el error de truncamiento será:

$$\begin{aligned} T(x) &= P_h u - P u = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} - u''(x) \\ &= \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} - f(x) \end{aligned} \quad (105)$$

Definición 4.2 Un esquema en diferencias finitas es consistente si $\lim_{h \rightarrow 0} T(x) = 0$. Si $|T(x)| \leq Ch^p$, $p > 0$, entonces se dice que la discretización es de orden p . Para verificar si un esquema en diferencias es consistente o no, acudimos a la expansión de Taylor de todos los términos del error de truncamiento local en un punto de la malla x_i . Por ejemplo, para el error de truncamiento (105) se tiene:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \dots \quad (106)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \dots$$

Por lo que

$$T(x) = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x) + \dots = O(h^2) \quad (107)$$

de forma que $|T(x)| \leq Ch^2$, siendo $C = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{12}u^{(4)}(x) \right|$. O sea, que el esquema en diferencias es consistente y la discretización es de segundo orden.

Sin embargo, la consistencia no es garantía de la convergencia del esquema en diferencias. Este necesita satisfacer, además, condiciones de estabilidad. Considérese la representación

$$A\mathbf{u} = \mathbf{F} + \mathbf{T}, \quad A\mathbf{U} = \mathbf{F} \Rightarrow A(\mathbf{u} - \mathbf{U}) = \mathbf{T} = A\mathbf{e} \quad (108)$$

donde A es la matriz de coeficientes del esquema en diferencias finitas, \mathbf{F} es el término que considera la condición de frontera, y \mathbf{T} es el error de truncamiento en los puntos de la malla donde se calcula la aproximación.

Definición 4.3 Un método de diferencias finitas para un problema de valor inicial es estable si A es no singular y

$$\|A^{-1}\| \leq C, \quad \text{para todo } 0 < h < h_0 \quad (109)$$

siendo C y h_0 dos constantes independientes de h .

De las definiciones de consistencia y estabilidad se puede concluir el siguiente teorema (Li et al., 2011):

Teorema 4.4 Un sistema en diferencias finitas que sea consistente y estable es convergente.

4.4 Análisis del error en el Método de Elementos Finitos

El análisis de error para el MEF usualmente incluye dos partes:

- 1) Estimación de error para la función intermedia en V_h , usualmente la función de interpolación.
- 2) Análisis de convergencia, un proceso límite que muestra que la solución del método converge a la solución real de la forma débil en alguna norma, cuando el tamaño de la malla h se acerca a 0.

Recordemos algunas notaciones:

- 1) Dada una forma débil $a(u, v) = L(v)$ y un espacio V con dimensión finita, el problema es encontrar $u \in V$ de forma que la forma débil se satisfaga para cualquier $v \in V$. Siendo así, u es denominada solución de la forma débil.
- 2) Un subespacio de dimensión finita de V denotado V_h es adoptado para un método de elementos finitos y no depende de h .
- 3) La solución de la forma débil en el subespacio V_h es denotada u_h , o sea, se requiere que $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ para cualquier $v_h \in V_h$.
- 4) El error global se define como $e_h = u(x) - u_h(x)$ y buscamos una cota superior lo suficientemente ajustada $\|e\|$ en alguna norma.

Debe recalcar que el error es introducido cuando el subespacio de dimensión finita reemplaza al espacio de solución, dado que la forma débil se satisface en dicho V_h y no en V . Sin embargo, puede demostrarse que la solución que satisface la forma débil es la mejor aproximación a la solución exacta (Li et al., 2011).

4.5 Comparación de errores y tiempo de cálculo para los métodos de Galerkin y Crank-Nicolson

A continuación, se muestra una comparación entre los resultados obtenidos para la resolución de la ecuación dada en el Ejemplo 1 de la sección 0.

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{t,x}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial U_{t,x}}{\partial x^2} = e^{-t} \dot{C}_t \\ U_{0,x} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (110)$$

Para este se han calculado las α –trayectorias considerando distintos valores de α . Los resultados se muestran en el Gráfico 1-4, que corresponde a la salida del programa Matlab.

alpha	m	Error_CN	Error_G	Tiempo_CN	Tiempo_G	Mem_CN	Mem_G
0.1	800	0.36012	6.6418	0.057952	0.17149	1908.2	1908.2
0.2	600	0.22716	5.4916	0.048878	0.056401	1908.2	1908.2
0.3	400	0.13878	4.945	0.031167	0.049531	1908.2	1908.2
0.4	200	0.06632	4.6399	0.016334	0.046447	1908.2	1908.2
0.6	150	0.06626	6.1497	0.014757	0.056936	1908.2	1908.2
0.7	125	0.13836	15.368	0.0057914	0.026806	1908.2	1908.2
0.8	100	0.22613	31.302	0.004558	0.026908	1908.2	1908.2
0.9	80	0.35792	61.76	0.0042223	0.026224	1908.2	1908.2

Gráfico 1-4: Salida del programa de Matlab en el que se implementaron los algoritmos.

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

Los valores de tiempo están dados en segundos y los valores de memoria están dados en MB.

alpha	m	Error_CN	Error_G	Tiempo_CN	Tiempo_G	Mem_CN	Mem_G
0.1	800	0.36012	6.6418	0.057952	0.17149	1908.2	1908.2
0.2	600	0.22716	5.4916	0.048878	0.056401	1908.2	1908.2
0.3	400	0.13878	4.945	0.031167	0.049531	1908.2	1908.2
0.4	200	0.06632	4.6399	0.016334	0.046447	1908.2	1908.2
0.6	150	0.06626	6.1497	0.014757	0.056936	1908.2	1908.2
0.7	125	0.13836	15.368	0.0057914	0.026806	1908.2	1908.2
0.8	100	0.22613	31.302	0.004558	0.026908	1908.2	1908.2
0.9	80	0.35792	61.76	0.0042223	0.026224	1908.2	1908.2

Gráfico 2-4: Comparación entre los errores y tiempos de cálculo utilizando los métodos de Crank-Nicolson y Galerkin para distintas α –trayectorias y distintos valores de m .

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

En la tabla anterior puede verse que tanto los tiempos de cálculo no guardan relación proporcional ni con α ni con el valor de m . Tampoco esta variación afecta a la memoria utilizada durante el proceso. Lo que sí resulta evidente es que en todos los casos los errores y el tiempo de cálculo necesario para aplicar el Método de Galerkin son mayores que los valores resultantes durante la aplicación del Método de Crank-Nicolson.

Analicemos si existe alguna relación entre el error y el tiempo de cálculo en relación con el valor de m . Es de esperar que, mientras más puntos se evalúen aumente el tiempo de cálculo. Esto debe tenerse en cuenta para poder establecer una relación lo suficientemente buena entre error y tiempo de cálculos óptimos. Como se muestra en el Gráfico 2-4, para ambos métodos el tiempo necesario para la implementación disminuye a medida que disminuye la dimensión de la rejilla de discretización. Sin embargo, al observar los resultados para el error en cada caso, puede apreciarse que el tamaño de la malla no afecta el error en el método de Crank-Nicolson, mientras que al aplicar el Método de Galerkin, el error aumenta al disminuir el tamaño de la malla. Esto es producto del mismo carácter de estabilidad incondicional del método de Crank-Nicolson, lo cual permite obtener valores igualmente aceptables sin necesidad de disminuir demasiado el paso temporal.

El Gráfico 3-4 muestra los resultados teniendo en cuenta distintos valores de α pero manteniendo el tamaño de la malla. Como puede apreciarse, los errores aumentan a medida que nos aproximamos a los valores límite de α , o sea, cuando $\alpha \rightarrow 0$ y cuando $\alpha \rightarrow 1$. Sin embargo, los tiempos de cálculo para ambos métodos disminuyen a medida que aumentan los valores de α .

alpha	m	Error_CN	Error_G	Tiempo_CN	Tiempo_G	Mem_CN	Mem_G
0.6	800	0.066455	1.2257	0.051205	0.16977	1907.1	1907.1
0.6	600	0.06644	1.6062	0.051239	0.050712	1907.1	1907.1
0.6	400	0.06641	2.3664	0.030887	0.045444	1907.1	1907.1
0.6	200	0.06632	4.6399	0.011107	0.036061	1907.1	1907.1
0.6	150	0.06626	6.1497	0.012294	0.05159	1907.1	1907.1
0.6	125	0.066212	7.3541	0.0058144	0.027271	1907.1	1907.1
0.6	100	0.06614	9.1551	0.0046873	0.024729	1907.1	1907.1
0.6	80	0.06605	11.397	0.003749	0.025215	1907.1	1907.1

Gráfico 3-4: Comparación entre los errores y tiempos de cálculo utilizando los métodos de Crank-Nicolson y Galerkin para distintos valores de m .

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

El análisis de la aplicación de los métodos de Galerkin y Crank-Nicolson para resolver la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre, permite obtener los siguientes resultados, luego de comparar los datos de los Gráficos: 1-4, 2-4, 3-4 y 4-4:

- El método de Crank-Nicolson es hasta un 15 % más rápido que el método de Galerkin.
- El método de Crank-Nicolson es incondicionalmente convergente.
- El error del método de Crank-Nicolson es hasta 99 % menor que el método de Galerkin
- El consumo de procesador, de recursos de memoria es similar en ambos métodos, con un promedio de uso de RAM de 1527.28 MB.

alpha	m	Error_CN	Error_G	Tiempo_CN	Tiempo_G	Mem_CN	Mem_G
0.1	800	0.36012	6.6418	0.057088	0.1583	1907.7	1907.7
0.2	800	0.22721	4.1905	0.058924	0.049808	1907.7	1907.7
0.3	800	0.13887	2.5612	0.051308	0.046672	1907.7	1907.7
0.4	800	0.066455	1.2257	0.049747	0.037824	1907.7	1907.7
0.6	800	0.066455	1.2257	0.055349	0.046071	1907.7	1907.7
0.7	800	0.13887	2.5612	0.036255	0.0268	1907.7	1907.7
0.8	800	0.22721	4.1905	0.035647	0.028267	1907.7	1907.7
0.9	800	0.36012	6.6418	0.036303	0.028449	1907.7	1907.7

Gráfico 4-4: Comparación entre los errores y tiempos de cálculo utilizando los métodos de Crank-Nicolson y Galerkin para distintas α –trayectorias.

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

4.6 Resultados y discusión

En cuanto al desarrollo de este trabajo, el objetivo principal de las clases demostrativas consistió en introducir el componente de docencia, para lo cual, se planificaron dos clases presenciales con estudiantes de cuarto semestre de la Carrera de Telecomunicaciones de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Con la socialización de los resultados del trabajo de investigación se esperaba: informar a los estudiantes, con el propósito de incentivar en ellos el interés en el estudio de las ecuaciones diferenciales, introducir la noción de los procesos estocásticos y de destacar la importancia de la aplicación de los métodos numéricos como herramienta didáctica para la solución de una diversidad de problemas que se presentan en las aplicaciones de las ciencias y de la ingeniería.

En la primera clase se realizaron las siguientes actividades:

- Una sinopsis de la utilidad de los métodos numéricos en los ámbitos de la ciencia y de la ingeniería.
- Una introducción a los diferentes programas computacionales que se utilizaron para implementar los códigos y ejecutar los algoritmos numéricos.
- Hacer una diferenciación entre software libre y software privativo y mencionar las ventajas y desventajas que se tendrían al usar unos u otros.
- Realizar un breve resumen conceptual de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y de los métodos para hallar una solución analítica, dadas las condiciones requeridas.
- Resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea y con coeficientes constantes, considerando que ese es el tema que en ese momento se desarrollaba en las clases de la asignatura correspondiente.
- Resolver la misma ecuación utilizando un código escrito utilizando el método numérico Runge-Kutta de cuarto orden y el software libre Octave.
- Presentar un gráfico de la solución de la ecuación diferencial.
- La realización de un análisis comparativo entre la solución analítica y la solución numérica.

4.7 Solución de la EDO

La EDO que se propuso es:

$$y'' - 8y' + 145y = 0, \quad \text{con } y(0) = -2; y'(0) = 1 \quad (111)$$

La ecuación característica de la EDO anterior es:

$$r^2 - 8r + 145 = 0 \quad (112)$$

Las raíces de la ecuación característica son:

$$r = \frac{1}{4} \pm 3i \quad (113)$$

Considerando que las raíces de (112) son complejas, la solución general de (111) es:

$$y = C_1 e^{x/4} \cos(3x) + C_2 e^{x/4} \sin(3x) \quad (114)$$

Luego de reemplazar las condiciones iniciales, se consigue la solución particular:

$$y = -2e^{x/4} \cos(3x) + \frac{1}{2} e^{x/4} \sin(3x) \quad (115)$$

Las gráficas de la solución analítica y de la solución numérica obtenida con el software Octave, aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, se muestran a continuación. Se observa que las gráficas se superponen visualmente. El valor del paso utilizado para la discretización es 0.1.

También es importante señalar que el código numérico que se utilizó para implementar el método de Runge-Kutta, fue escrito dando más importancia al aspecto didáctico que al aspecto técnico de este.

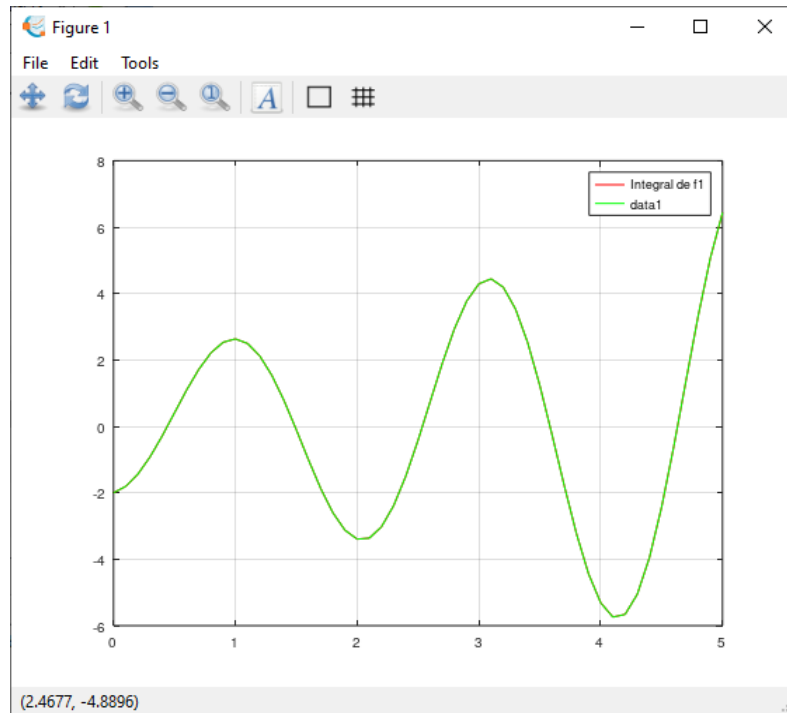


Gráfico 5-4: Gráficas de las soluciones numérica y analítica de (111)

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

Las actividades realizadas en la segunda clase fueron:

- Breve resumen de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.
- Presentación de la Ecuación Diferencial del Calor.
- La realización de un breve análisis comparativo entre los modelos matemáticos determinísticos y estocásticos.
- Breve introducción a los procesos estocásticos y a la incertidumbre.
- Breve presentación cronológica del surgimiento de la Ecuación Diferencial del Calor con incertidumbre.
- Introducción resumida a los métodos de las diferencias finitas y de los elementos finitos.
- Presentación del método numérico de Crank-Nicolson y de Galerkin.
- Discusión de la solución numérica de la Ecuación Diferencial del Calor con incertidumbre aplicando el método de Crank-Nicolson.
- Planteamiento de un cuestionario, a modo de encuesta anónima, para tratar de describir la percepción de los estudiantes acerca de los temas tratados.

Se debe destacar que las ecuaciones diferenciales parciales con incertidumbre no es un tema que se desarrolle en los contenidos de la asignatura de ecuaciones diferenciales que se dicta a los estudiantes de cuarto semestre de la carrera de Telecomunicaciones de la Escuela Superior

Politécnica de Chimborazo, pero por la pertinencia científica y por ser un tema que actualmente se encuentra en investigación y desarrollo, se lo presentó durante la segunda clase planificada para esta parte del trabajo.

4.8 Resultados de la socialización

Luego de realizar la encuesta a los estudiantes, se procedió a tabular los resultados y a determinar la validez de la encuesta aplicando el Alfa de Cronbach. Las gráficas y resultados obtenidos se muestran a continuación.

En primer lugar, se describirá la composición del grupo de estudiantes con quienes se efectuó esta parte del trabajo: en total fueron 7 mujeres y 22 hombres, cuyas edades oscilan entre los 19 y 30 años.

El cuestionario consta de 13 preguntas (ver anexos). Para garantizar la validez estadística de la encuesta, se utilizó la escala de Likert; se consideró la variable cualitativa género y se trató a la edad también como una variable cualitativa para no causar distorsión con las puntuaciones numéricas de la escala de Likert.

A continuación, se muestra el cuestionario que se propuso a los estudiantes:

1. ¿Cree que los temas sobre métodos numéricos aplicados a ecuaciones diferenciales con incertidumbre son?:

- Muy útiles
- Algo útiles
- Me da igual
- Poco útiles
- Nada útiles

2. ¿Cree que los métodos numéricos deberían ser utilizados como una herramienta didáctica para ampliar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales?:

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- Me es indiferente
- Algo de acuerdo

Nada de acuerdo

3. En las clases de ecuaciones diferenciales, ¿considera importante complementar el enfoque teórico con la aplicación de software?:

Muy importante

Importante

Me da igual

Poco importante

Nada importante

4. ¿Con qué frecuencia revisa material sobre ecuaciones diferenciales?:

Siempre

Casi siempre

A veces

Casi nunca

Nunca

5. En su formación académica, ¿considera necesario aprender el manejo de, al menos, un lenguaje de programación para resolución de ecuaciones diferenciales?:

Muy necesario

Necesario

Me da igual

Poco necesario

No es necesario

6. ¿Con qué frecuencia ha implementado un código de programación para resolver ecuaciones diferenciales?:

Siempre

- Casi siempre
- A veces
- Casi nunca
- Nunca

7. ¿Qué tan importante es, en un código de programación, el tiempo que le toma llegar a la solución para resolver ecuaciones diferenciales?:

- Muy importante
- Importante
- Me da igual
- Poco importante
- Nada importante

8. Con base en la clase demostrativa, ¿qué tan útil considera, usted, el estudio de problemas con incertidumbre en los campos relacionados con la ingeniería?

- Muy útil
- Algo útil
- Me da igual
- Poco útil
- Nada útil

9. ¿Qué tan probable es que usted aplique problemas con incertidumbre dentro de sus estudios?:

- Muy probable
- Probable
- Algo probable
- Poco probable
- Nada probable

10. ¿Qué tan probable es que utilice el software “Octave” para implementar problemas relacionados con ecuaciones diferenciales con incertidumbre?:

- Muy probable
- Probable
- Algo probable
- Poco probable

Nada probable

11. ¿Qué le pareció la calidad de la disertación presentada por el expositor en la clase demostrativa sobre la aplicación de los métodos numéricos para la solución de las ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales con incertidumbre?:

Muy buena

Buena

Regular

Mala

Muy mala

12. ¿Qué tan probable es que usted asista nuevamente a una charla sobre la aplicación de los métodos numéricos para la solución de las ecuaciones diferenciales con incertidumbre?:

Muy probable

Probable

Algo probable

Poco probable

Nada probable

13. ¿Cómo califica los recursos elegidos para exponer sobre la aplicación de los métodos numéricos para la solución de las ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales con incertidumbre?:

Muy buenos

Buenos

Regulares

Malos

Muy malos

Luego de la tabulación de los resultados y de aplicar el Alfa de Cronbach, se obtuvo el valor de 0.826, que equivale a “Muy bueno” en la escala cualitativa. Este resultado demuestra la validez estadística del cuestionario, pero, al mismo tiempo, sirve para confirmar la validez del trabajo didáctico realizado con los estudiantes.

Se relievó que para la determinación del valor del Alfa de Cronbach y para la generación de las gráficas resultantes se utilizó el software libre “R”. Se decidió realizar estas gráficas por la importancia de entender la forma de pensar de los estudiantes que asistieron a las clases demostrativas acerca de los temas expuestos y tratar de tener una apreciación del nivel de aceptación de la utilidad de los métodos numéricos y de los procesos estocásticos aplicados a las ecuaciones diferenciales, luego de la socialización de los resultados de este trabajo de investigación.

De acuerdo con los resultados obtenidos con la aplicación del software R y el Alfa de Cronbach, se puede afirmar que los estudiantes del grupo de trabajo están conscientes de la importancia de saber programar y escribir códigos numéricos, así como consideran importante el aprendizaje de, al menos, un lenguaje de programación como parte esencial de su formación como ingenieros. Finalmente, los ya citados resultados de las encuestas demuestran el buen nivel de aceptación de los estudiantes a la disertación del expositor, a los métodos, recursos y materiales utilizados.

4.9 Análisis de resultados de las encuestas planteadas a los estudiantes

Según se puede observar en el Gráfico 6-4, los estudiantes hombres de la Facultad de Ingeniería y Electrónica, carrera de Telecomunicaciones de la ESPOCH, en su mayoría consideran que es muy útil (5 en la escala de Likert) conocer y estudiar problemas con incertidumbre, esto lo hacen de acuerdo con su experiencia y formación recibida en la institución antes mencionada. Además, los datos se concentran mayoritariamente en las edades entre los 20 y 28 años. Si bien, el número de mujeres es reducido, es interesante observar que consideran también que es de mucha utilidad el estudio de problemas con incertidumbre para su formación profesional.

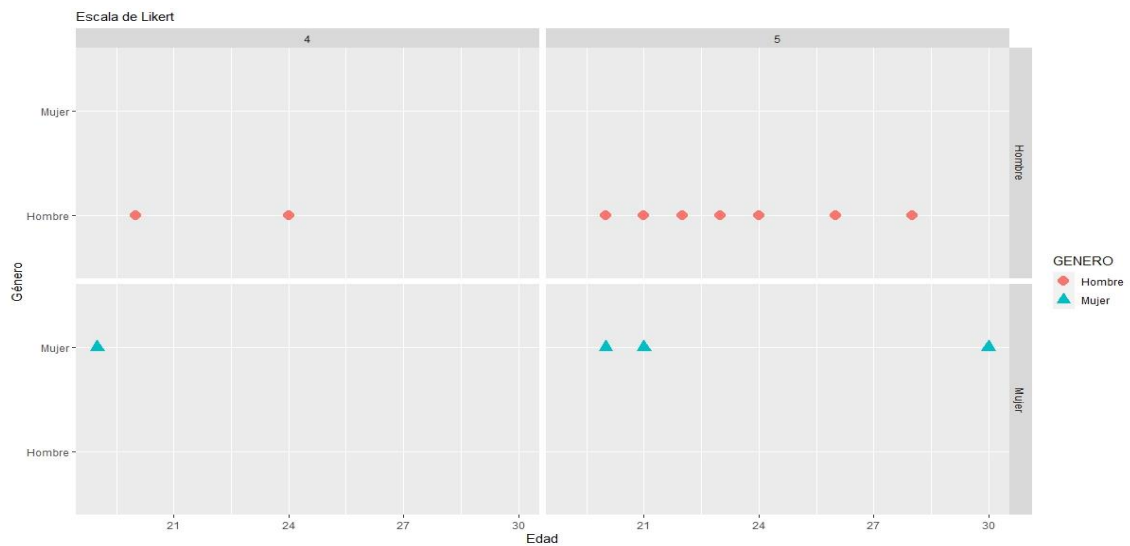


Gráfico 6-4: Percepción de los estudiantes acerca de la utilidad de los problemas de ecuaciones diferenciales con incertidumbre.

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

En el Gráfico 7-4, podemos observar que la frecuencia con la que revisan material los estudiantes hombres está asentada entre los valores 3 y 4 de la escala de Likert (A veces y casi siempre, respectivamente). Es decir, en los estudiantes de cuarto semestre de la carrera de Telecomunicaciones no es algo muy común referirse a bibliografía sobre ecuaciones diferenciales como método de consulta. Las edades de 19, 26, 28 y 30 años se presentan como atípicas, mientras que la mayor concentración de información se da entre los 20 y 24 años. Además, en el rango de edad antes mencionado, también se da la mayor cantidad de estudiantes que revisan material “A veces”.

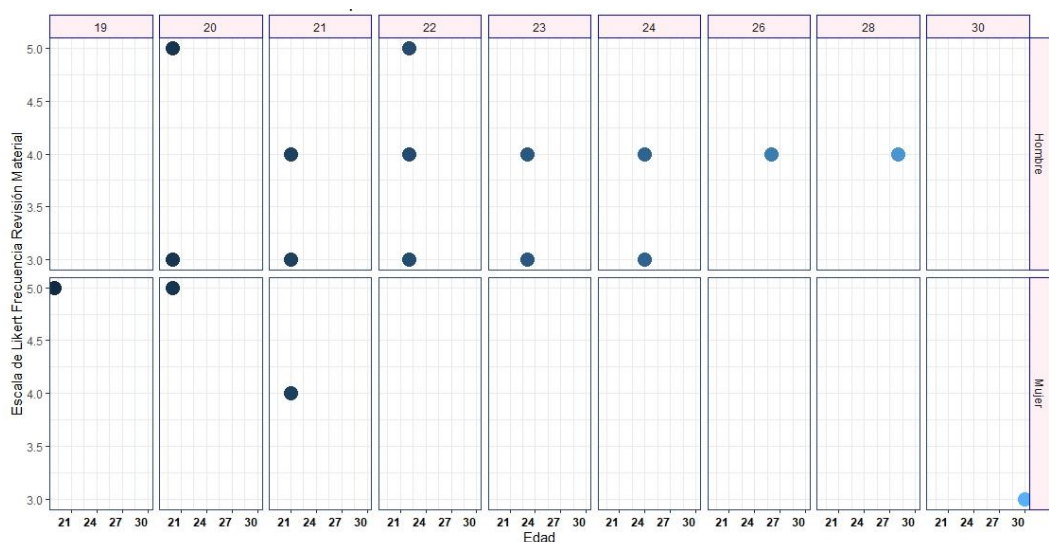


Gráfico 7-4: Frecuencia con la que los estudiantes revisan material sobre ecuaciones diferenciales.

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

En la imagen 3, se presentan datos que permiten cruzar la probabilidad de aplicar problemas con incertidumbre (eje superior) con la utilidad de estudiar problemas con incertidumbre (eje lateral derecho). Esto nos permite evidenciar que, pese a ser un tema recientemente introducido a los estudiantes, generó impacto y valor, de modo que los estudiantes hombres y mujeres que consideran útil estudiar el tipo de problemas de ecuaciones diferenciales con incertidumbre, también ven como muy probable aplicar este tipo de problemas en su formación académica y profesional.

Es interesante observar en el Gráfico 9-4 que son muy pocos los estudiantes que con frecuencia implementan sus propios “scripts” para resolver ecuaciones diferenciales, sin embargo, están muy conscientes de que deben aprender algún lenguaje de programación que les permita ser más eficientes en la resolución de problemas basados en ecuaciones diferenciales. Teniendo en cuenta la importancia de la utilización de los lenguajes de programación, se nota que aún no existe del todo una concientización acerca de ello, y que las dinámicas de estudio de este tipo de problemas deberían ser mejor enfocadas y mucho mejor orientadas a brindar a los estudiantes respuestas y más no a generar dudas que terminen por desanimar el estudio de modelos y fenómenos que son de interés académico y profesional.

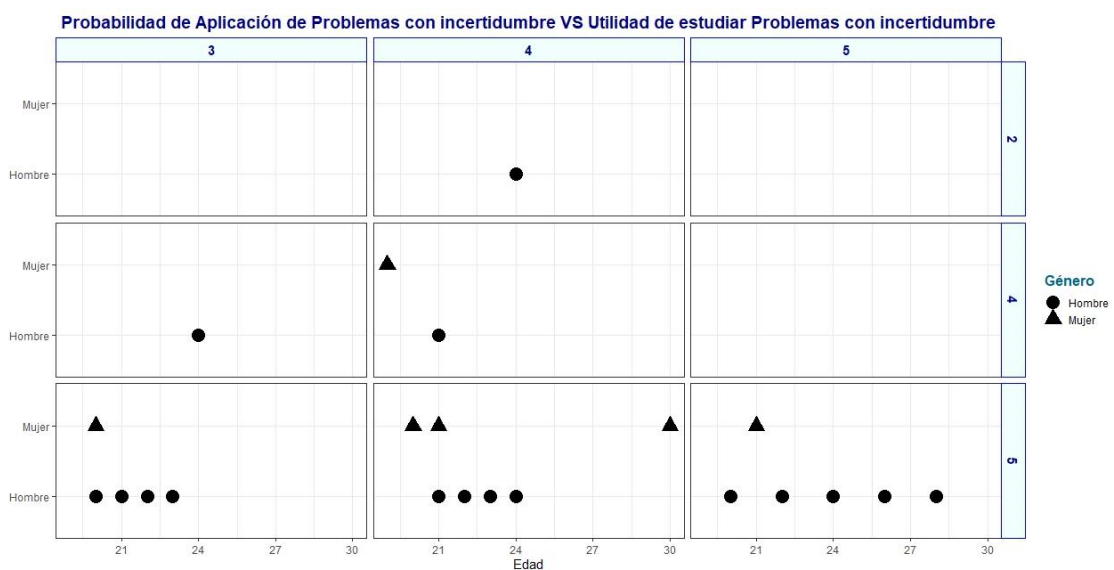


Gráfico 8-4: Probabilidad de aplicación de problemas con incertidumbre VS la utilidad de estudiar problemas con incertidumbre.

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

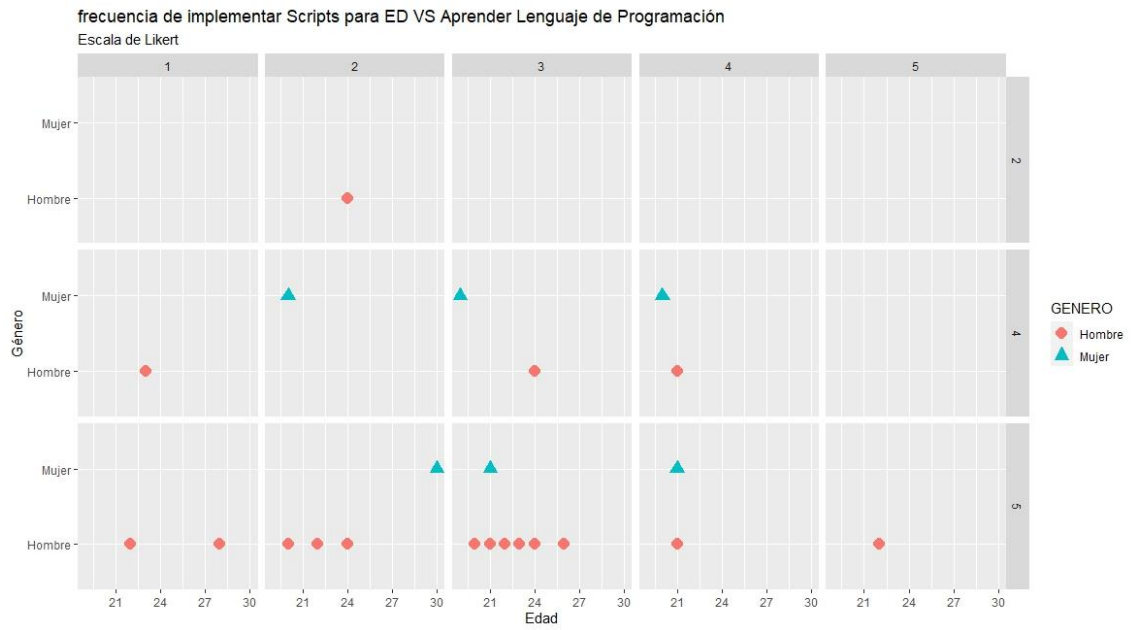


Gráfico 9-4: Comparativa de estudiantes que programan sus propios scripts frente a los que desean aprender un lenguaje de programación.

Realizado por: Lascano, Edison, 2023.

CONCLUSIONES

- En el presente trabajo se ha aplicado el método de Crank-Nicolson para resolver la ecuación del calor con incertidumbre y se ha demostrado la efectividad del método para encontrar la solución numérica deseada.
- Se ha demostrado, además, que el método de Crank-Nicolson conlleva menos costo computacional. Esto se ha visto reflejado en las comparaciones mostradas con los resultados obtenidos para el método de Galerkin, como se presentó en la unidad 4 de este trabajo.
- En términos de errores y estabilidad, el método de Crank-Nicolson reporta también resultados superiores. Esto lo han reportado J. Liu y Hao (2022) comparando sus resultados con otras variantes del Método de Diferencias Finitas. En el presente trabajo ese resultado queda también evidenciado, a partir de las comparaciones con los errores reportados por el método de Galerkin.
- El método de Crank-Nicolson es hasta un 15 % más rápido que el método de Galerkin
- El método de Crank-Nicolson es incondicionalmente convergente.
- El error del método de Crank-Nicolson es hasta 99 % menor que el método de Galerkin
- El consumo de procesador, de recursos de memoria es similar en ambos métodos, con un promedio de uso de RAM de 1527.28 MB.

RECOMENDACIONES

- Investigar la validez de otros métodos numéricos para resolver la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre.
- Extender el análisis de la solución de la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre, realizada en este trabajo, al análisis bidimensional aplicado a placas de forma circular, cuadrada, rectangular y otras geometrías comunes.
- Utilizar otros lenguajes de programación, como Python, para realizar comparaciones de si eficiencia y eficacia para resolver la ecuación unidimensional del calor con incertidumbre.

GLOSARIO

Algoritmo: Conjunto ordenado de operaciones sistemáticas que permite hacer un cálculo y hallar la solución de un tipo de problemas.

Canónico: Forma o expresión de un objeto matemático que resulta ideal para su análisis, estudio o para alguna operación en particular.

Continuidad: implica que un pequeño cambio en la variable x implica sólo un pequeño cambio en el valor de $f(x)$, es decir, la gráfica consiste en un sólo trozo de curva.

Difusividad térmica: propiedad específica de cada material para caracterizar conducción de calor en condiciones no estacionarias.

Dualidad: que es doble o contiene en sí dos naturalezas, dos sustancias o dos principios, doble perspectiva o doble significado; por ejemplo: dualidad onda-partícula.

Estocástico: sinónimo de aleatorio y, por tanto, que está sometido al azar y que es objeto de análisis estadístico.

Operador diferencial: su aplicación y propósito es considerar a la diferenciación como una operación abstracta que acepta una función derivable y devuelve otra función, la derivada.

Parcialmente ordenado: es un conjunto equipado con una relación binaria de orden parcial, que formaliza el concepto intuitivo de orden, secuencia, o arreglo de los elementos del conjunto.

RAM: Sigla de *Random Access Memory* ('memoria de acceso aleatorio'), memoria principal de la computadora, donde residen programas y datos, sobre la que se pueden efectuar operaciones de lectura y escritura.

Ruido blanco: proceso estocástico, donde los valores son independientes e idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo con media cero e igual varianza.

Sigma-álgebra (σ -álgebra): estructura que contiene a todos los eventos medibles de un espacio muestral, y que permite definir una medida de probabilidad.

Software libre: software que respeta la libertad de los usuarios y la comunidad. A grandes rasgos, significa que los usuarios tienen la libertad de ejecutar, copiar, distribuir, estudiar, modificar y mejorar el software.

Software privativo: también llamado software propietario, se refiere a aquellos programas de autor definido que nieguen de alguna forma el libre acceso al código fuente, ya sea para modificarlo, estudiarlo o distribuirlo.

Valor esperado: esperanza matemática, sumatoria de las probabilidades de que ocurra un suceso aleatorio, multiplicado por el valor del suceso aleatorio.

Valores extremos: máximos y mínimos de una función.

BIBLIOGRAFÍA

- Chen, X., & Liu, B. (2010). Existence and uniqueness theorem for uncertain differential equations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 9(1), 69–81. <https://doi.org/10.1007/s10700-010-9073-2>
- Crank, J., & Nicolson, P. (1947). A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(1), 50–67. <https://doi.org/10.1017/S0305004100023197>
- Fort, E. C. Du, & Frankel, S. P. (1953). Stability Conditions in the Numerical Treatment of Parabolic Differential Equations. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 7(43), 135. <https://doi.org/10.2307/2002754>
- Gao, R. (2016). Milne method for solving uncertain differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 274, 774–785. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.043>
- Gao, Y. (2012). Existence and Uniqueness Theorem on Uncertain Differential Equations with Local Lipschitz Condition. *Journal of Uncertain Systems*, 6(3), 223–232.
- Gu, Y., Hua, Q., Zhang, C., & He, X. (2019). The generalized finite difference method for long-time transient heat conduction in 3D anisotropic composite materials. *Applied Mathematical Modelling*, 71, 316–330. <https://doi.org/10.1016/J.APM.2019.02.023>
- Holden, H., Lindstrøm, T., Aksendal, B., Ubáe, J., & Zhang, T. S. (1994). The burgers equation with a noisy force and the stochastic heat equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 19(1–2), 119–141. <https://doi.org/10.1080/03605309408821011>
- Li, Z., Qiao, Z., & Tang, T. (2011). *Numerical Solutions of PDE - An introduction to finite difference and finite element methods*. <https://doi.org/10.1017/9781316678725>
- Liu, B. (2007). Uncertainty Theory. En *Uncertainty Theory. Studies in Fuzziness and Soft Computing* (Número 154, pp. 205–234). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-73165-8_5
- Liu, B. (2009). Some Research Problems in Uncertainty Theory. *Journal of Uncertain Systems*, 3(1), 3–10.
- Liu, B. (2010). Uncertainty Theory. En *Uncertainty Theory. Studies in Computational Intelligence* (pp. 1--79). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-981-19-1472-0_3
- Liu, Baoding. (2008). Fuzzy Process, Hybrid Process and Uncertain Process. *Journal of Uncertain Systems*, 2(1), 3–16.
- Liu, Baoding. (2013). Toward uncertain finance theory. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications 2013 1:1, 1(1)*, 1–15. <https://doi.org/10.1186/2195-5468-1-1>

- Liu, H., Ke, H., & Fei, W. (2014). Almost sure stability for uncertain differential equation. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 2014 13:4, 13(4), 463–473. <https://doi.org/10.1007/S10700-014-9188-Y>
- Liu, J., & Hao, Y. (2022). Crank–Nicolson method for solving uncertain heat equation. *Soft Computing*, 26(3), 937–945. <https://doi.org/10.1007/s00500-021-06565-9>
- Robertsson, J. O. A., & Blanch, J. O. (2020). Numerical Methods, Finite Difference. *Encyclopedia of Earth Sciences Series, PartF4*, 1–9. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10475-7_135-1/COVER
- Sheng, Y., & Gao, J. (2015). Exponential stability of uncertain differential equation. *Soft Computing* 2015 20:9, 20(9), 3673–3678. <https://doi.org/10.1007/S00500-015-1727-0>
- Sheng, Y., & Wang, C. (2014). Stability in p-th moment for uncertain differential equation. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 26(3), 1263–1271. <https://doi.org/10.3233/IFS-130812>
- Swanson, J. (2007). Variations of the solution to a stochastic heat equation. *Annals of Probability*, 35(6), 2122–2159. <https://doi.org/10.1214/009117907000000196>
- Walsh, J. B. (1986). An introduction to stochastic partial differential equations. En *École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV - 1984* (pp. 265–439). Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/bfb0074920>
- Yang, X. (2018). Solving uncertain heat equation via numerical method. *Applied Mathematics and Computation*, 329, 92–104. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.01.055>
- Yang, X., & Ni, Y. (2019). Extreme values problem of uncertain heat equation. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 15(4), 1995–2008. <https://doi.org/10.3934/jimo.2018133>
- Yang, X., & Ralescu, D. A. (2015). Adams method for solving uncertain differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 270, 993–1003. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.109>
- Yang, X., & Yao, K. (2017). Uncertain partial differential equation with application to heat conduction. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 16(3), 379–403. <https://doi.org/10.1007/s10700-016-9253-9>
- Yao, K., Gao, J., & Y., G. (2013). Some stability theorems of uncertain differential equation. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 12(1), 3–13.
- Yao, Kai, & Chen, X. (2013). A numerical method for solving uncertain differential equations. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 25(3), 825–832. <https://doi.org/10.3233/IFS-120688>
- Yao, Kai, Ke, H., & Sheng, Y. (2015). Stability in mean for uncertain differential equation. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 2015 14:3, 14(3), 365–379.

<https://doi.org/10.1007/S10700-014-9204-2>

Zhang, Y., Gao, J., Li, X., & Yang, X. (2021). Two-person cooperative uncertain differential game with transferable payoffs. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 20(4), 567--594.

Zhu, Y. (2010). Uncertain optimal control with application to a portfolio selection model. *Cybernetics and Systems*, 41(7), 535–547.
<https://doi.org/10.1080/01969722.2010.511552>

ANEXOS

ANEXO A: CÓDIGO PARA RESOLVER LA ECUACIÓN UNIDIMENSIONAL DEL CALOR CON INCERTIDUMBRE CON EL MÉTODO DE CRANK-NICOLSON

```
%Se resuelve la Ecuacion del calor unidimensional
%con incertidumbre,  $dH/dt = a dH^2/dt^2 + h(x,t,H)$ 
%utilizando el metodo de Crank-Nicolson
%con condiciones iniciales  $U(0,x)=\mu(x)$ 
%Se utiliza la notacion de Liu & Hao (2022)

clear all

%% Declarando los parametros inciales

a = 0.01;

x0 = 0;

xend=1;

t0 = 0;

tend = 1;

ejemplo = input('Que ejemplo va a reproducir (1,2,3): ');

switch ejemplo

    case 1

        % Ejemplo 1

        Nx = 10;

        Nt = 150;

        mu = @(x) 0; %condicion inicial

        beta = 0.6;

        p = @(t,x) 0;

        q = @(t,x) -exp(-t);

        Hexact = @(t,x) sqrt(3)/pi*(1-exp(-t))*log(beta/(1-beta));

    %

    case 2
```

```

% Ejemplo 2

xend = 10;

Nx = 200;

Nt = 200;

mu = @(x) sin(x); %condicion inicial

beta = 0.7;

p = @(t,x) exp(-t)*sin(x);

q = @(t,x) 1+cos(x);

%

case 3

% Ejemplo 3

Nx = 10;

Nt = 200;

mu = @(x) exp(x).*sin(x); %condicion inicial

beta = 0.3;

p = @(t,x) 2*sin(3*x);

q = @(t,x) exp(-t)*sin(x);

end

tic %Comienza a medir el tiempo

%% Ciclo de Crank-Nicolson

H = zeros(Nt+1,Nx+1); %Inicializar la matriz solucion

dx = (xend-x0)/Nx; %paso espacial

dt = (tend-t0)/Nt; %paso temporal

r = a*dt/dx^2;

disp(['r = ',num2str(r)])

x = x0:dx:xend; %vector x

t = t0:dt:tend; %vector t

H(1,:) = mu(x);

gamma = sqrt(3)/pi*log(beta/(1-beta));

h = @(t,x) p(t,x) + abs(q(t,x))*gamma;

```

```

%Matrices del sistema

A = diag([1,2*(1+r)*ones(1,Nx-1),1]) + diag([0,-r*ones(1,Nx-1)],1)
+...

    diag([-r*ones(1,Nx-1),0],-1);

B = diag(2*(1-r)*ones(1,Nx-1)) + diag(r*ones(1,Nx-2),1) +...

    diag(r*ones(1,Nx-2),-1);

for m = 2:Nt+1

    H(m,1) = (1-r)*H(m-1,1)+ r*H(m-1,2) + dt*h(t(m),x(1));

    H(m,end) = (1-r)*H(m-1,end) + r*H(m-1,end-1)+dt*h(t(m),x(end));

    b = B*H(m-1,2:end-1)';

    for n = 1:Nx-1

        b(n) = b(n) + dt*(h(t(m-1),x(n+1)) + h(t(m-1),x(n)));

    end

    H(m,:) = A\[H(m,1);b;H(m,end)];

    %H(m,2:end-1) = systemsol(2:end-1);

end

T=toc; %Termina de medir el tiempo

fprintf('El tiempo empleado para ejecutar el programa %1.5f seg\n',T)

[mem,~]=memory;

memoria = mem.MemUsedMATLAB/(1024^2); %Memoria usada por MATLAB en MB

fprintf('La memoria usada es %g MB\n',memoria)

figure(1)

surf(x,t,H);

xlim([x0,xend])

xlabel('x')

ylabel('t')

shading interp

if ejemplo == 1

    [tmesh,xmesh]=meshgrid(t,x);

```



```
error = abs(Hexact(tmesh, xmesh) - H);  
%error = Hexact(tmesh, xmesh)';  
figure(2)  
surf(x, t, error);  
xlabel('x')  
ylabel('t')  
zlim([0, 1e-3])  
shading interp  
end
```

ANEXO B: CÓDIGO PARA RESOLVER LA ECUACIÓN UNIDIMENSIONAL DEL CALOR CON INCERTIDUMBRE CON EL MÉTODO DE GALERKIN

```
function galerkin_heat_u

%Se resuelve la Ecuacion del calor unidimensional
%con incertidumbre,  $dH/dt = a dH^2/dt^2 + h(x,t,H)$ 
%utilizando el metodo de Galerkin
%con condiciones iniciales  $U(0,x) = \mu(x)$ 
%Se utiliza la notacion de Liu & Hao (2022)

clear all

%% Declarando los parametros iniciales

a = 0.01;

x0 = 0;

xend = 1;

t0 = 0;

tend = 1;

ejemplo = input('¿Qué ejemplo va a reproducir? (1, 2, 3): ');

switch ejemplo

    case 1

        % Ejemplo 1

        Nx = 10;

        Nt = 150;

        H = zeros(Nt+1,Nx+1); %Inicializar la matriz solucion

        dx = (xend-x0)/Nx; %paso espacial

        dt = (tend-t0)/Nt; %paso temporal

        r = a^2*dt/dx^2;

        disp(['r = ', num2str(r)])

        x = x0:dx:xend; %vector x

        t = t0:dt:tend; %vector t

        mu = @(x) 0; %condicion inicial

        H(1,:) = mu(x);
```

```

beta = 0.6;

gamma = sqrt(3)/pi*log(beta/(1-beta));

p = @(t,x) 0;

q = @(t,x) -exp(-t);

h = @(t,x) p(t,x) + abs(q(t,x))*gamma;

% Funciones Base

Nphi = 3; %Numero de funciones base

phi = @(x) [ones(size(x)); x; x.^2];

dphi= @(x) [zeros(size(x)); ones(size(x)); 2*x]; %Derivada de las
phi
%

case 2

% Ejemplo 2

xend = 10;

Nx = 200;

Nt = 200;

H = zeros(Nt+1,Nx+1); %Inicializar la matriz solucion

dx = (xend-x0)/Nx; %paso espacial

dt = (tend-t0)/Nt; %paso temporal

r = a^2*dt/dx^2;

disp(['r = ',num2str(r)])

x = x0:dx:xend; %vector x

t = t0:dt:tend; %vector t

mu = @(x) sin(x); %condicion inicial

H(1,:) = mu(x);

beta = 0.7;

gamma = sqrt(3)/pi*log(beta/(1-beta));

p = @(t,x) exp(-t).*sin(x);

q = @(t,x) 1+cos(x);

h = @(t,x) p(t,x) + abs(q(t,x))*gamma;

```

```

% Funciones Base

Nphi = 3; % Numero de funciones base

phi = @(x) [ones(size(x)); exp(-x).*sin(x); cos(x)];

dphi= @(x) [zeros(size(x)); exp(-x).*(-sin(x)+cos(x)); -sin(x)];
%Derivada de las phi

%

case 3

% Ejemplo 3

Nx = 10;

Nt = 200;

H = zeros(Nt+1,Nx+1); %Inicializar la matriz solucion

dx = (xend-x0)/Nx; %paso espacial

dt = (tend-t0)/Nt; %paso temporal

r = a^2*dt/dx^2;

disp(['r = ', num2str(r)])

x = x0:dx:xend; %vector x

t = t0:dt:tend; %vector t

mu = @(x) exp(x).*sin(x); %condicion inicial

H(1,:) = mu(x);

beta = 0.3;

gamma = sqrt(3)/pi*log(beta/(1-beta));

p = @(t,x) 2*sin(3*x);

q = @(t,x) exp(-t).*sin(x);

h = @(t,x) p(t,x) + abs(q(t,x))*gamma;

% Funciones Base

Nphi = 3; % Numero de funciones base

phi = @(x) [sin(3*x); 2*exp(-x).*sin(x); exp(-x).*cos(x)];

dphi= @(x) [3*cos(3*x); 2*exp(-x).*(-sin(x)+cos(x));...

-exp(-x).*(cos(x)+sin(x))]; %Derivada de las phi

end

```

```

tic

%% Condiciones iniciales para la ecuacion diferencial
alpha0 = zeros(Nphi,1);
for p = 1:Nphi
    alpha0(p) = mu(x(p));
end

phieval = phi(x); %Se evaluan las funciones bases
[~,alphasol] = ode45(@ecuacion,t0:dt:tend,alpha0);

    for l = 1:Nt+1
        for k = 1:Nphi
            H(l,:) = H(l,:) + alphasol(l,k)*phieval(k,:);
        end
    end

end

T = toc;

fprintf('El tiempo empleado para ejecutar el programa es: %1.5f
seg\n',T)

fprintf('La memoria usada es: \n')

memory

%[xm,tm] = meshgrid(x,t);

surf(x,t,H);

xlabel('x')

ylabel('t')

shading interp

%% Nested function
function dalpha = ecuacion(te,alpha)

%% Matrices del sistema de ecuaciones diferenciales

M = zeros(Nphi,Nphi);

K = zeros(Nphi,Nphi);

f = zeros(Nphi,1);

dphieval = dphi(x);%Se evaluan las derivadas de las funciones base

```

```
for k = 1:Nphi
    for l = 1:Nphi
        M(k,l) = trapz(x,phieval(l,:).*phieval(k,:));
        K(k,l) = a*trapz(x,dphieval(l,:).*dphieval(k,:));
    end
    f(k) = trapz(x,h(t(k),x).*phieval(k,:));
end
%
dalpha = M\K*alpha + M\f;
end
```

ANEXO C: CÓDIGO EMPLEADO EN LA CLASE DEMOSTRATIVA

```
%Programa que resuelve un sistema de EDO lineal con el metodo RK clasico de
%cuarto orden

f1 = input('f1(x, y, w): '); %Ingreso de la primera funcion del sistema de EDO
f2 = input('f2(x, y, w): '); %Ingreso de la segunda funcion del sistema de EDO
x(1) = input('x(1): '); %Ingreso de la condicion inicial para x
y(1) = input('y(1): '); %Ingreso de la condicion inicial para el rango de f1: y
w(1) = input('w(1): '); %Ingreso de la condicion inicial para el rango de f2: w
xf = input('xf: '); %Ingreso de punto final del intervalo de integracion
dx = input('dx: '); %Ingreso del paso
n = abs(xf - x(1))/dx; %Calculo de la cantidad de intervalos
x = [x(1):dx:xf]; %Definicion de los valores del dominio para evaluar f(x, y)
% Ciclo para implementar el metodo RK de cuarto orden
for i = 1:n
    %Calculo de los k1j y de los k2j
    k11 = f1(x(i), y(i), w(i));
    k12 = f2(x(i), y(i), w(i));
    k21 = f1(x(i) + dx/2, y(i) + k11*dx/2, w(i) + k12*dx/2);
    k22 = f2(x(i) + dx/2, y(i) + k11*dx/2, w(i) + k12*dx/2);
    k31 = f1(x(i) + dx/2, y(i) + k21*dx/2, w(i) + k22*dx/2);
    k32 = f2(x(i) + dx/2, y(i) + k21*dx/2, w(i) + k22*dx/2);
    k41 = f1(x(i) + dx, y(i) + k31*dx, w(i) + k32*dx);
    k42 = f2(x(i) + dx, y(i) + k31*dx, w(i) + k32*dx);
    %Calculo de y(i + 1)
    y(i + 1) = y(i) + (k11 + 2*k21 + 2*k31 + k41)*dx/6;
    %Calculo de w(i + 1)
    w(i + 1) = w(i) + (k12 + 2*k22 + 2*k32 + k42)*dx/6;
```

```
end
TABLA = [x; y]' %Presenta los valores del dominio y las evaluaciones numericas
plot(x, y, 'r')
legend('Integral de f1')
grid on
hold on
z=0:.1:5;
f=@(z)-2*exp(0.25*z).*cos(3*z)+.5*exp(0.25*z).*sin(3*z);
plot(z,f(z),'g')
```