ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS DERIVADAS A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: FERNANDO DANIEL PANTA VÁSQUEZ
DIRECTOR: Lic. RAMÓN ANTONIO ABANCÍN OSPIÑA, MSc.

Riobamba – Ecuador

2023

Yo, Fernando Daniel Panta Vásquez, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 10 de noviembre de 2023

Fernando Daniel Panta Vásquez
095560280-0

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS DERIVADAS A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**, realizado por el señor: **FERNANDO DANIEL PANTA VÁSQUEZ**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
Ms.C Carlos Cova Salaya **PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**		2023-10-10
Ms.C. Ramón Abancín Ospina **DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2023-10-10
Mgs. María Mendoza Salazar **ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2023-10-10

DEDICATORIA

A mis padres Daniel y Herlinda

Su amor incondicional, apoyo constante en todas las decisiones que he tomado y su sacrificio día a día han sido mi base y mi inspiración para mantener mi camino académico. Su guía y ejemplo me han inspirado a luchar y alcanzar mis metas. Sin su apoyo y confianza en mí, este logro no sería posible, ya que ellos fueron el pilar fundamental para convertirme en todo lo que soy.

A Dios

Ya que su sabiduría y fortaleza ilumino mi camino y me brindó la fe necesaria para superar los desafíos que encuentre a lo largo en este viaje.

A mis hermanos Sebas, Danna y Johan

Ya que han sido mi constante inspiración. Mi deseo de ser un modelo a seguir para ustedes me impulso a no rendirme sin importar las circunstancias y a esforzarme lo máximo posible en esta travesía.

Fernando

AGRADECIMIENTO

Agradezco primeramente a mis padres Daniel y Herlinda por el sacrificio que hicieron para lograr darme el estudio, por su constante apoyo a lo largo de todos estos años.
A mis hermanos, que a pesar de la distancia siempre me han brindado su cariño y su amor a su manera.
A Yuly por el apoyo, el cariño, la paciencia y palabras de aliento que me ha brindado para no rendirme y cumplir esta meta.
A mis amigos Belén, Wilmer, Jessica, Joel y Marco, quienes a lo largo de esta carrera universitaria estuvieron para darme una mano y ayudarme en lo que he necesitado.
A toda mi familia y amigos quienes compartieron momentos felices y también los días de esfuerzo y sacrificio.
Y en especial, a mi tutor de este Trabajo de Integración curricular, el MsC. Ramón Abancín, ya que sin su apoyo, confianza, lecciones de vida, y sus excelentes correcciones, pude lograr este anhelado objetivo.

Fernando

ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN

En el contexto del estudio y aprendizaje de las matemáticas, la comprensión de las derivadas ha ocasionado ser un desafío persistente tanto para los aprendices como para los docentes, por lo tanto, el objetivo de la presente investigación fue realizar un estudio del tema de derivadas, con el fin de diseñar un documento referencial que contemple una propuesta metodológica a través de la resolución de problemas para la enseñanza de las derivadas. La metodología del presente trabajo fue abordada bajo un enfoque cualitativo no interactivo, con un alcance descriptivo, y se utilizó un diseño de investigación documental. Por medio de estos tres aspectos metodológicos se logró cristalizar un documento referencial sobre la resolución de problemas enmarcada dentro del tema de derivadas, la cual abarca los dos resultados fundamentales de este trabajo; el primero fue el desarrollo de una nueva propuesta metodológica para el estudio de las derivadas a través de la resolución de problemas, la cual consta de cuatro nuevas fases, a saber: lectura y comprensión del tema, búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas, construcción de la solución, por último, la de verificación de resultados; y el segundo resultado, fue el desarrollo de problemas contextualizados sobre el tema de derivadas mediante las cuatro nuevas fases, que sirvió como ejemplificación de la propuesta metodológica. Es así, que se llegó a la conclusión de que a través del uso del documento referencial se pueda contribuir al desarrollo de habilidades críticas de pensamiento, razonamiento lógico y creativo en el tema de las derivadas, el cual sirve como un pilar fundamental para el estudio de cálculo diferencial.

Palabras claves: <DERIVADAS>, <HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS>, <CONTEXTUALIZACIÓN>, <PROPUESTA METODOLÓGICA>, <RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS>, <PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS>.

1970-DBRA-UPT-2023

SUMMARY

In the context of the study and learning of mathematics, the understanding of derivatives has proven to be a persistent challenge for both learners and teachers. Therefore, the objective of this research was to conduct a comprehensive examination of the topic of derivatives to design a referential document that contemplates a methodological proposal through problem-solving for the teaching of derivatives. The methodology of this work was approached under a non-interactive qualitative approach with a descriptive scope, using a documentary research design. Through these three methodological aspects, a referential document was designed, focusing on problem-solving within the domain of derivatives which encompasses the two fundamental outcomes of this study. Firstly, it entails the development of an innovative methodological proposal for the study of derivatives through problem-solving, comprising four distinct phases: reading and understanding the topic, searching and studying mathematical tools, construction of the solution, and finally, verification of results. Secondly, the study resulted in the creation of contextualized problems related to the topic of derivatives through the application of these four new phases, serving as an exemplification of the methodological proposal. Thus, it was concluded that through the use of the referential document, it is possible to contribute to the development of critical thinking skills, alongside logical and creative reasoning on the subject of derivatives, which serve as the foundational basis for the exploration of differential calculus.

KEYWORDS: <DERIVATIVES>, <TECHNOLOGICAL TOOLS>, <CONTEXTUALIZATION>, <METHODOLOGICAL PROPOSAL>, <PROBLEM-SOLVING>, <CONTEXTUALIZED PROBLEMS>.

María Eugenia Camacho Oleas

060160959-7

INTRODUCCIÓN

El conocer y entender la matemática, además de llegar a ser muy satisfactorio para muchas personas, brinda la posibilidad de tener un mejor razonamiento lógico y desenvolvimiento en problemas de la vida real. En adición, el área de matemática inevitablemente se encuentra presente en la cotidianidad de las personas, como por ejemplo, en el ámbito deportivo, las estadísticas desempeñan un rol importante en el historial de los atletas; en el social, el cálculo ayuda a predecir la taza de crecimiento de la población de una ciudad; mientras que en el natural, las ecuaciones diferenciales permite estudiar el comportamiento entre dos especies de animales, las cuales son: presa y depredador; entre otros.

Dentro de este contexto, un tema de gran importancia dentro del área de matemática es el tópico de derivadas, el cual tiene aplicaciones relevantes en el contexto real, como por ejemplo, si se quiere saber la velocidad de un auto en una autopista en un momento exacto; asimismo, para estudiar el momento de evolución de ciertas epidemias; y como una forma de optimización dentro de varias empresas. Concretamente, dentro del ámbito educativo, abordar el tema de derivadas, con hincapié en las definiciones, resultados fundamentales, propiedades y aplicaciones, posibilita a los estudiantes desarrollar destrezas en el cálculo diferencial y una capacidad de análisis para resolver situaciones problemáticas que involucren el uso de las herramientas de derivadas.

No obstante, la tradicional dinámica entre docentes y estudiantes para la enseñanza y aprendizaje de derivadas, ha ocasionado que los alumnos aprendan a resolver los ejercicios de manera mecánica, el cual puede apresurar la enseñanza del tema, pero dejando vacíos en los estudiantes, el cual puede ocasionar falta de visión matemática para la solución de ejercicios y/o problemas contextualizados, la cual representa una dificultad en el proceso de fomentar la matemática. En este sentido, existe la necesidad de suprimir, o por lo menos, minimizar estas dificultades durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema de derivadas, con miras a lograr un aprendizaje significativo en los aprendices.

Adicionalmente, la definición de derivada a partir del concepto de límite agudiza estas dificultades, es así que, son pocos los alumnos que adquieren un dominio para derivar y aplicar los conceptos en la solución de problemas (Gutiérrez *et al.*, 2017). En esta dirección, Gómez (2017) menciona que en el estudio del cálculo, la primera dificultad que se tiene es la de límite, el cual, el problema crece al ser aplicado en la definición de derivada, donde se relaciona aspectos geométricos y físicos. Por otro lado, Sánchez *et al.* (2008) afirma que el problema radica en que los alumnos no han construido un significado adecuado del concepto de derivada, el cual puede dificultarles en su desempeño en los cursos de cálculo. Mientras que, por otra parte, Flores y Salinas (2013) señalan que en el aprendizaje del cálculo, en particular en la conceptualización de derivadas, uno de los desafíos es que los alumnos son capaces de derivar una función, pero no logran reconocer algunas aplicaciones según el contexto, el cual conlleva a que estos no logren darle sentido ni significado a los conceptos básicos del cálculo diferencial.

Concretamente, todos los autores mencionados, concuerdan en que existe un problema latente dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje del tema de derivadas en la comunidad estudiantil, principalmente en torno a la comprensión del concepto, el cuál a largo plazo repercutirá en las aplicaciones. Es así, que se indagó en diferentes metodologías, para la enseñanza y un aprendizaje significativo de las derivadas. En este sentido, la metodología de la resolución de problemas fue la técnica de enseñanza que más destacó en una revisión bibliográfica, ya que, esta nos permitió realizar una contextualización de las matemáticas formales, las herramientas tecnológicas y problemas de la vida cotidiana, que derivo en la construcción de unas nuevas fases para la resolución de problemas.

Por lo tanto, este trabajo presentó una propuesta alternativa para el estudio de las derivadas a través de la resolución de problemas, que tiene como objetivo presentar el contenido teórico, apoyado en *softwares* matemáticos, que refuerza el aprendizaje de los estudiantes, en una forma de estudio visual, atractiva e interesante para el estudiante, lo que contribuirá a un mejor desempeño en el desarrollo del cálculo diferencial.

Es así, que todos estos elementos se plasmaron en un documento referencial cuya relevancia y justificación radica en su enfoque centrado en la resolución de problemas. Ya que de esta manera, se puede apreciar la utilidad de las derivadas en el mundo real mediante problemas contextualizados. Además, al enfrentarnos a problemas desafiantes, se nos presenta la oportunidad de desarrollar habilidades críticas de pensamiento, razonamiento lógico y creatividad matemática, específicamente en el tema de derivadas, puesto que este sirve como una base fundamental para el estudio del cálculo diferencial. Es así, que el documento referencial no solo busca transmitir el conocimiento teórico, sino también cultivar habilidades analíticas, las cuales serán valiosas en el desarrollo académico y profesional de los estudiantes.

En este sentido, el aporte a la carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) fue el documento referencial que sirve como material complementario para los estudiantes que se estén iniciando en el estudio de las derivadas, lo cual resultó visualmente atractivo a partir de lo tecnológico y aplicativo para los aprendices, fomentando su interés en el tema de derivadas y creando la oportunidad de un aprendizaje significativo.

En esta perspectiva, el Trabajo de Integración Curricular (TIC) fue organizado en base a cinco capítulos con el propósito de lograr una estructuración más efectiva de la presente investigación. Es así, que el primer capítulo abarcó el problema de investigación dividida en diferentes secciones, las cuales fueron: planteamiento del problema, objetivos y justificación; en el segundo capítulo constó con el marco teórico de esta investigación, las cuales gracias a la bibliografía encontrada se mencionan temas como lo son: las derivadas, aspectos elementales de la resolución de problemas y las herramientas tecnológicas; el tercer capítulo se trató sobre la metodología utilizada para este trabajo, es decir, se mencionó el enfoque, el alcance y el diseño que se empleó en el TIC, así como, las técnicas e instrumentos utilizados para esta investigación; el cuarto capítulo correspondiente al marco de análisis e interpretación de resultados, se procedió a detallar los hallazgos obtenidos a partir de este estudio, la cual fue la propuesta metodológica para el estudio de las derivadas a través de la resolución de problemas, así como, de igual forma se mencionó la estructuración del documento referencial, y tademás se procedió a redactar una discusión acerca de la investigación; y en el último capítulo se mencionaron varias conclusiones y recomendaciones que se obtuvieron a partir de la investigación.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

Dentro del contexto anterior, se visualiza que existe la necesidad de que los aprendices adquieran conocimientos sólidos sobre el tema de derivadas, con miras a que conduzcan a un aprendizaje significativo. Es decir, el foco del presente trabajo de investigación abordó la dificultad latente del proceso de enseñanza y aprendizaje del tópico de derivadas. Particularizando, la comunidad estudiantil de la carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), en especial los alumnos de los primeros semestres, no están exentos de la problemática entorno al proceso de enseñanza y aprendizaje del tema de derivadas.

Es así que, el propósito de este estudio consistió en diseñar un documento referencial que contemple una propuesta de enseñanza y aprendizaje del tema de derivadas a través de la resolución de problemas, el cual contribuya a alcanzar resultados satisfactorios durante y después del proceso; apoyados en el uso de herramientas de *software* matemático y la realización de problemas contextualizados, con la finalidad de optimizar la comprensión en los aprendices.

1.2. Objetivos

Objetivo general

Realizar un estudio de derivadas mediante una revisión documental, para diseñar un documento referencial que contemple una propuesta metodológica para la enseñanza de las derivadas a través de la resolución de problemas.

Objetivos específicos

- Revisar la literatura utilizando técnicas eficientes de búsqueda enfocada en la resolución de problemas para enmarcarla dentro del tema de derivadas.
- Organizar el tema de derivadas enfocado en la resolución de problemas, utilizando la bibliografía seleccionada para la estructuración de un documento referencial.
- Indagar en los *software* libres de matemáticas mediante una búsqueda y análisis de *softwares* para identificar aquellos que puedan ser utilizados para la verificación de los resultados de problemas contextualizados.

- Diseñar estrategias alternativas, a través de la bibliografía seleccionada, a fin de plantear una propuesta metodológica para el estudio de derivadas mediante la resolución de problemas.

- Presentar y resolver ejercicios y/o problemas contextualizados referentes al tema de derivadas, mediante una selección subjetiva para ejemplificar la propuesta metodológica.

- Cristalizar un documento referencial que contemple la resolución de problemas como propuesta metodológica mediante el *software* Latex para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de derivadas.

1.3. Justificación

Las derivadas es un tema de gran importancia dentro de las matemáticas, tanto en lo teórico como en lo aplicativo, ya que este apartado sirve como uno de los pilares fundamentales para la comprensión del cálculo diferencial. Es así que los aprendices deben tener conocimientos sólidos del tema de derivadas debido a que este tópico es una base para el estudio de temas de mayor nivel matemático.

En este sentido, debido a que enseñar y aprender el tema de derivada apoyado solo en fórmulas descontextualizadas, apresura el proceso, pero se corre el riesgo de que no se alcance un aprendizaje significativo. Es así que, este trabajo presentó una propuesta alternativa para el estudio de las derivadas mediante la resolución de problemas, el cual tiene como objetivo estudiar los contenidos teóricos apoyados en *software* matemáticos que refuercen el aprendizaje en los estudiantes, de una manera visual, atractiva y llamativa para los aprendices, lo cual contribuirá a un mejor desempeño en el desarrollo del cálculo diferencial. Esta idea se pudo concretar debido a que el tema de derivadas tiene una diversidad de aplicaciones en la vida cotidiana. Por tanto, el trabajo se complementó con algunas aplicaciones contextualizadas.

Finalmente, el aporte a la carrera de Matemática de la ESPOCH fue un documento referencial, el cual sirva como material complementario para los estudiantes de este programa, el cual sea visualmente atractivo a partir de lo tecnológico y aplicativo para los aprendices, incentivando así su interés hacia el tópico de derivadas, lo que abrirá la posibilidad de alcanzar un aprendizaje significativo.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

Los griegos en los siglos XVI-XVII fueron los que dieron vida al tema de derivadas, al resolver cuatro problemas fundamentales que se habrían planteado, los cuales fueron: el de la velocidad, el de la recta tangente, el de área bajo la curva y el de máximos y mínimos. Varios investigadores han hecho estudios donde se evidencia que en el desarrollo del cálculo, primero emergió el proceso de integración, luego la derivación, posterior el de límite y por último la de función como objeto matemático, sin embargo, en el proceso de didáctica de la matemática, primero se enseña la función como objeto matemático, luego el límite, la derivada y por último la integración (Ramírez, 2009).

2.1. Derivadas

Luego de una revisión bibliográfica seleccionada enfocada en conocimientos teóricos del tema de derivadas, se eligieron los siguientes autores para un estudio de este tópico: Purcell *et al.* (2007), Ruiz y Barrantes (1996) y Thomas (2006); todos estos autores colaboraron para la estructuración de un cuerpo de contenido, el cual consta con los siguientes temas: límites, derivadas, notaciones de las derivadas, reglas para la derivación y derivadas de orden superior. Cada uno de los temas mencionados han sido descritos detalladamente en el documento referencial, con el objetivo de ofrecer al lector una comprensión clara y precisa del tema de derivadas con miras a un aprendizaje significativo. Para mayores detalles, se sugiere revisar el anexo adjuntado.

2.2. Aspectos elementales de la resolución de problemas

De esta misma manera, como en la sección anterior, se realizó una selección bibliográfica enfocada en la metodológia de resolución de problemas, en las cuales se encontró información de diferentes autores, las cuales fueron de gran importancia para está investigación. Es así, que en la literatura existen varias fases para la metodológia de resolución de problemas, las cuales varían dependiendo de sus autores, entre los más destacados para este estudio fueron los siguientes: Krulik y Rudnick (1988), Pólya y Zugazagoita (1979), Schoenfeld (1985) y Gonzáles (2000).

En este sentido, en el documento referencial se describió cada una de las fases de la resolución de problemas de los distintos autores, como también se detalló varias definiciones que nos ayudaron a la comprensión de esta metodología, tales como: problema, problema matemático y contextualización. Es así, que se recomienda revisar el anexo para una mayor comprensión del tema.

2.3. Herramientas tecnológicas

Y por último, pero no menos importante, al igual que las dos secciones anteriores, se procedió a una revisión bibliográfica enfocada en las herramientas tecnológicas, las cuales derivaron en la descripción de varias definiciones, tales como: *software* educativo, *software* matemáticos; así como también, se indagó en *software* libres, los cuales nos sirvieron de apoyo para nuestra propuesta metodológica, detallando sus ventajas, desventajas y su utilidad para esta investigación. Es así, que es recomendable ver los anexos para una mayor información acerca del tema.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

Primero, el presente trabajo fue abordado bajo un enfoque cualitativo no interactivo, con alcance descriptivo y un diseño de investigación documental, puesto que el objetivo fue recoger información de fuentes bibliográficas relacionadas con la resolución de problemas enmarcada dentro del tema de derivadas para una descripción detallada.

En este contexto, la investigación cualitativa según Barbour (2013) es aquella investigación que recaba información no cuantificable, con el própósito de una descripción de las cualidades de un tema de interés, donde se centra en acceder a las experiencias, interacciones y documentos afines del tema de estudio. Es así que, bajo esta perspectiva, se buscó indagar en los aspectos esenciales de la resolución de problemas, el tema de derivadas y de herramientas tecnológicas a partir de una recolección y análisis de información a través de libros, artículos científicos relacionados con el tema principal del presente TIC.

En este sentido, Hernández (2014) indica que “con los estudios descriptivos se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis” (p.80). Por tanto, la importancia del alcance descriptivo para el presente estudio radicó en especificar y detallar definiciones, propiedades y características relacionadas con el tema de derivadas, herramientas tecnológicas y propuestas metodológicas para la resolución de problemas, que al articularlos derivo en un documento referencial para el estudio de derivadas, donde se diseñó una propuesta innovadora con miras a optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje del tópico de derivada.

Además, según Escudero y Cortez (2018) la investigación documental es aquella estrategia que tiene como objetivo revisar y reflexionar sistemáticamente las realidades teóricas de diferentes fuentes y campos de la ciencia, examinando e interpretando sus datos, usando métodos e instrumentos que ayudan a lograr resultados que apoyen el desarrollo de la creación científica. Así, la investigación documental guió el proceso de recopilación, análisis y selección acerca del tópico de derivadas, herramientas tecnológicas utilizadas y algunas fases para la resolución de problemas, con la finalidad de una utilización contextualizadas de estas.

Estos tres aspectos metodológicos permitieron cristalizar un documento referencial sobre la resolución de problemas enmarcada dentro del tema de derivadas, con énfasis en el aspecto formal de la matemática, herramientas tecnológicas y contextualización; todas con miras a contribuir en un aprendizaje significativo del tema de derivadas para los estudiantes que se inician en su estudio.

Segundo, dentro de los métodos y técnicas empleadas para alcanzar el propósito de la investigación planteada se pueden mencionar las siguientes:

1) Proceso de revisión documental que implicó investigar, identificar, recopilar y seleccionar trabajos disponibles en la Internet en repositorios académicos, relevantes para un contenido oportuno y apropiado sobre la resolución de problemas dentro del tema de derivadas y de *software* matemáticos el cual nos ayude en la verificación de problemas contextualizados.

2) Proceso de selección y análisis de contenidos matemáticos sobre derivadas y *software* matemáticos, el cual permitió ilustrar los aspectos teóricos y aplicativos del tema, tales como, definiciones, propiedades y resultados; además de ejercicios y/o problemas aplicados a la vida cotidiana.

3) Un estudio subjetivo sobre las fases para la resolución de problemas, el cual tuvo la finalidad de desarrollar nuevas fases para esta propuesta metodológica.

4) Desarrollo de un documento referencial como una guía alternativa que contemplo una propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de las derivadas mediante la resolución de problemas, el cual incorpora la articulación de las matemáticas formales, herramientas tecnológicas y aplicaciones de la vida cotidiana.

Por último, pero no menos importante, con respecto a los instrumentos que se utilizarón se pueden destacar los siguientes:

- Internet (buscadores tales como Google académico): fue de gran importancia para esta investigación, ya que, Google académico es uno de los principales motores de búsqueda bibliográfico para las investigaciones académicas.

- Laptop: fue el dispositivo mediante el cual es capaz de ejecutar una variedad de tareas, análogas a las desempeñadas por las computadoras de escritorio, es así que por medio de este artilugio se pudo redactar esta investigación.

- *Software* (Latex, GeoGebra, Wolfram Alpha): Latex es un *software* que permite escribir de una manera más organizados documentos matemáticos, el cual ayudo para la redacción del documento referencial y del TIC. Además, de que los *software* GeoGebra y Wolfram Alpha son de gran importancia para nuestra propuesta metodológica, ya que estos sirven como método de verificación de los ejercicios y/o problemas contextualizados.

Todos los aspectos y procesos mencionados anteriormente permitieron cristalizar un documento referencial sobre una propuesta metodológica para la enseñanza de las derivadas a través de la resolución de problemas. Este documento se materializó a partir de la presente investigación, el cual es el principal aporte para los estudiantes de la carrera de matemática de la ESPOCH que desean estudiar el tópico de derivadas.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este apartado, se detallará los resultados obtenidos en este TIC junto al documento referencial, los cuales se obtuvieron mediante una revisión profunda y subjetiva del tema de derivadas dentro de un marco de resolución de problemas.

4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados

A partir de las fases para la resolución de problemas encontradas en la literatura, realizadas por diferentes autores, tales como: Krulik y Rudnick (1988), Pólya y Zugazagoita (1979), Schoenfeld (1985) y Gonzáles (2000), se desarrolló una nueva propuesta metodológica, el cual consta de cuatro nuevas fases, a saber: lectura y comprensión del problema, búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas, construcción de la solución, y por último, verificación de los resultados apoyados en herramientas tecnológicas, las cuales detallaremos a continuación:

- **Fase 1: Lectura y comprensión del problema**

  La primera fase consiste en comprender y entender la información que nos proporciona el enunciado del problema, identificando así cuál es la pregunta del problema, si este tiene distractores (información que desvían la atención del problema) y cuáles son los datos relevantes que nos proporcionan.

  Mediante esta fase, para el estudio de las derivadas, el estudiante deberá reconocer la función sobre la cual se trabajará, así como tendrá que descartar datos que no proporciones información para la resolución del problema, y por último, deberá analizar que es lo que quiere determinar el problema.

- **Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas**

  En esta segunda fase el estudiante deberá relacionar la información del enunciado con las definiciones, propiedades, teoremas, entre otros resultados fundamentales del tema en estudio, con la finalidad de entender mejor el tópico, cuyo objetivo será buscar y detallar un plan óptimo para la resolución del problema.

  Con respecto a esta fase, para la resolución de problemas de derivadas, el alumno podrá encontrar la información necesaria de este tema en el Capítulo 1 del documento referencial titulado "Derivadas", para un estudio y una retroalimentación del tópico, con el propósito de tener una compresión significativa del tema, y así detallar un plan adecuado para la resolución del problema.

- **Fase 3: Construcción de la solución**

  La tercera fase implica que el estudiante llevará a cabo de manera minuciosa y detallada de cada uno de los pasos del plan que se obtuvo en la fase previa, el cual para lograrlo se deberá realizar meticulosamente las técnicas y estrategias aprendidas previamente, así como un análisis profundo de cada paso y sus implicaciones en el contexto del problema planteado.

  En esta tercera fase, el estudiante deberá ir ejecutando cada uno de los pasos del plan que se detalló en la fase anterior, así como, también deberá ir redactando cada uno de los procesos que se va realizando, de la misma manera que deberá escribir las reglas de derivación que utilizó a lo largo de la resolución del problema.

- **Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas**

  En esta última fase el estudiante se apoyará mediante la utilización de un *software* matemático para la verificación de la solución encontrada y redactará de manera breve las conclusiones que se obtuvieron del problema.

  Por lo tanto, para nuestra propuesta metodológica, el estudiante deberá comprobar el resultado obtenido del problema mediante cualquiera de los dos *softwares* mencionados en el Capítulo 3 de Herramientas tecnológicas del documento referencial, para determinar su debida corrección en el caso de que esta sea necesaria y redactando una conclusión al problema resuelto.

Es así, que mediante esta propuesta metodológica se cristalizó un documento referencial para el estudio de las derivadas, el cual consta con la matemática formal y con varios problemas desarrollados mediante las cuatro nuevas fases, en este sentido, esta guía de estudio está constituido mediante la siguiente estructura:

Capítulo I: Derivadas

1.1 Idea intuitiva de derivada

1.2 Derivada

  1.2.1 Notaciones para la derivada

1.3 Reglas para la derivada

1.4 Derivadas de orden superior

1.5 Criterios para derivadas

  1.5.1 Criterio de la primera derivada

  1.5.2 Criterio de la segunda derivada

Capítulo II: Aspectos elementales de la resolución de problema

2.1 Problema

2.1.1 Problema matemático

2.2 Resolución de problemas

2.2.1 Algunas fases de la resolución de problemas encontradas en la literatura

2.3 Contextualización

Capítulo III: Herramientas tecnológicas

3.1 *Software* educativo

3.2 *Software* matemático

3.3 Algunos *software* matemáticos libres

3.3.1 Wolfram Alpha

3.3.2 GeoGebra

Capítulo IV: Algunas aplicaciones para la resolución de problemas

4.1 Propuesta de resolución de problemas para el estudio de derivadas

4.2 Resolución de problemas relacionado con las derivadas

4.2. Discusión

Culminada la sección correspondiente al procesamiento, análisis e interpretación de resultados, se observó que mediante la cristalización del documento referencial los aprendices pueden tener una perspectiva sumamente enriquecedora en lo que respecta al ámbito de las derivadas, el cual permita que este documento sirva como material complementario para aquellos aprendices que se estén iniciando en el tópico de derivadas, así como para aquellos que busquen consolidar y reforzar sus conocimientos previos en este tema. La composición de este documento se caracterizó por su enfoque en la claridad expositiva, buscando simplificar al máximo los conceptos a la vez que se va detallando con minuciosidad, ya que se trató de describir de la manera más simple y detallada posible, con miras, a favorecer un aprendizaje significativo por parte de los aprendices. Cabe destacar, además, que el contenido del documento abarca la presentación de problemas contextualizados en el ámbito de las derivadas, el cual permite que el estudiante, observe la parte práctica de las matemáticas.

Desde esta perspectiva, se puede percibir que el documento referencial está estructurado de tal manera que el primer capítulo abarcó una exposición de la matemática formal; por su parte, el segundo capítulo detalla la resolución de problemas y la contextulización, aportando así una dimensión práctica y aplicada al proceso de aprendizaje; y el tercer capítulo centró su atención sobre el estudio de las herramientas tecnológicas; y por último, es en el cuarto capítulo que culmina la estructura del documento referencial, es así, que este apartado fue el corazón del TIC, ya que llevo a cabo una cristalización de los contenidos presentados en los tres capítulos precedentes, para la ejemplificación de la propuesta metodológica.

En conclusión, la culminación de la sección de procesamiento, análisis e interpretación de resultados ilumina con claridad la materialización del documento referencial. Este documento, al ofrecer una perspectiva completa sobre las derivadas, emerge como un recurso complementario muy importante para aquellos estudiantes, docentes y demás personas que quieran aventurarse en el dominio del tema de derivadas, o bien, para los que buscan fortalecer su conocimiento en esta área de las matemáticas. Es así, que la estructura cuidadosa, el estilo expositivo y la integración de problemas contextualizados concebida en este documento revela un enfoque que promueve a una comprensión profunda y la aplicación práctica de las matemáticas en el tema de las derivadas.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Con la culminación de esta investigación se llegó a obtener las siguientes conclusiones: primero, con la indagación de la literatura, se pudo concretar un documento referencial, el cual tiene la cárcteristica de optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las derivadas a través de la resolución de problemas, contemplando así la parte práctica de las matemáticas. Segundo, la información que se presentó en el trabajo son confiables y organizados de una manera óptima para un aprendizaje significativo del tema de derivadas, debido a que se realizó una revisión bibliográfica profunda y subjetiva del tema. Tercero, el uso de *software* matemáticos en la enseñanza de las derivadas son de gran utilidad para la verificación de resultados de problemas contextualizados. Cuarto, mediante la bibliografía seleccionada se logró plantear una propuesta metodológica para el estudio y enseñanza del tema de derivadas mediante la resolución de problemas cristalizadas en cuatro fases. Quinto, los problemas resueltos en el documento referencial sirve como un método de aprendizaje para los estudiantes, desde la aplicación práctica de las matemáticas. Finalmente, se obtuvo un documento referencial que se convierte en un material complementario para los estudiantes que estén realizando sus estudios en el tema de derivadas.

5.2. Recomendaciones

De la misma manera, al finalizar esta investigación se sugiere las siguientes recomendaciones: primero, se recomienda una lectura detallada y en orden los capítulos 1, 2 y 3, debido a que en estos capítulos sirven para la comprensión del capítulo 4. Segundo, la propuesta metodológica para el estudio de las derivadas que se presenta en el documento referencial, podría ser tomado como una tema para futuras investigaciones, como por ejemplo, aplicándola a un grupo de estudiantes, mediante dos test; el primer test se lo evaluará antes de aplicar la propuesta metodológica, y el segundo test se lo evaluará después de haber empleado el enfoque metodológico propuesto, con el propósito de comprobar la eficacia y utilidad de la presente propuesta metodológica en el contexto del estudio de las derivadas, llevando a cabo un proceso de verificación. Por último, se plantea la posibilidad de aplicar las cuatro fases que se han cristalizado en la resolución de problemas en el ámbito del estudio de derivadas a diversas áreas relacionadas dentro de las matemáticas.

Bibliografía

BARBOUR, R. *Los grupos de discusión en investigación cualitativa.* España: Ediciones Morata, 2013.

ESCUDERO, C.; CORTEZ, L. *Técnicas y métodos cualitativos para la investigación científica* [en línea]. Machala-Ecuador: Universidad Técnica de Machala, 2018. [Consulta 8 julio 2023] Disponible en: `http://repositorio.utmachala.edu.ec/handle/48000/12501`

FLORES, W.; SALINAS, M. "Metodologías en la enseñanza de la derivada: URACCAN-Nueva Guinea". Ciencia E Interculturalidad[en línea], 2013, 12(1), pp. 30-49. [Consulta: 9 julio 2023]. Disponible en: `https://doi.org/10.5377/rci.v12i1.1215`

GÓMEZ, A. "Una propuesta para la enseñanza de la derivada basada en el aprendizaje autónomo". RIMCI [en línea], 2017, 4(8), pp. 19-27. [Consulta: 8 julio 2023]. Disponible en: `http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2017.v4.n8.a28`

GÓNZALEZ, T. "Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: un estudio evaluativo". Revista de Investigación Educativa [en línea], 2000, 18(1), pp. 175–199. [Consulta: 9 julio 2023]. Disponible en: `https://revistas.um.es/rie/article/view/121541`

GUITIÉRREZ, M.; BUITRAGO, A.; ARIZA, N. "Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica". *Revista Científica General José María Córdova,* vol. 15, *nº* 20 (2017), (Colombia) pp. 137-153.

HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C.; BAPTISTA, M. *Metodología de la investigación.* 5ª ed. México: McGraw-Hill, 2010.

KRULIK, S.; RUDNICK, J. *Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers.* ERIC, 1988.

POLYA, G.; ZUGAZAGOITIA, J. *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas México, 1979.

PURCELL, E.; VARBERG, D.; RIGDON, S. *Cálculo diferencial e integral*. México: PEARSON EDUCACIÓN, 2007. ISBN: 978-970-26-0989-6

RAMÍREZ RINCÓN, E. "Historia y epistemología de la función derivada". Tecné, Episteme y Didaxis: TED [en línea], 2009, pp. 157-162. [Consulta: 26 julio 2023]. Disponible en: `https://doi.org/10.17227/01203916.261`

RUIZ, Á.; BARRANTES, H. *Elementos de Cálculo diferencial*. Universidad de Costa Rica, 1996.

SÁNCHEZ, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. "La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática". Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa [en línea], 2008, 11(2), pp.267-296. [Consulta: 8 julio 2023]. ISSN 2007-6819. Disponible en: `http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005&lng=es&nrm=iso`

SCHOENFELD, A. *Mathematical problem solving.* London-Inglaterra: Academic Press. Inc.,1985.

THOMAS, G. *Cálculo. Una variable* 11ª ed. México: PEARSON EDUCACIÓN, 2006. ISBN: 970-26-0643-8

ANEXO

Fernando Panta

Ramón Abancin

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS DERIVADAS A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2023

ESPOCH

Documento referencial

Índice general

Introducción

La motivación detrás de esta investigación surge de la fascinante belleza y poder que encierra el mundo de las derivadas. Desde tiempos inmemoriales, las matemáticas han sido una herramienta fundamental para comprender la naturaleza y el universo que nos rodea. En este contexto, el estudio de las derivadas es un pilar esencial de las matemáticas, el cual se utiliza como un poderoso instrumento para analizar y describir el cambio y la variación de fenómenos tanto naturales como artificiales.

El propósito de este libro es guiar al lector en un apasionante viaje a través del mundo que nos ofrece las derivadas mediante la resolución de problemas. En el cual, no solo se trata de un simple manual de fórmulas y teorías, sino, de una herramienta fiel que nos acompaña en el proceso de aprender el tema de las derivadas, desde sus fundamentos hasta su aplicación en situaciones prácticas y desafiantes. A lo largo de este libro, se presentarán problemas cuidadosamente seleccionados, que van desde los más elementales hasta los más complejos, y que abarcan diversas áreas del conocimiento como: la física, la economía, entre otros. Con ejemplos ilustrativos y explicaciones claras y sencillas, es así, que este libro tiene como objetivo brindar a estudiantes, profesores y entusiastas de las matemáticas una comprensión profunda y sólida de las derivadas.

La importancia y justificación de este libro radica en su enfoque centrado en la resolución de problemas. Algunos textos tradicionales sobre derivadas a menudo se enfocan en presentar definiciones y teoremas abstractos, dejando de lado la aplicación práctica. Sin embargo, es a través de la resolución de problemas que verdaderamente apreciamos la utilidad de las derivadas en el mundo real mediante los problemas contextualizados. Además, al enfrentarnos a problemas desafiantes, se nos presenta la oportunidad de desarrollar habilidades críticas de pensamiento, razonamiento lógico y creatividad matemática. Es así, que este libro no solo busca transmitir el conocimiento teórico, sino también cultivar habilidades analíticas, las cuales serán valiosas en el desarrollo académico y profesional de los lectores.

En este sentido, este libro se estructuró mediante cuatro capítulos para la ejemplificación de la propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de las derivadas a través de la resolución de problemas. Es así, que el primer capítulo constó con la parte teórica de las derivadas, donde se redactó de forma detallada las definiciones, teoremas, proposiciones, observaciones sobre este tópico; en el segundo capítulo se detalló definiciones y clasificaciones de diferentes temas, como lo fueron: problemas y problemas matemáticos, también se presentó algunas fases de resolución de problemas de diferentes autores encontrados en la literatura; el tercer capítulo abarcó sobre las herramientas tecnológicas, así como: definiciones de *software* educativos, *software* matemáticos y también se presentó algunos *software* matemáticos libres que sirvieron de apoyo para la verificación de problemas contextualizados, redactando sus características, ventajas, desventajas y su utilidad para nuestra propuesta metodológicas, y en el último capítulo el cual fue el corazón de esta investigación consto de dos secciones; la primera sección se detalló las fases de la resolución de problemas para el estudio de las derivadas que se desarrolló a partir de las diferentes fases encontradas en la literatura, y en la segunda sección se ejemplificó la propuesta metodológica mediante problemas contextualizados.

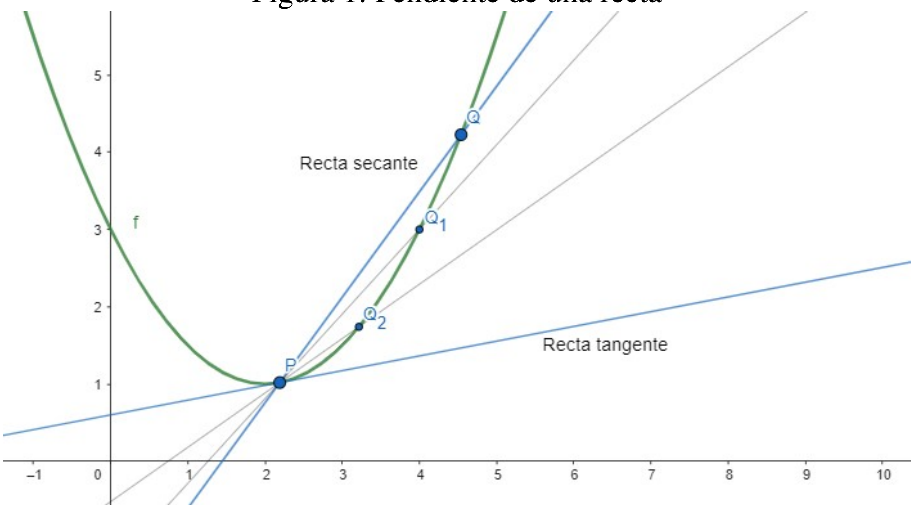
Capítulo 1

DERIVADAS

1.1. Idea intuitiva de derivada

La idea intuitiva de derivada viene dado de dos problemas, los cuales son: la velocidad instantánea y la de pendiente de la recta, la cual se la conoce como derivada en un punto.

Figura 1: Pendiente de una recta



Fuente: Elaboración propia

Considerando la siguiente figura. Sea P un punto con coordenadas $(x, f(x))$ ubicado en una curva $y = f(x)$ en $\mathbb{R}^2$, y sea Q un punto móvil cercano a P en esa curva con coordenadas $(x + h, f(x + h))$, por lo tanto, se tiene que la pendiente de la recta secante PQ viene dado por

$$m_{sec} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

La derivada es la pendiente de la recta tangente en la curva en el punto P, es decir, la posición límite (si esta existe) de la recta secante cuando Q se acerca a P

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} m_{sec} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

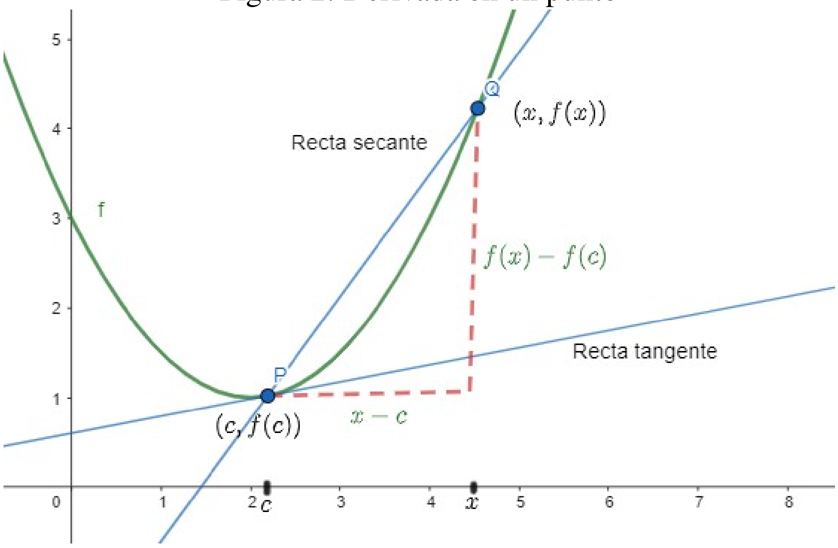
Definición 1.1.1: Derivada en un punto

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y c un elemento en el dominio de f, se llama derivada de f **en** x

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

El cual se lee " f prima "

Figura 2: Derivada en un punto



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 1.1.1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x) = 4x + 6$, determinar $f'(2)$.

Solución:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{4x+6-(4(2)+6)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{4x+6-14}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{4x-8}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(4) = 4$$

Esto es $f'(2) = 4$.

Ejemplo 1.1.2

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ talque $g(x)=5x^3-7x^2+8$, determinar $g'(4)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
g'(4) &= \lim_{x\to 4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{5x^3-7x^2+8-216}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{5x^3-7x^2-208}{x-4}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{5x^3-20x^2+13x^2-208}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{5x^2(x-4)+13(x^2-16)}{x-4}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{5x^2\cancel{(x-4)}+13\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x\to 4}\left[5x^2+13(x+4)\right]\\
&= 5(4)^2+13(4+4) = 80+104 = 184
\end{aligned}$$

Esto es $g'(4)=184$.

Ejemplo 1.1.3

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ talque $f(x)=x^{-3}(\sqrt{2x})$, determinar $f'(2)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^{-3}(\sqrt{2x})-\frac{1}{4}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{4x^{-3}(\sqrt{2x})-1}{4}}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{4x^{-3}(\sqrt{2x})-1}{4(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{4x^{-3}\sqrt{x}\sqrt{2}-1}{4(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{4x^{-\frac{5}{2}}\sqrt{2}-1}{4(x-2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{4\sqrt{2}}{x^{\frac{5}{2}}}-1}{4(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{4\sqrt{2}-x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}}{4(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2^2{,}2^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{5}{2}}}{4(x-2).x^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x\to 2}-\frac{x^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{2}}}{4x^{\frac{5}{2}}(x-2)}\\
&= \lim_{x\to 2}-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}+2x+2\sqrt{2}\sqrt{x}+4)}{4x^{\frac{5}{2}}(x-2)}\\
&= \left[\lim_{x\to 2}\frac{-x^2-\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}-2x-2\sqrt{2}\sqrt{x}-4}{4x^{\frac{5}{2}}}\right]\left[\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{-2^2-\sqrt{2}\sqrt{2^3}-2(2)-2\sqrt{2}\sqrt{2}-4}{4\sqrt{2^5}}\right]\left[\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)\right]\\
&= \left[\frac{-4-\sqrt{2^4}-4-4-4}{4\cdot 4\sqrt{2}}\right]\left[\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x}+\sqrt{2})}\right]\\
&= \left[\frac{-20}{16\sqrt{2}}\right]\left[\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right] = \frac{-5}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{-5}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\\
&= -\frac{5}{16}
\end{aligned}$$

Esto es $f'(2) = -\dfrac{5}{16}$.

1.2. Derivada

Ahora si en lugar de x escribimos $c+h$, se tiene que $x = c+h$, entonces cuando $x \to c$, se tiene que $h \to 0$

Definición 1.2.1: Derivada

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, la cual es derivable para todo x, se llama función derivada a $f'(x)$ a la nueva función cuyo valor en cualquier número x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si este límite existe, decimos que f es derivable en x.

Ejemplo 1.2.1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$. Calcular $f'(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 5(x+h) - 7 - 3x^2 - 5x + 7}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 5x + 5h - 3x^2 - 5x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 + 5h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(6x + 3h + 5)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (6x + 3h + 5) = 6x + 0 + 5 = 6x + 5
\end{aligned}$$

Por tanto $f'(x) = 6x + 5$.

Ejemplo 1.2.2

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $g(x) = \sqrt{3x+8} + 5$. Calcular $g'(x)$.

Solución:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+8} + 5 - \sqrt{3x+8} - 5}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3x+3h+8}-\sqrt{3x+8}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\sqrt{3x+3h+8}-\sqrt{3x+8}}{h}\cdot\frac{\sqrt{3x+3h+8}+\sqrt{3x+8}}{\sqrt{3x+3h+8}+\sqrt{3x+8}}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3x}+3h+\cancel{8}-(\cancel{3x}+\cancel{8})}{h\left(\sqrt{3x+3h+8}+\sqrt{3x+8}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{3x+3h+8}+\sqrt{3x+8}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3}{\sqrt{3x+3h+8}+\sqrt{3x+8}} = \frac{3}{\sqrt{3x+3(0)+8}+\sqrt{3x+8}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3x+8}}
\end{aligned}
$$

Por tanto $g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+8}}$.

Ejemplo 1.2.3

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ talque $f(x)=(7x-3)^3$. Calcular $f'(x)$

Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(7(x+h)-3)^3-(7x-3)^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{343(x+h)^3-441(x+h)^2+189(x+h)-27-(343x^3-441x^2+189x-27)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{343x^3}+1029x^2h+1029xh^2+343h^3-\cancel{441x^2}-882xh-441h^2+189h-\cancel{343x^3}+\cancel{441x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1029x^2\cancel{h}+1029xh^{\cancel{2}}+343h^{\cancel{3}}-882x\cancel{h}-441h^{\cancel{2}}+189\cancel{h}}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(1029x^2+1029xh+343h^2-882x-441h+189\right) \\
&= 1029x^2-882x+189
\end{aligned}
$$

Por tanto $f'(x) = 1029x^2-882x+189$.

Observación 1.2.1

No siempre existe la derivada de una función en un punto.

Se va a mostrar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ talque $f(x)=|x|$, no es derivable en $x=0$.

$$
f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}
$$

Por lo cual tenemos dos posibilidades, si $h \to 0^+$ y si $h \to 0^-$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \qquad\qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Lo que significa que $f'(0)$=$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe; puesto que $\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h}$
Por lo tanto, $f(x) = |x|$ no es derivable en el punto $x = 0$.

■

Observación 1.2.2: Tangente vertical

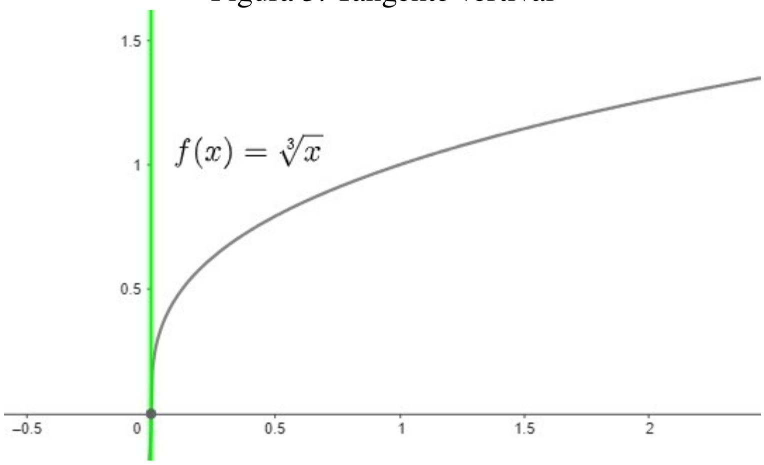
Existen derivadas infinitas, o tambien denominadas tangente vertical

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x) = \sqrt[3]{x}$, calcularemos $f'(0)$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\sqrt[3]{h}}}{\cancel{\sqrt[3]{h}}\sqrt[3]{h}\sqrt[3]{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}\sqrt[3]{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0^2}} \\ &= \frac{1}{0} = +\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de f cuando $x = 0$ es infinita, al graficar nos podemos dar cuenta que la recta tangente a la curva en el punto $(0, 0)$ es una recta vertical.

Figura 3: Tangente vertival



Fuente: Elaboración propia

■

Teorema 1.2.1: Derivabilidad implica continuidad

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f'(c)$ existe, entonces f es continua en c.

Demostración:

Para demostrar que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, escribiremos $f(x)$ de una formar especial

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c), \text{ para } \; x \neq c$$

tomando el límite de $x \to c$ en ambos lados se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c}\left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c)\right] \\
&= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\cdot \lim_{x\to c}(x - c) \\
&= f(c) + f'(c)\cdot(c - c) \\
&= f(c) + f'(c)\cdot 0 \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

■

Nota 1.2.1

El recíproco de este teorema es falso, ya que si una función f es continua en c, no significa que f tenga derivada en c (véase la demostración en la Observación 1.2.2).

1.2.1. Notaciones para la derivada

Además de la notación $f'(x)$ para la derivada de una función $f(x)$, se utilizan también las siguientes:

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad [f(x)]', \quad D_x y, \quad D_x f(x)$$

1.3. Reglas para la derivada

Se observa que al realizar las derivadas de una función mediante la definición de límite puede ser laborioso, es por ello que se han desarrollado ciertas reglas que permiten calcular derivadas de forma práctica. En este sentido, se tiene:

Proposición 1.3.1: Regla para la función constante

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f(x) = k$, donde k es una constante, entonces para cualquier x, se tiene

$$f'(x) = 0.$$

Demostración:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Por tanto, $f'(x) = 0$ para todo x.

■

Proposición 1.3.2: Regla para la función identidad

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f(x) = x$, entonces para cualquier x, se tiene

$$f'(x) = 1.$$

Demostración:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Por tanto, $f'(x) = 1$ para todo x.

■

Proposición 1.3.3: Regla para la potencia

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - \cancel{x^n}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]
\end{aligned}$$

todos los términos excepto el primero tienen de factor a h, por tanto, tomando el límite se tiene

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Por tanto, $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo x.

■

Proposición 1.3.4: Regla del múltiplo constante

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y sea k una constante, entonces

$$(kf)'(x) = k\, f'(x).$$

Demostración:

Definimos $F(x) = k\, f(x)$, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot f(x+h)-k\cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{k\,[f(x+h)-f(x)]}{h} = \lim_{h\to 0} k\cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= k\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}
\end{aligned}
$$

ya que f es una función derivable, se tiene que $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, por consiguiente

$$F'(x) = k\cdot f'(x)$$

Por tanto, $(kf)'(x) = k\,f'(x)$ para todo k constante y f derivable.

■

Proposición 1.3.5: Regla para la suma de funciones

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones derivables, entonces

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$$

Demostración:

Definimos $F(x) = f(x)+g(x)$, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x))]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}
$$

Por tanto, $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$ para todo f y g derivables.

■

Proposición 1.3.6: Regla para la diferencia de funciones

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables, entonces

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Demostración:

Definimos $F(x) = f(x) - g(x)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)] + [-f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] - [g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) - g'(x)
\end{aligned}$$

Por tanto, $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ para todo f y g derivables.

■

Proposición 1.3.7: Regla para el producto de funciones

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables, entonces

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Demostración:

Definimos $F(x) = f(x)g(x)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0} g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)
\end{aligned}
$$

Por tanto, $(f\cdot g)'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$ para todo f y g derivables.

■

Proposición 1.3.8: Regla para el cociente de funciones

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones derivables con $g(x)\neq 0$, entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Demostración:

Definimos $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h[g(x)g(x+h)]}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)f(x+h)-g(x)f(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]-f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}\\
&= \left[\lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}\\
&= \left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}\\
&= [g(x)f'(x)-f(x)g'(x)]\,\frac{1}{g(x)g(x)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Por tanto, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ para todo f y g derivables.

■

Proposición 1.3.9: Regla de la cadena

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si $y=f(u)$ y $u=g(x)$ y además si g es derivable en x y f es derivable en u, entonces la función compuesta $f\circ g$, definida por $(f\circ g)(x)=f(g(x))$, entonces

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Demostración:

Definimos $F(x)=(f\circ g)(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot g'(x)
\end{aligned}$$

si tomamos $\gamma=g(x+h)-g(x)$ vemos que si $h\to 0$ entonces $\gamma\to 0$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\gamma\to 0}\frac{f(g(x)+\gamma)-f(g(x))}{\gamma}\cdot g'(x)\\
&= f'(g(x))\,g'(x)
\end{aligned}$$

Por tanto, $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$ para todo f derivable en u y g derivable en x.

$\blacksquare$

Daremos a conocer otras reglas de la derivada, las cuales su demostración se las puede encontrar en diferentes libros clásicos sobre derivadas.

Proposición 1.3.10: Derivadas de las funciones trigonométricas

Las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = \cos(x)$ y $h(x) = \tan(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$ también son derivables, y su derivada son las siguientes:

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x) \qquad (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x) \qquad (\tan(x))' = \sec^2(x)$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, a partir de esta se pueden obtener nuevas funciones, tales como: $F(x) = \operatorname{sen}(f(x))$, $G(x) = \cos(f(x))$ y $H(x) = \tan(f(x))$, las cuales también son derivables y su función derivada están definidas como:

$$(F(x))' = [\operatorname{sen}(f(x))]' = f'(x)\cos(f(x))$$

$$(G(x))' = [\cos(f(x))]' = -f'(x)\operatorname{sen}(f(x))$$

$$(H(x))' = [\tan(f(x))]' = -f'(x)\sec^2(f(x))$$

Proposición 1.3.11: Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$ también son derivables, y sus derivadas son las siguientes:

$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Al igual que en las funciones trigonométricas, si se tiene una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se pueden obtener nuevas funciones a partir de esta, tales como: $F(x) = e^{f(x)}$ y $H(x) = \ln(f(x))$, las cuales tambien son derivables y su función derivada estan definidas como:

$$(F(x))' = [e^{f(x)}]' = f'(x)\, e^{f(x)}$$
$$(G(x))' = [\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

1.4. Derivadas de orden superior

La operación derivada, toma una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y produce una nueva función $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ahora si aplicamos la derivada a esta nueva función f', se obtiene la función $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y se denominada segunda derivada de f, si nuevamente aplicamos la derivada a f'' se obtiene la función $f''' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denominada tercera derivada de f, y asi sucesivamente se puede seguir derivando.

Proposición 1.4.1: Derivadas de orden superior

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, entonces la derivada de la primera derivada de f se llama segunda derivada de f y se denota como f''

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, entonces la derivada de la segunda derivada de f se llama tercera derivada de f y se denota como f'''

$$f'''(x) = [f''(x)]'$$

- En general, la $n-$ésima derivada de f es la derivada de la $(n-1)-$ésima derivada de f, y se la denota como $f^{(n)}$

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

1.5. Criterios para derivadas

1.5.1. Criterio de la primera derivada

Teorema 1.5.1: Teorema del valor medio

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La derivada es un tópico muy importante dentro de las matemáticas, ya que tiene diversas aplicaciones, una de ellas, nos sirve para determinar si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable dentro de un intervalo es creciente o decreciente, y para ello tenemos el siguiente corolario.

Teorema 1.5.2: Criterio de la primera derivada

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) se tiene que:

- Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Demostración:

Sea x_1 y x_2 dos puntos que pertenecen a $[a, b]$ con $x_1 < x_2$, aplicando el teorema del valor medio, se tiene que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$$

para algún $x \in (a, b)$.

- Si $f'(x) > 0$ entonces $f(x_2) - f(x_1) > 0$, por lo tanto, $f(x_2) > f(x_1)$ por lo cual f es creciente
- Si $f'(x) < 0$ entonces $f(x_2) - f(x_1) < 0$, por lo tanto, $f(x_2) < f(x_1)$ por lo cual f es decreciente

■

1.5.2. Criterio de la segunda derivada

Definición 1.5.1: Punto crítico

Un punto crítico de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es un valor c dentro del dominio de f, tal que $f'(c) = 0$

Asimismo, otra aplicación que tiene las derivadas, es que nos permite verificar si un punto crítico (si este existe) de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un máximo local o un mínimo local dentro de un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$, y para ello tenemos el siguiente corolario.

Teorema 1.5.3: Criterio de la segunda derivada

Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo (a, b), y sea c un punto crítico de f en el intervalo (a, b), entonces se tiene que:

- Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f
- Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f

Demostración:

Primero, demostraremos que si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f.

Si c es un punto crítico de f se tiene que $f'(c) = 0$, y por la definición de derivada, entonces

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h}.$$

Por hipótesis se tiene que $f''(c) < 0$, entonces $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(c+h)}{h} < 0$, y para que esto suceda se tiene dos casos posibles:

- Si $h > 0$, entonces $f'(c+h) < 0$, y por el criterio de la primera derivada f es decreciente en un intervalo a la derecha de c.
- Si $h < 0$, entonces $f'(c+h) > 0$, y por el criterio de la primera derivada f es creciente en un intervalo a la izquierda de c.

Por lo cual $f(c)$ es un máximo local de f.

Segundo, demostraremos que si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

Si c es un punto crítico de f se tiene que $f'(c) = 0$, y por la definición de derivada, entonces

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h}.$$

Por hipótesis se tiene que $f''(c) > 0$, entonces $\lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h} > 0$, y para que esto suceda se tiene dos casos posibles:

- Si $h > 0$, entonces $f'(c+h) > 0$, y por el criterio de la primera derivada f es creciente en un intervalo a la derecha de c.
- Si $h < 0$, entonces $f'(c+h) < 0$, y por el criterio de la primera derivada f es decreciente en un intervalo a la izquierda de c.

Por lo cual $f(c)$ es un mínimo local de f.

■

Capítulo 2

ASPECTOS ELEMENTALES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.1. Problema

Una de las actividades más importantes y complicadas que se plantea en matemática es la de resolución de problemas, ya que muchos de sus contenidos cobran sentido en el momento que es necesario aplicarlos pen una situación problemática. Es así que, al resolver un problema este nos ayuda como fuente de información que permite aplicar contenidos estudiados, y en otros casos en revelar aquellos aspectos que se deben retomar nuevamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Según Lester (1983) un problema es una situación donde un individuo o grupo requiere la necesidad de resolver, para el cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a su solución. Este debe tener un grado de dificultad apreciable, es decir, debe ser adecuado para el nivel de formación del individuo o grupo. Esta definición alude a que una situación puede ser denominada como problema, si esta requiere de un proceso reflexivo con el fin de buscar los pasos mediante los cuales pueden ser resueltos, evitando así, a que esta se reduzca meramente a un procedimiento automático para su solución.

Es así que, si un problema no implica una actividad intensa de pensamiento para su resolución, este puede provocar aburrimiento, en general pueden ser muy repetitivos y poco interesantes, en este caso lo denominaremos ejercicios, este último por lo general tienen una sola solución, donde el individuo podría sin mucho esfuerzo intelectual, encontrarla solución, por el cual pueden ser pocos llamativos para muchas personas.

2.1.1. Problema matemático

Un problema matemático es un problema donde la situación que se plantea debe ser nueva y conflictiva, el cual su resolución no debe ser mediante un algoritmo preestablecido (Martínez, 2021). Esta definición hace referencia que en un problema matemático, la situación planteada debe ser original y debe generar cierto conflicto, evitando esta ser una resolución básica únicamente utilizando la aplicación de meros algoritmos establecidos. Estos problemas suelen involucrar la formulación de ecuaciones, la manipulación de números, el análisis de patrones, la deducción lógica y la utilización de conceptos matemáticos, entre otros.

En este sentido, Foong (2002) clasifica los problemas de la siguiente manera:

a) **Problema de estructua cerrada**

   Este tipo de problemas se caracterizan por estar correctamente estructurados, donde su respuesta puede ser hallada mediante los datos (hipótesis) que nos proporcionan. Esta clase de problemas se puede dividir de la siguiente manera:

   - Problemas rutinarios: El énfasis de este tipo de problemas está en aprender matemática para poder ser aplicadas al momento de resolver problemas. Por ejemplo, de esta clase se pueden encontrar en los problemas arítmeticos escolares.

   - Problemas no rutinarios: El énfasis de este tipo de problemas está en utilizar estrategias heurísticas para realizar problemas pocos conocidos, los cuales necesitan de un nivel apreciable de razonamiento para su resolución. Aquí, el individuo debe ser capaz de entender el tópico matemático en cuestión para resolver con éxito este tipo de problemas.

b) **Problema de estructura abierta**

   Este tipo de problema se caracterizan por no estar bien estructurados, debido a que pueden faltar datos o no tienen una formulación clara, por tal motivo no tienen un determinado proceso, el cual se pueda llegar de manera mecánica a su solución. Esta clase de problema se divide en:

- Problemas reales aplicados: Son problemas que tienen un contexto real, en el cual se resolverá la situación utilizando herramientas matemaáticas.
- Investigación matemática: Son todo tipo de actividades en donde el individuo puede explorar y disfrutar de la matemática a través de la investigación. Este tipo de problema, permite que el individuo desarrolle su propio sistema de resolución.
- Problemas de final abierto corto: Este tipo de problemas tiene varias rutas de resolución, el cual se puede llegar de distintas maneras a su solución.

En esta dirección se encuentra Blanco (1993) que clasifica los problemas matemáticos de la siguiente manera:

- Ejercicio de reconocimiento: En este tipo de ejercicio se aspira a reconocer y recordar alguna definición, proposición o teorema, para llegar a su solución.
- Ejercicio algorítmico o repetición: Este tipo de ejercicio requiere de un algoritmo preestablecido para su solución, por lo general, este es un algoritmo numérico.
- Problema de traducción simple o complejo: Estos problemas son situaciones específicas el cual se requiere convertir el enunciado, ya sea oral o escrito, al lenguaje matemático para su resolución.
- Problema de proceso: Son problemas el cual tiene la posibilidad de tomar varios procesos para llegar a su solución.
- Problema sobre situaciones reales: Son problemas el cual se busca plantear de la manera más cercana posible a situaciones de la vida real, en el cual se busca utilizar habilidades, conceptos y procesos matemáticos.
- Problema de investigación matemática: Son problemas relacionados directamente con los contenidos matemáticos, el cual para llegar a su solución se requiere la búsqueda

de algún módelo matemático.

- Problema de puzzle: Son problemas en el cual se pretende mostrar el contenido y potencial creativo el cual dispone la matemática.
- Historias matemáticas: Este tipo de problemas por lo general se encuentran en libros de cuentos, novelas en donde el lector requiere de un esfuerzo para llegar a su solución.

2.2. Resolución de problemas

La resolución de problemas es un proceso que comienza con la formulación y planteamiento de un problema y termina con su solución. La resolución de problemas es considerada por Segovia y Rico (2001) como un proceso de razonamiento, el cual nos ayuda a pensar mejor. También, hace mención a que la resolución de problemas es un proceso cognitivo y analítico mediante el cual se busca la respuesta o solución a una situación el cual presenta una dificultad e incertidumbre, el cual implica habilidades de pensamiento crítico, razonamiento lógico y creativo para llegar a la solución del problema.

La resolución de problemas no es solo un proceso el cual se llega a un objetivo, más bien, es un medio el cual nos sirve para aprender matemática. Según Martínez (2021) recomienda usar la resolución de problemas para que los estudiantes obtengan la capacidad de formular, lidiar y resolver problemas complejos. Es así que, este nos beneficia en varias situaciones como: tener una mayor reflexión al momento de resolver un problema, adaptar y adoptar estrategias precisas, el cual nos lleve a la solución, precisar formas de pensar y hábitos de persistencia, puesto que, no siempre se llega a la solución del problema la primera vez que se lo intenta.

2.2.1. Algunas fases de la resolución de problemas encontradas en la literatura

Para la resolución de problemas, en la literatura científica se encuentran diferentes fases para su ejecución, es así, que a continuación se mencionarán algunas.

Primero, según Krulik y Rudnick (1988) conciben la resolución de problemas como una habilidad, es por ello, que propusierón las siguientes fases para el proceso de resolución:

1. **Lectura del problema:** En esta fase el alumno debe identificar las cuatro partes de la anatomía del problema, a saber: un escenario, una pregunta, algunos hechos y los distractores.

2. **Exploración:** Se trata de un análisis de la información que contiene el problema, en el cual se mentaliza los posibles caminos para llegar a la solución.

3. **Selección de una estrategia:** Al obtener los diferentes caminos de soluciones de la fase anterior, el alumno debe elegir el proceso más apto y que le parezca más apropiado para la resolución.

4. **Resolver el problema:** Al tener seleccionado la estrategia, el alumno deberá realizar los procesos matemáticos necesarios para llegar a la respuesta.

5. **Vista retrospectiva y exploración a otros problemas:** La respuesta no es la solución, si no, es cada uno de los pasos que se ejecutó para llegar a la respuesta, es aquí donde, el estudiante deberá verificar la respuesta y registrar mentalmente los procesos que se ha seguido y, por último, deberá buscar otros problemas, para expandir sus conocimientos.

Segundo, Pólya y Zugazagoita (1979) introdujeron la idea de que la resolución de problemas podría verse como un arte que utiliza la ”heurística moderna” (comillas en el original) como vínculo para que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo del tema, es así que plantearon las siguientes fases que puede llevar a cabo el estudiante para la resolución de problemas:

1. **Comprensión del problema:** El cual consiste en entender y comprender los datos y la información que proporciona el problema.

2. **Concepción de un plan:** En esta fase el individuo debe descubrir las relaciones que tiene los datos con la incógnita del problema, mediante el cual deberá llegar a un plan de resolución en el caso de no encontrar la solución inmediata.

3. **Llevar a cabo el plan:** El individuo deberá ejecutar el plan previamente establecido,

el cual deberá ir comprobando la ejecución de cada uno de los pasos.

4. **Revisión:** Para finalizar se deberá examinar la solución obtenida.

Tercero, según Schoenfeld (1985), enfocó la relación que tiene la resolución de problemas con el desarrollo del pensamiento, y así, propuso las siguientes fases basadas de la propuesta de Polya:

1. **Comprensión del problema:** El estudiante tendrá que dibujar un diagrama con respecto al enunciado y examinar un caso en particular con la finalidad de intentar simplificar el problema.

2. **Diseño de un plan de solución:** El alumno deberá planificar una guía o proceso mediante el cual se llegará a la solución del problema.

3. **Ejecutar el plan:** Se deberá llevar a cabo el plan que se planificó en la fase anterior el cual se deberá ejecutarlo minuciosamente.

4. **Mirada retrospectiva:** Esta fase constará en la verificación de los resultados y se responderá a las siguientes preguntas:

    - ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
    - ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
    - ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
    - ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
    - ¿Puede quedar concreta en casos particulares?
    - ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
    - ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Cuarto, según Gonzáles (2000), propuso sus propias fases para la resolución de problemas, las cuales mencionaremos a continuación:

1. **Comprensión del tema:** La primera fase consiste en entender y comprender la información que nos proporciona el problema donde, el estudiante deberá buscar la relación

entre los datos, las definiciones y teoremas sobre el tema, para así buscar un plan para resolverlo.

2. **Ejecución de la operación:** En esta fase, el estudiante deberá llevar a cabo el problema ejecutando detalladamente cada uno de los pasos que se determinaron en la fase anterior, con el objetivo de alcanzar la resolución del problema planteado.

3. **Verificación de los resultados:** En esta última fase el estudiante deberá realizar un análisis de los resultados obtenidos, el cual, el docente se encargará de su verificación.

Para finalizar, el foco de esta investigación buscará utilizar algunas de las fases de resolución de problemas planteadas anteriormente, derivando en una propuesta alternativa para la resolución de problemas contextualizados.

2.3. Contextualización

La contextualización es tener en cuenta las circunstancias de un hecho o una situación, es decir, al momento en que se analiza un hecho es importante tener en cuenta el contexto en el que se está desarrollando. Sin embargo, en el ámbito educativo, Vázquez (2004) menciona que la contextualización es presentar la ciencia en un contexto cercano a la vida de los alumnos y que sean capaces de responder a sus necesidades, por lo cual se tiene que adaptar los contenidos educativos a la realidad cultural de los estudiantes, desarrollando los contenidos del tema de estudio en sesiones de aprendizaje a través de ejemplos de su vida cotidiana.

Es así que, Vásquez considera tres tipos en que la contextualización puede ayudar en la enseñanza metodológica:

- **Contextualización hístorica:** Es una forma de mostrar cómo y por qué surgen las ideas y teorías científicas.

- **Contextualización metodólogica:** Es una forma en la que incide a los estudiantes a no solo ver los contenidos únicamente como objetos terminales, sino también en las formas en que estos pueden ser utilizados.

- **Contextualización socio-ambiental:** Es una forma de ver la utilidad de la ciencia a través de nuestro entorno y la interacción con él.

De esta manera, la importancia de la contextualización sirve para entender de mejor manera un hecho, en el cual se debe tener en cuenta todos los aspectos que influyen en él. Para la contextualización es preciso contar con herramientas que permitan incorporar los diferentes escenarios de la vida cotidiana y al mismo tiempo promover la participación activa de los estudiantes en las actividades a desarrollar. Por tanto, la contextualización en matemática puede ayudar a que los aprendices obtengan un mayor interés por el tema en estudio, con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo, haciendo más eficiente el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Capítulo 3

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

3.1. *Softwares* educativos

Un *software* educativo es un conjunto de programas educativos que se han desarrollado con la finalidad de ser utilizados para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje, con la característica que sean interactivos, es decir, que contesten de manera inmediata las acciones de los estudiantes (Quintero et al., 2005). Es así, que un software educativo es una aplicación informática, el cual está diseñada para tratar de mejorar la experiencia educativa de los estudiantes, con miras a enriquecer su aprendizaje.

Estos programas pueden abarcar una amplia gama de temas y de niveles educativos, ya que existen *softwares* diseñado para los niños de nivel básica, hasta programas desarrollados para los estudiantes que cursan un nivel universitario, el cual puede cubrir campos como lo es: las matemáticas, las ciencias naturales, las ciencias sociales, idiomas, entre otros.

En este aspecto, según Marquéz (1996) menciona que la mayoría de los programas educativos tienen cinco características esenciales, el cual ayudan a una mejor interacción hacia los alumnos, las cuales mencionaremos a continuación:

- Son materiales que han sido elaborados con la finalidad de fines académicos.
- Utilizan la computadora (ordenador, lapto, etc.) como soporte, en donde los alumnos

realizan las actividades que ellos proponen.

- Son interactivos, ya que estos programas contestan de manera inmediata a las acciones de los estudiantes, permitiendo crear un diálogo e intercambio de información entre el computador y los alumnos.
- Individualizan el trabajo de los alumnos, ya que dichos programas se adaptan al ritmo de trabajo y aprendizaje de cada uno de los estudiantes y, pueden adaptar sus actividades según las actuaciones del alumno.
- Los *softwares* educativos son fáciles de usar, debido a que los conocimientos informáticos necesarios para utilizar la mayoría de ellos son mínimos, aunque cada programa tiene ciertas reglas de funcionamiento, las cuales son necesarios aprender.

En este sentido, Marquéz (1996), menciona que casi todos los programas didácticos, al igual que los que no tienen una finalidad educativa, constan de tres módulos principales, a saber: el módulo que gestiona la comunicación (denominado entorno de comunicación), el módulo que contiene debidamente organizado los contenidos informáticos del programa (denominado base de datos) y, el módulo que gestiona las actuaciones de la computadora y su respuesta a las acciones del usuario (denominado motor o algoritmo), las cuales se especificará a continuación:

1. **El entorno de comunicación**

   Es el entorno en donde los programas establecen una comunicación con los usuarios. Este módulo está integrado por dos sistemas, el primero, el cual es el sistema programa-usuario, el cual facilita la transmición de información de la computadora hacia el usuario, y el segundo, es el sistema usuario-programa, el cual facilita la transmisión de información del usuario hacia el computador.

2. **La base de datos**

   La base de datos contiene información específica que cada programa presentará a los alumnos, y están constituidos por:

   - Modelos de comportamiento: Estos tipos de modelos se dividen en dos: modelo físico-matemático el cual contienen leyes determinadas por ecuaciones; y el modelo no determinado, que son definidos por ecuaciones con variables aleatorias y tablas de comportamiento.

- Datos tipo texto: Son aquellos donde se encuentra la información alfanumérico.
- Datos gráficos: Estos están constituidos por dibujos, fotografía, secuencia de videos, etc.

3. **Motor o algoritmo**

   Gestiona las secuencias en las que se presenta la información de la base de datos y las actividades que pueden realizar los alumnos, es así, que se puede distinguir cuatro tipos de algoritmos:

   - Algoritmo lineal: Este tipo de algoritmo tiene una secuencia de actividades únicas.
   - Algoritmo ramificado: Este tipo de algoritmo tienen predeterminados las posibles secuencias según la respuesta de los alumnos.
   - Tipo entorno: Este tipo de algoritmo no tienen una secuencia determinada, el estudiante elige que y cuando lo ha de realizar.
   - Tipo sistema experto: El desarrollo de este tipo de algoritmos esta estrechamente relacionado con los avances en el campo de la Inteligencia Artificial.

Según este contexto, Marquéz también clasifica los tipos de *software* educativos de acuerdo al propósito en referencia a la enseñanza de los estudiantes:

- Programas de simulación: Estos programas pueden actuar como un simulador para recrear situaciones que estén relacionados con la enseñanza del estudiante.
- Programas de juegos: Este tipo de *software* utiliza la interactividad y actividades dinámicas para buscar motivar al estudiante en el estudio de una área en concreto.
- Programas de resolución de problemas: Estos programas tienen la finalidad de incentivar el desarrollo de la capacidad analítica del estudiante y el aprendizaje autónomo.
- Programas prácticos y de ejercicios: Estos programas buscan brindar conocimientos a

través de lecciones, las cuales poseen una parte teórica, el cual sirve de guía para los usuarios y; una parte práctica, donde el alumno debe resolver test o ejercicios.

3.2. *Softwares* matemáticos

A la hora de estudiar matemática es recomendable apoyarse con algún *software* matemático, el cual contribuya en la comprensión y análisis del tema en estudio. El *software* educativo se lo ha utilizado para aplicarlos en todas las asignaturas; sin embargo, su uso en el área de matemáticas se ha permitido que los estudiantes puedan simular situaciones y realidades de la vida diaria, así dejando de ser las matemáticas menos abstractas (Vidaurre y Vallejo, 2015).

Según Meneses y Artunduaga (2014), menciona que articular los software educativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas resulta una estrategia el cual despierta el interés y motivación del estudiante, ya que estos programas ofrecen recursos recreativos, prácticos, entre otros; mediante el cual los estudiantes desarrollan habilidades matemáticas, como lo es razonar, formular y resolver problemas matemáticos. En este sentido, los *software* educativos son elementos esenciales en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, ya que al utilizar en la didáctica se podría dejar a un lado la enseñanza tradicional, buscando así un mayor interés por parte del estudiante, ya que hoy en día las personas están familiarizados con la tecnología, es así, que estos *software* pueden contribuir a un aprendizaje significativo del tema de interés, ya que mediante los programas didácticos se puede lograr una mejor comprensión y análisis de los ejercicios que el estudiante requiere resolver.

3.3. Algunos *software* matemáticos libres

Entre algunas de las aplicaciones más útiles para la enseñanza y aprendizaje del estudio de la matemática, en concreto el tema de derivas, se tiene: FooPlot, GeoGebra, Wolfram Alpha y Winplot, entre otros.

De este grupo se pueden destacar a Wolfram Alpha y GeoGebra como los programas informáticos más aptos para el desarrollo de la propuesta del presente trabajo. Estos programas son muy prácticos para la didáctica del tema de derivadas y la matemática en general, el cual, además de solucionar problemas de aritmética, álgebra, geometría, los cuales nos brinda la posibilidad según corresponda a la solución tanto analítica como gráfica. Estas ventajas permiten un mejor entendimiento acerca del contenido matemático en estudio.

A continuación describiremos brevemente algunos de estos programas.

3.3.1. Wolfram Alpha

Wolfram Alpha es un *software* académico libre en línea el cual responde a las preguntas directamente mediante el procesamiento de la respuesta, haciendo cálculos desde su propia base de datos y conocimiento, donde sus respuestas son detalladas y específicas. Sin embargo, también ofrece su versión pagada, Wolfram Alpha Pro, el cual consta con funciones adicionales que no tiene su versión gratuita.

Dentro de este contexto, Wolfram Alpha es un *software* didáctico que sirve para todos los niveles académicos, el cual abarca desde la primaria hasta los de tercer nivel e incluso cuarto nivel académico. Este *software* no solo se puede utilizar como una calculadora básica, ya que esta cuenta con varias aplicaciones, las cuales destacan tres, a saber: calculadora de derivadas, calculadora de integrales y el *Wolfram Alpha Demonstratios Project*. En este último se accede a varias demostraciones interactivas para diferentes niveles académicos y en diferentes áreas de conocimiento.

Características, ventajas y desventajas

Características

Al tener varias aplicaciones, Wolfram Alpha cuenta con una diversidad de características, del cual mencionaremos las más importantes dentro de un contexto didáctico.

- Búsqueda breve, rápida y detallada del tema en específico de investigación.
- Solución de problemas matemáticos que van desde lo sencillo hasta los complejos, el cual aparte de su solución aporta con el desarrollo de ecuaciones, gráficas y teoría.

- Nos brinda información adicional para ampliar nuestro conocimiento acerca del contenido investigado.

Ventajas

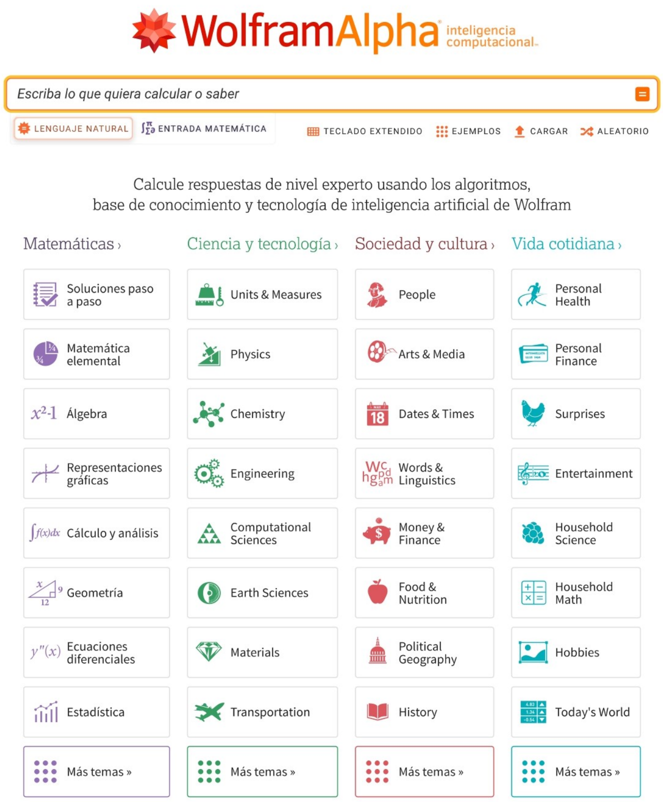
- No se necesita de un registro previo para su utilización.
- Dominio de la mayoría de los ámbitos científicos.
- Responde a las preguntas de forma completa y exacta.
- Brinda información extra para un mayor conocimiento del tema investigado.

Desventajas

- En su versión gratuita no muestra todos los pasos de resolución para llegar a la solución de un ejercicio o problema.
- Dependencia a una conexión de internet

En este sentido, Wolfram Alpha nos sirve de utilidad en este trabajo de investigación como un método de verificación de los problemas contextualizados, ya que este *software* nos ayuda calculando de manera rápida y exacta la derivada de una función, el cual es utilizada en la última fase de nuestra propuesta metodológica. Para obtener información adicional sobre Wolfram Alpha se recomienda ingresar al siguiente link: https://www.wolframalpha.com/

Figura 4: Página principal de WolframAlpha



Fuente: WolframAlpha

3.3.2. GeoGebra

GeoGebra es un *software* matemático libre en línea (aunque también ofrece la descarga de un programa de escritorio) el cuál es de utilidad para todos los niveles académicos, ya que este programa nos sirve para la utilización en diferentes áreas, como lo es la geometría, álgebra, hojas de cálculo, estadística, entre otras. Geogebra cuanta con varias secciones el cuál incluye álgebra, geometría 2D, geometría 3D y probabilidad.

La interfaz que utiliza GeoGebra es fácil y sencilla de entender, sin embargo, siendo a la vez compleja debido al potencial en el que se puede utilizar, ya que con este *software* se puede realizar gráficas como la tangente en un círculo, diferencias entre un polígono regular y uno irregular, entre otros.

Características, ventajas y desventajas

Características

GeoGebra es un programa el cual tiene un gran potencial si este es utilizado como una herramienta en el campo didáctico, es por ello que se mencionará algunas características importantes de este *software*.

- GeoGebra está disponible para diferentes sistemas operativos y de distintos dispositivos.
- Puede llegar a ser un recurso esencial para la docencia en matemática.
- Combina la geometría, álgebra y cálculo.
- Permite construir figuras mediante puntos, segmentos, rectas, vectores y cónicas.

Ventajas

- Puede ser utilizado de manera *online* u *offline*.
- Su interfaz es fácil de usar.
- Disponible en varios idiomas.
- Es una herramienta didáctica para crear material de aprendizaje interactivo.

Desventaja

- Para un dominio completo del *software* se requiere de un tiempo de utilización del programa.
- Algunas funciones requieren de un conocimiento matemático más profundo para su utilización.

GeoGebra nos sirve de utilidad en este tema de investigación, puesto que se puede visualizar de manera gráfica la resolución de los ejercicios, y a su vez, se podrá realizar su respectiva verificación del problema en la fase cuatro de nuestra propuesta metodológica. Para obtener información adicional sobre GeoGebra se recomienda ingresar al siguiente link: https://www.geogebra.org/

Figura 5: GeoGebra

Fuente: GeoGebra

Capítulo 4

ALGUNAS APLICACIONES PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1. Propuesta de resolución de problemas para el estudio de derivadas

Mediante las fases de resolución de problemas de los distintos autores mencionados anteriormente en el capítulo 2, se propuso una propia guía para la resolución de problemas. La misma constará de 4 fases, a saber: lectura y comprensión del problema, búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas, construcción de la solución y verificación de resultados apoyados en herramientas tecnológicas. A continuación se describirá cada una de estas fases

- **Fase 1: Lectura y comprensión del problema**

  La primera fase consiste en comprender y entender los datos y la información que nos proporciona el enunciado del problema, identificando así cuál es la pregunta del problema, si este tiene distractores (datos o información que desvían la atención del problema) y cuáles son los datos relevantes que nos proporcionan.

  Mediante esta fase, para el estudio de las derivadas, el estudiante deberá reconocer la función sobre la cual se trabajará, así como tendrá que descartar datos que no proporciones información para la resolución del problema y por último deberá analizar que es lo que quiere determinar el problema.

- **Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas**

  En esta segunda fase el estudiante deberá buscar la relación entre la información del enunciado con las definiciones, propiedades, teoremas, entre otros resultados fundamentales del tema en estudio, con la finalidad de entender mejor el tópico, cuyo objetivo será buscar un plan óptimo para la resolución del problema.

  Con respecto a esta fase, para la resolución de problemas de derivadas, el alumno podrá encontrar la información necesaria de este tema en el Capítulo 1: Derivadas, para un estudio y una retroalimentación del tópico, con el propósito de tener una compresión significativa del tema, y así detallar un plan adecuado para la resolución del problema.

- **Fase 3: Construcción de la solución**

  La tercera fase implica que el estudiante llevará a cabo de manera minuciosa y detallada de cada uno de los pasos del plan que se obtuvo en la fase previa, el cual para lograrlo se deberá realizar meticulosamente las técnicas y estrategias aprendidas previamente, así como un análisis profundo de cada paso y sus implicaciones en el contexto del problema planteado.

  En esta tercera fase, el estudiante deberá ir realizando cada uno de los pasos del plan que se detalló en la fase anterior, así como, también deberá ir redactando cada uno de los procesos que se va realizando, de la misma manera que deberá escribir las reglas de derivación que utilizó a lo largo de la resolución del problema.

- **Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas**

  En esta última fase el estudiante se apoyará mediante la utilización de un *software* matemático para la verificación de la solución encontrada.

  Es así que en nuestra propuesta metodológica, el estudiante deberá comprobar el resultado obtenido del problema mediante cualquiera de los dos *softwares* mencionados en el Capítulo 3: Herramientas tecnológicas, para determinar su debida corrección en el caso de que esta sea necesaria y redactando una conclusión al problema resuelto.

4.2. Resolución de problemas relacionados con derivadas

Problema 4.2.1

El curso de 9 no de básica de la escuela “Unidad Educativa Cumandá” desean realizar un cartel rectangular para las olimpiadas del colegio, el cual tenga una área de impresión de $50cm^2$, pero desean tener margen superior e inferior de $4cm$ y márgenes laterales de $3cm$ cada uno. ¿Que dimensione debe tener el cartel para minimizar la cantidad de papel usado?

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Se observa que el problema nos proporciona los siguientes datos:

El área del cartel es de $50cm^2$ por lo cual se tiene la siguiente ecuación:

$$A = b.h = 50 \Rightarrow b = \frac{50}{h}.$$

El perímetro de los márgenes es

$$P = 2(b+4) + 2(h+2) = 2\left(\frac{50}{h} + 4\right) + 2(h+2)$$

y se analiza que los valores de b y h deben ser mayor a cero, ya que no existe dimensiones negativas de un cartel.

Por lo cual la función que se ira a trabajar será:

$$P(h) = \frac{100}{h} + 2h + 12.$$

Y el problema nos pide hallar las dimensiones del cartel para minimizar la cantidad de papel usado.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar las dimensiones del cartel utilizando la menor cantidad de papel usado, utilizamos el criterio de la segunda derivada. Es así, que el plan a seguir será:

1. Determinar $P'(h)$ y $P''(h)$
2. Hallar los puntos críticos de $P(h)$
3. Determinar si el punto crítico es un mínimo de la función
4. Encontrar el valor de b

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $P(h) = \frac{100}{h} + 2h + 12$ por lo cual para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} P'(h) &= \left(\frac{100}{h}\right)' + (2h)' + (12)', \text{ regla de la suma de funciones} \\ &= -\frac{100}{h^2} + 2 \qquad \text{, regla para la potencia y de una constante.} \end{aligned}$$

Para hallar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} P''(h) &= (2)' - \left(\frac{100}{h^2}\right)', \text{ regla de la diferencia de funciones} \\ &= 0 - \left(-\frac{200}{h^3}\right) \text{, regla de la constante y de la potencia} \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de $P(h)$

$$\begin{aligned} P'(h) = 2 - \frac{100}{h^2} &= 0 \\ 2 &= \frac{100}{h^2} \\ h &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

$P(h)$ tiene un punto crítico en $h = \sqrt{50} \approx 7{,}071$.

Tercero, evaluaremos $h = \sqrt{50}$ en $P''(h)$ para determinar si es un mínimo.

$$P''(h) = \frac{200}{(\sqrt{50})^3} \approx 0{,}56$$

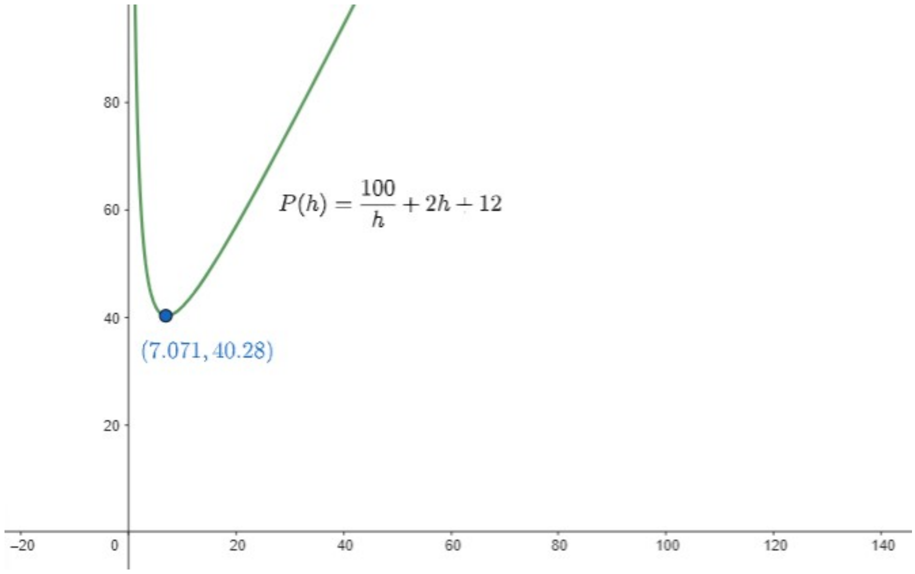
Es así que por el criterio de la segunda derivada cuando $h = \sqrt{50}$ se tiene un valor mínimo de la función $P(h)$.

Por último encontraremos el valor de la base del cartel

$$b = \frac{50}{\sqrt{50}} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}071$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Utilizando el *software* GeoGebra y graficando $P(h) = \frac{100}{h} + 2h + 12$ podemos verificar el mínimo de la función.



Verificamos mediante la gráfica que la altura del cartel deberá ser de $\sqrt{50} \approx 7{,}071cm$ y una base de $\frac{50}{\sqrt{50}} \approx 7{,}071cm$ para utilizar la menor cantidad posible de papel para el cartel.

Problema 4.2.2

Las acciones de una empresa que se dedica a la bolsa de valores responde a la siguiente ley

$$C(x) = \frac{1}{100}x^3 - \frac{9}{20}x^2 + \frac{243}{100}x + 300.$$

Suponiendo que la bolsa de valores funciona todos los 30 días de un mes. Determinar las acciones máximas y mínimas que se alcanzaron, así como los días en que ocurrieron, sin tomar en cuenta el primer ni el último día.

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Vemos que el problema nos proporciona los siguientes datos:

La función $C(x) = \frac{1}{100}x^3 - \frac{9}{20}x^2 + \frac{243}{100}x + 300$.

El intervalo de tiempo (días) $(0, 30)$.

Y nos pide hallar los valores máximos y mínimos que se obtuvieron de las acciones, así como los días en que ocurrieron.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar los valores máximos y mínimos de una función se debe hallar la primera y segunda derivada de la función, para utilizar el criterio de la segunda derivada. Es así, que el plan a seguir para la resolución del problema es el siguiente:

1. Determinar $C'(x)$ y $C''(x)$.
2. Hallar las raíces de $C'(x) = 0$.
3. Evaluar cada una de las raíces en la función C''(x).
4. Evaluar cada una de las raíces en la función C(x).

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $C(x) = \frac{1}{100}x^3 - \frac{9}{20}x^2 + \frac{243}{100}x + 300$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} C'(x) &= \left(\frac{1}{100}x^3\right)' - \left(\frac{9}{20}x^2\right)' + \left(\frac{243}{100}x\right)' + (300)', && \text{reglas de la suma y diferencias de funciones} \\ &= \frac{3}{100}x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{243}{100} && \text{, regla para la potencia.} \end{aligned}$$

Para hallar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} C''(x) &= \left(\frac{3}{100}x^2\right)' - \left(\frac{9}{10}x\right)' + \left(\frac{243}{100}\right)' && \text{,reglas de la suma y diferencias de funciones} \\ &= \frac{6}{100}x - \frac{9}{10} && \text{, regla para la potencia} \end{aligned}$$

Segundo, encontramos las raíces de $C'(x) = 0$

$$C'(x) = \frac{6}{100}x - \frac{9}{10} = 0$$

$$\frac{3}{100}(x^2 - 30x + 81) = 0, \text{ factor común}$$

$$x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$(x - 3)(x - 27) = 0, \text{ factorización.}$$

Las raíces de $C'(x) = 0$ son $x = 3$ y $x = 27$.

Tercero, evaluaremos $x = 3$ y $x = 27$ en $C''(x)$ para determinar cuando x es un máximo o cuando es un mínimo

$$C''(3) = \frac{3}{50}(3) - \frac{9}{10} = -\frac{18}{25}$$
$$C''(27) = \frac{3}{50}(27) - \frac{9}{10} = \frac{18}{25}$$

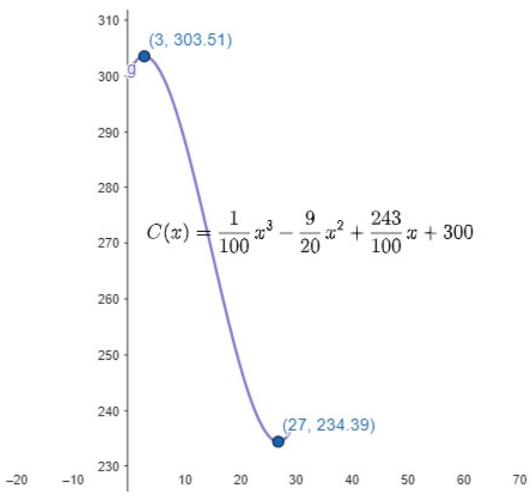
Es así, que por el criterio de la segunda derivada se tiene que cuando $x = 3$ se tiene el valor máximo de la función $C(x)$ y cuando $x = 27$ se tiene el valor mínimo de la función $C(x)$.

Por último, evaluaremos $x = 3$ y $x = 27$ en $C(x)$ para determinar los valores máximos y mínimos que toma $C(x)$.

$$C(3) = \frac{1}{100}(3)^3 - \frac{9}{20}(3)^2 + \frac{243}{100}(3) + 300 = \frac{30351}{100} = 303,51$$
$$C(27) = \frac{1}{100}(27)^3 - \frac{9}{20}(27)^2 + \frac{243}{100}(27) + 300 = \frac{23439}{100} = 234{,}39$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Utilizando el *software* GeoGebra y graficando $C(x) = \frac{1}{100}x^3 - \frac{9}{20}x^2 + \frac{243}{100}x + 300$ podemos verificar los puntos máximos y mínimos que tiene la función.



Podemos verificar mediante la gráfica que las acciones máximas que se alcanzaron fue en el día 3 y fue de 303.51, y a su vez las acciones mínimas que se alcanzaron fue en el día 27 y fue de 234.39.

Problema 4.2.3

La fundidora en donde usted trabaja ha sido contratada para diseñar y construir un tanque rectangular de acero, de base cuadrada, abierto por arriba y con una capacidad de $500cm^3$. Como ingeniero de producción, su trabajo consiste en determinar las dimensiones de la base y de la altura que hacen que el tanque pese lo menos posible.

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

El problema nos proporciona los siguientes datos:

El tanque tiene forma de un prisma rectangular, por lo cual su volumen es

$$V = l^2.h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{l^2}$$

y su área es

$$\begin{aligned} A &= l^2 + 4lh \qquad \text{(ya que el tanque estará abierto por arriba)} \\ &= l^2 + 4l\left(\frac{500}{l^2}\right) = l^2 + \frac{2000}{l} \end{aligned}$$

donde l representa la longitud de los lados del tanque y h su altura.

La función sobre la cual se irá a trabajar será

$$A(l) = l^2 + \frac{2000}{l}.$$

Y el problema nos pide hallar las dimensiones del tanque para que pese lo menos posible.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar el menor peso posible del tanque se deberá usar la menor cantidad de material (es decir, la menor cantidad de área utilizada), para el cual usaremos el criterio de la segunda derivada. Es así, que el plan a seguir será:

1. Determinar $A'(l)$ y $A''(l)$
2. Hallar los puntos críticos de $A(l)$
3. Determinar si el punto cŕitico es un mínimo de la función
4. Encontrar el valor de la altura del tanque

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $A(l) = l^2 + \frac{2000}{l}$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} A'(l) &= (l^2)' + \left(\frac{2000}{l}\right)' && \text{, regla de la suma de funciones} \\ &= 2l - \frac{2000}{l^2} && \text{, regla para la potencia.} \end{aligned}$$

Para hallar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} A''(l) &= (2l)' - \left(\frac{2000}{l^2}\right)' && \text{, regla de la diferencia de funciones} \\ &= 2 + \frac{4000}{l^3} && \text{, regla para la potencia} \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de $A(l)$

$$\begin{aligned} A'(l) = 2l - \frac{2000}{l^2} &= 0 \\ 2l &= \frac{2000}{l^2} \\ 2l^3 &= 2000 \\ l &= 10. \end{aligned}$$

$A(l)$ tiene un punto crítico en $l = 10$.

Tercero, evaluaremos $l = 10$ en $A''(l)$ para determinar si es un mínimo de la función

$$A''(10) = 2 + \frac{4000}{10^3} = 6.$$

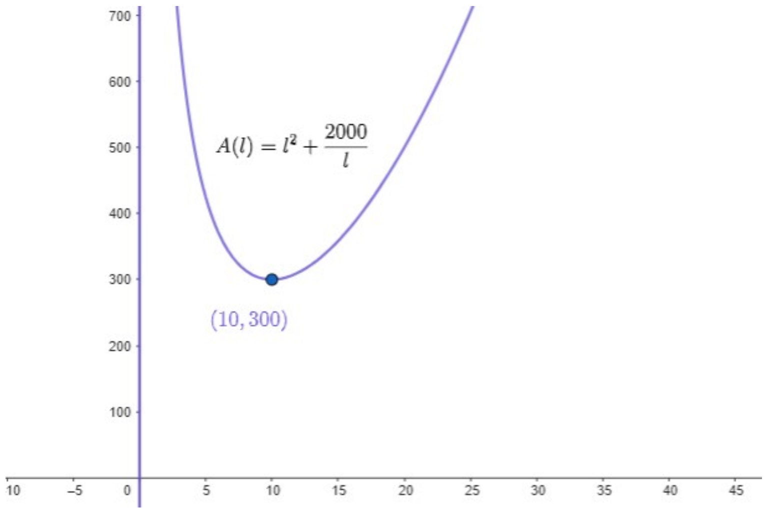
Es así, que por el criterio de la segunda derivada cuando $l = 10$ se tiene un valor mínimo de la función $A(l)$.

Por último, encontraremos el valor de la altura del tanque

$$h = \frac{500}{(10)^2} = 5$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Utilizando el *software* GeoGebra y graficando $A(l) = l^2 + \frac{2000}{l}$ podemos verificar el punto mínimo de la función.



Verificamos mediante la gráfica que el valor de los lados de la base del tanque deberá se de $10cm$ con una altura de $5cm$ para que pese lo menos posible.

Problema 4.2.4

La empresa "Deli Cream" ha comprobado que a un precio de 50 centavos de dólar se vende un promedio de 200 helados al día. Por cada centavo de dólar que se aumente el precio del helado se vende dos helados menos al día.

Si el coste por unidad es de 40 centavos de dólar. ¿A qué precio se debe vender cada helado para obtener el máximo beneficio diario? ¿Y cuál será ese beneficio?

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Se observa que el problema nos proporciona los siguientes datos:

El precio del helado $p_h = 50 + x$.

La cantidad de helados vendidos al día $h_v = 200 - 2x$.

El costo de fabricación del helado $c_f = 40$.

Donde x es el aumento de cada centavo al precio original.

El beneficio de una empresa se cálcula como la diferencia entre los ingresos con los gastos de la empresa. Para determinar los ingresos de una empresa se multiplica la cantidad de unidades vendidas por su precio y para determinar los gastos de una empresa se multiplica la cantidad de unidades vendidas por su costo de fabricación.

Es decir, la función sobre la cual se trabajará es la del beneficio, y se da de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} B(x) = h_v p_h - h_v c_f &= (200-2x)(50+x) - (200-2x)40 = (200-2x)(50+x-40) \\ &= (200-2x)(10+x) = 2000 + 200x - 20x - 2x^2 = 180x - 2x^2. \end{aligned}$$

Y el problema nos pide hallar el precio del helado con el cual se obtenga el máximo beneficio y también cuál será ese beneficio.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar el precio del helado con el cual se obtenga el máximo beneficio, utilizaremos el criterio de la segunda derivada. Es así, que el plan a seguir para la resolución del problema es el siguiente:

1. Determinar $B'(x)$ y $B''(x)$.
2. Hallar los puntos críticos de $B(x)$.
3. Determinar si los puntos críticos son máximos o mínimos de la función.
4. Evaluar el punto máximo de la función en $B(x)$.
5. Encontrar el precio al que se deberá vender el helado.

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $B(x) = 200 + 180x - 2x^2$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} C'(x) &= (200)' + (180x)' - \left(2x^2\right)' && \text{, reglas de la suma y diferencias de funciones} \\ &= 180 - 4x && \text{, regla para la potencia y regla de la constante.} \end{aligned}$$

Para hallar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} C''(x) &= (180)' - (4x)' && \text{,reglas de la suma y diferencias de funciones} \\ &= -4 && \text{, regla para la potencia y regla para la constante} \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de $B(x)$

$$\begin{aligned} B'(x) = 180 - 4x = 0 \\ 180 = 4x \text{ , despejar} \\ x = 45 \end{aligned}$$

$B(x)$ tiene un punto crítico en $x = 45$

Tercero, evaluaremos $x = 45$ en $B''(x)$ para determinar cuando x es un máximo o es un mínimo.

$$B''(45) = -4$$

Es así que por el criterio de la segunda derivada se tiene que cuando $x = 45$ se tiene un valor máximo de la función $B(x)$.

Cuarto, evaluaremos $x = 45$ en $B(x)$ para determinar el valor máximo que toma la función.

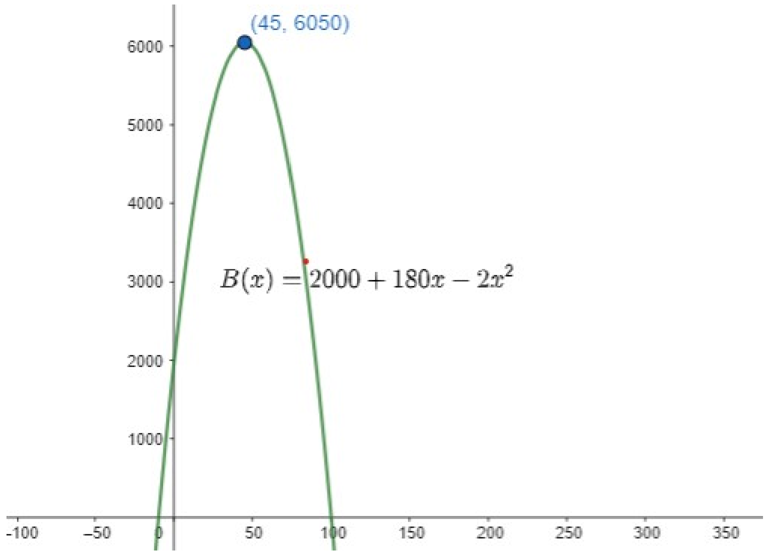
$$B(45) = 2000 + 180(45) - 2(45)^2 = 6050.$$

Por último, encontraremos el precio a que se deberá vender el helado para alcanzar el máximo beneficio

$$p_h = 50 + 45 = 95.$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Utilizando el *software* GeoGebra y graficando $B(x) = 2000 + 180x - 2x^2$ podemos verificar el punto máximo que tiene la función.



Podemos verificar mediante la gráfica que el beneficio máximo diario es de $\$60,50$ y se produce cuando se aumenta 45 centavos de dólar al precio original del helado, es decir, el valor del helado será de 95 centavos de dólar.

Problema 4.2.5

La empresa "Pinturas Unidas" desea fabricar una lata de pintura con capacidad de 1 litro con forma de un cilindro y se requiere utilizar el menor material posible. ¿De que dimensiones trabajando en centímetros debe ser la lata de pintura?

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Se observa que el problema nos proporciona los siguientes datos:

La lata de pintura tiene la forma de un cilindro y se conoce que 1 litro es igual a $1000\ cm^3$ por lo cual se tiene.

El volumen $V = \pi r^2 h = 1000$.

El área superficial $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

Donde r es el radio y h es la altura del cilindro. De la fórmula del volumen se puede despejar h para trabajar con una sola variable, por lo cual

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Es así, que la fórmula con la cual se va a trabajar será:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \end{aligned}$$

Y el problema nos pide hallar la altura h y el radio r mínimo para fabricar una lata de un litro.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar las dimensiones de la lata de pintura para utilizar la menor cantidad de material posible, utilizaremos el criterio de la segunda derivada. Es así que el plan a seguir será:

1. Determinar $A'(r)$ y $A''(r)$
2. Hallar los puntos críticos de $A(r)$
3. Determinar si el punto crítico es un mínimo de la función
4. Encontrar el valor de la altura del cilindro

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $A(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} A'(r) &= (2\pi r^2)' + \left(\frac{2000}{r}\right)' && \text{, regla de la suma de funciones} \\ &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{, regla para la potencia.} \end{aligned}$$

Para hallar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} A''(r) &= \left(4\pi r - \frac{2000}{r^2}\right)' && \text{, derivada de orden superior} \\ &= (4\pi r)' - \left(\frac{2000}{r^2}\right)' && \text{, regla de la diferencia de funciones} \\ &= 4\pi + \frac{4000}{r^3} && \text{, regla para la potencia.} \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de $A(r)$

$$\begin{aligned} A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} &= 0 \qquad \text{, despejar} \\ 4\pi r &= \frac{2000}{r^2} \quad \text{, despejar} \\ r^3 &= \frac{20000}{4\pi} \text{, despejar} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \end{aligned}$$

$A(r)$ tiene un punto crítico en $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

Tercero, evaluaremos $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ en $A''(r)$ para determinar si r es un mínimo

$$\begin{aligned} A''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) &= 4\pi + \frac{4000}{\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^3} = 4\pi + \frac{4000}{\frac{500}{\pi}} = 4\pi + 8\pi \\ &= 12\pi. \end{aligned}$$

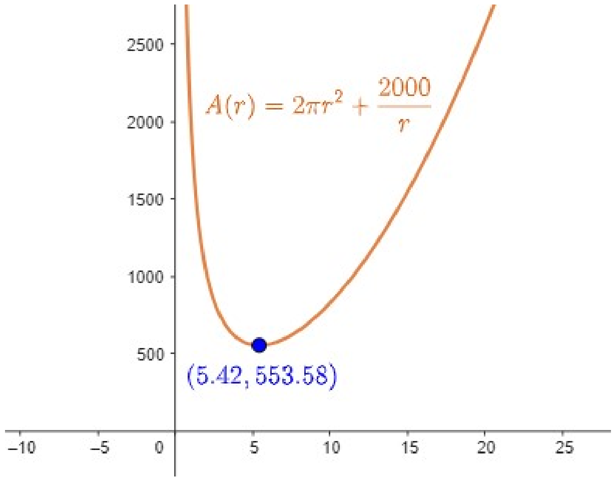
Es así que por el criterio de la segunda derivada cuando $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ se tiene un valor mínimo de la función $A(r)$.

Por último, encontraremos el valor de la altura de la lata de pintura

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

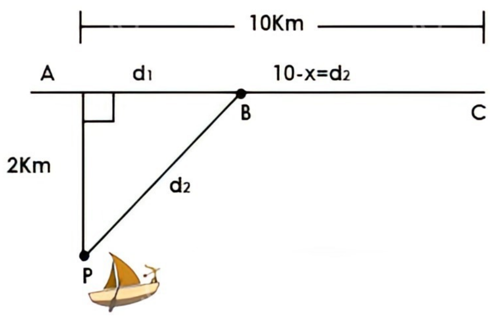
Utilizando el *software* GeoGebra y graficando $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ podemos verificar el punto mínimo de la función.



Verificamos que mediante la gráfica que el radio deberá tener un valor de $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$ para utilizar la menor cantidad posible de material para la lata de pintura y con una altura de $2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 10{,}84$

Problema 4.2.6

Una pequeña isla está a $2km$ del punto más cercano A de una playa rectilínea de un gran lago. Si una mujer en la isla puede remar en un bote a $3km/h$ y caminar a $4km/h$. ¿En dónde debe desembarcar en el bote para llegar en el menor tiempo posible, a un pueblo que está a $10km$, medidas sobre la playa, del punto A?



Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Se analiza que el problema nos proporciona los siguientes datos:

La velocidad en que puede remar $3km = v_1$

La velocidad en que puede caminar $4km = v_2$

Se observa que el triángulo APB forma un triaángulo rectángulo, por lo cual el valor de $d_1 = \sqrt{4 + x^2}$.

La mujer debe tomar dos tramos para llegar al pueblo, los cuales son de P a B y de B a C, es así que se suma el tiempo que se demora en recorrer los dos tramos.

El tiempo del primer tramo $t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3}$.

El tiempo del segundo tramo $t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{10-x}{4}$.

Por lo cual la fórmula a trabajar será

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{10-x}{4}.$$

El dominio de $t(x)$ es $[0, 10]$, ya que la distancia entre A y B no puede ser mayor a 10.

Y el problema nos pide hallar la distancia de P a B para llegar en el menor tiempo posible.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar el menor tiempo posible debemos hallar los puntos críticos de $t(x)$ y evaluarlos en la función, al igual que los extremos del intervalo $[0{,}10]$. Es aí que el plan a seguir será:

1. Determinar $t'(x)$
2. Hallar los puntos críticos de $t(x)$
3. Evaluar los puntos críticosy los puntos $x = 0$, $x = 10$ en $t(x)$

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{10-x}{4}$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned}
t'(x) &= \left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}\right)' + \left(\frac{10-x}{4}\right)' && \text{, regla de la suma} \\
&= \frac{1}{3}(\sqrt{4+x^2})' + \frac{1}{4}(10-x)' && \text{, regla del multiplo constante} \\
&= \frac{1}{3}(\sqrt{4+x^2})' + \frac{1}{4}\left[(10)' - (x)'\right] && \text{, regla de la diferencia} \\
&= \frac{1}{3}\left((4+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' + \frac{1}{4}(-1) && \text{, regla de la función identidad y de la constante} \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}(4+x^2)'\right] - \frac{1}{4} && \text{, regla de la cadena y de la potencia} \\
&= \frac{1}{6}(4+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) - \frac{1}{4} && \text{, regla para la potencia y de una constante} \\
&= \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de $t(x)$

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{4} = 0 \\ &\frac{4x - 3\sqrt{x^2+4}}{12\sqrt{x^2+4}} = 0 \\ &4x - 3\sqrt{x^2+4} = 0 \end{aligned}$$

$$4x = 3\sqrt{x^2+4}$$

$$16x^2 = 9(x^2+4) \ \text{ elevamos al cuadrado}$$

$$16x^2 = 9x^2 + 36$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{7}} \approx 2{,}27$$

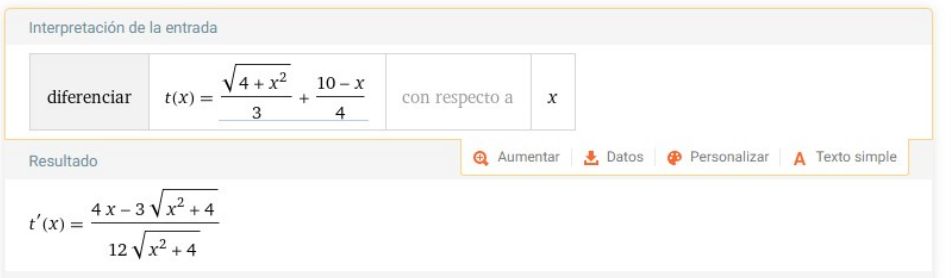
$t(x)$ tiene un punto crítico en $x = \frac{6}{\sqrt{7}} \approx 2{,}27$.

Por último, evaluaremos $x = \frac{6}{\sqrt{7}}$, $x = 0$ y $x = 10$ en $t(x)$

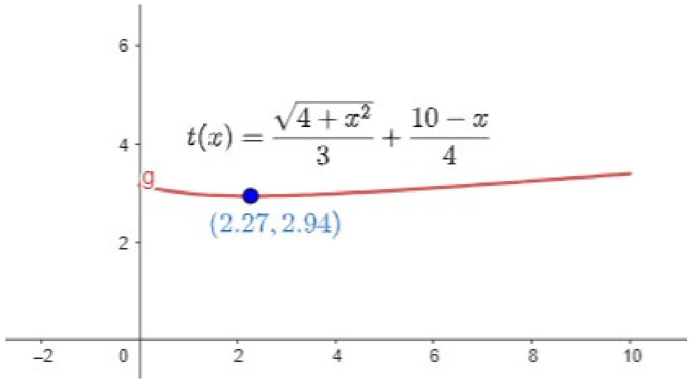
$$\begin{aligned} t\left(\frac{6}{\sqrt{7}}\right) &= \frac{\sqrt{4+\left(\frac{6}{\sqrt{7}}\right)^2}}{3} + \frac{10-\frac{6}{\sqrt{7}}}{4} \approx 2{,}94 \\ t(0) &= \frac{\sqrt{4+(0)^2}}{3} + \frac{10-0}{4} \approx 3{,}16 \\ t(10) &= \frac{\sqrt{4+(10)^2}}{3} + \frac{10-10}{4} \approx 3{,}4 \end{aligned}$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Utilizando el *software* Wolfram Alpha podemos verificar la derivada de la función $t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{10-x}{4}$



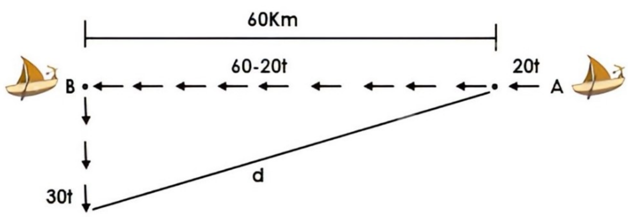
y utilizando el *software* GeoGebtra y graficando la función $t(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{10-x}{4}$ podemos verificar el punto mínimo en el intervalo $[0, 10]$



Verificamos mediante la gráfica que la mujer debe remar a un punto B que se localiza a $2{,}27km$ del punto A para llegar en el menor tiempo posible.

Problema 4.2.7

A las $7:00a.m.$, un barco estaba a $60km$ al este de un segundo barco. Si el primer barco maneja hacia el oeste a $20km/h$ y el segundo navega con rumbo al sur a $30km/h$. ¿A qué hora estarán más cerca el uno del otro?



Fase 1: Lectura y comprensión del problema

El problema nos proporciona los siguientes datos:

La velocidad del barco A $\quad v_1 = 20km/h = 20t$

La velocidad del barco B $\quad v_2 = 30km/h = 30t$

La distancia mínima en que estarán los dos barcos será

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{(30t)^2 + (60-20t)^2} = \sqrt{900t^2 + 3600 - 2400t + 400t^2} \\ &= \sqrt{1300t^2 - 2400t + 3600} \end{aligned}$$

ya que mediante la gráfica se puede observar que se forma un triángulo rectángulo.

El punto crítico de la función $d(t)$ coincide con el de la función $[d(t)]^2 = D(t)$.

Por lo cual la función que se irá a trabajar será

$$D(t) = 1300t^2 - 2400t + 3600.$$

Y el problema nos pide hallar el tiempo en el que ambos barcos estarán más cerca.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar el tiempo en que estén más próximos ambos barcos se tendrá que encontrar el mínimo de la función $d(t)$ utilizando el criterio de la segunda derivada. Es así, que el plan a seguir será:

1. Determinar $D'(t)$ y $D''(t)$
2. Hallar los puntos críticos de $D(t)$
3. Verificar si el punto crítico es un mínimo de la función
4. Hallar el tiempo en el cual estén más próximos ambos barcos

Fase 3: Construcción de la solución

Primero se tiene que la función $D(t) = 1300t^2 - 2400t + 3600$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} D'(t) &= (1300t^2)' - (2400t)' + (3600)', && \text{regla de la suma y diferencia de funciones} \\ &= 2600t - 2400 && \text{, regla para la potencia y de la constante} \end{aligned}$$

y para hallar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} D''(t) &= (2600t)' - (2400)', && \text{regla de la direncia de funciones} \\ &= 2600 && \text{, regla de la función identidad y de la constante.} \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos crítico de $D(t)$

$$\begin{aligned} D'(t) = 2600t - 2400 &= 0 \\ 2600t &= 2400 \end{aligned}$$

$$t = \frac{12}{13} \approx 0{,}923$$

$D(t)$ tiene un punto crítico en $t = \frac{12}{13}$.

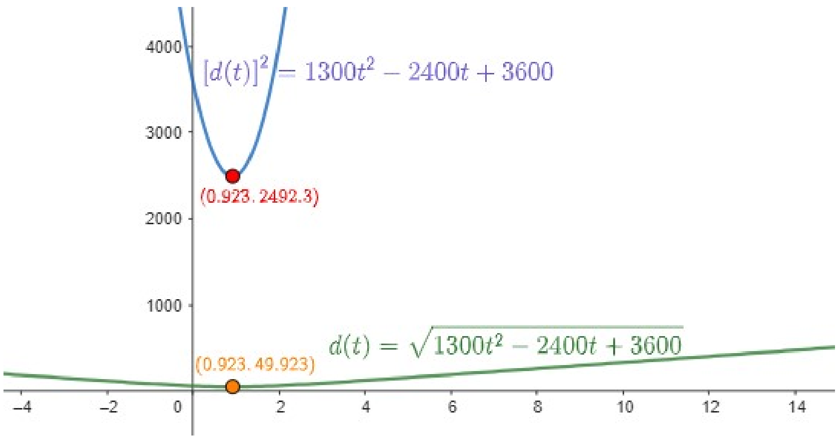
Tercero por el criterio de la segunda derivada cuando $t = \frac{12}{13}$ se tiene un valor mínimo de la función $D(t)$, ya que $D''(\frac{12}{13}) > 0$.

Por último, encontramos el tiempo en que los barcos están más cerca.

Si 1 hora es igual a 60 minutos, entonces $\frac{12}{13}$ de hora es $55{,}38$ minutos. Es así que, los barcos estarán más cerca a las $7:55a.m.$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Utilizando el *software* GeoGebra podemos verificar que el punto crítico (el punto mínimo) de $d(t)$ es igual al de $D(t) = [d(t)]^2$.



Por lo cual los barcos estarán má cerca a las $7:55am$

Problema 4.2.8

Un alambre de $100cm$ de largo se corta en dos pedazos, un pedazo se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿En dónde se debe hacer el corte si a suma de las dos áreas debe ser la mínima?

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Se analiza que el problema nos proporciona los siguientes datos:

El largo del alambre $100cm$

Si se corta en un punto x del alambre para formar el cuadrado se tiene que los lados del cuadrado serán $l_c = \frac{x}{4}$ y los lados del triángulo equilátero serán $l_t \frac{100-x}{3}$, por lo cual, podemos hallar la fórmula de la suma del área de las dos figuras

$$\begin{aligned} A(x) = A_c + A_t = (l_c)^2 + \left(\frac{l_t^2\sqrt{3}}{4}\right) &= \left(\frac{x}{4}^2\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{100-x}{3}\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(100-x)^2. \end{aligned}$$

La función sobre la cual se trabajará será

$$A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(100-x)^2 \quad \text{y su dominio será el intervalo [0,100]}$$

Y el problema nos pide hallar el área mínima de la suma de ambas figuras.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar el área mínima de la suma de ambas figuras, se debe hallar el punto crítico de $A(x)$ y evaluarlos en la funci

on al igual que los extremos del intervalo $[0, 100]$. Es así que el plan a seguir será:

1. Determinar $A'(x)$
2. Hallar los puntos críticos de $A(x)$
3. Evaluar los puntos críticos y los puntos $x = 0$, $x = 100$ en $A(x)$

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(100-x)^2$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} A'(x) &= \left(\frac{x^2}{16}\right)' + \left(\frac{\sqrt{3}}{36}(100-x)^2\right)' && \text{, regla de la suma de funciones} \\ &= \frac{2x}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}[(100-x)^2]' && \text{, regla del múltiplo constante y para la potencia} \\ &= \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{3}}{36}(2)(100-x)(100-x)' && \text{, regla de la cadena} \\ &= \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}(100-x)(-1) && \text{, regla de la función identidad} \\ &= \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{18}(100-x). \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de $A(x)$

$$
\begin{aligned}
A'(x) &= \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{18}(100-x) = 0 \\
\frac{x}{8} &= \frac{\sqrt{3}}{18}(100-x) \\
9x &= 4\sqrt{3}(100-x) \\
x(9+4\sqrt{3}) &= 400\sqrt{3} \\
x &= \frac{400\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \approx 43{,}5
\end{aligned}
$$

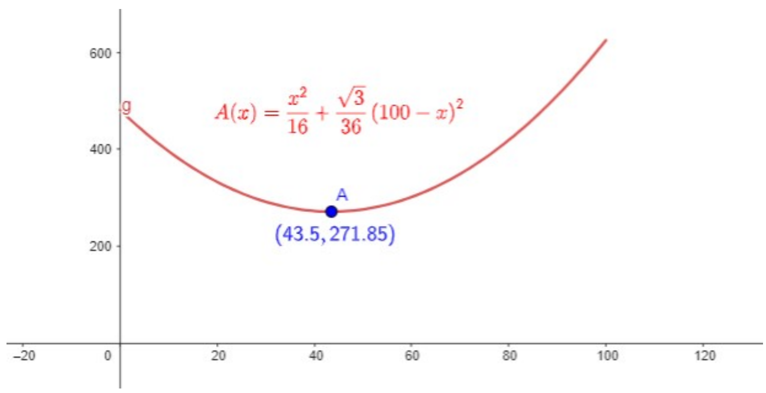
$A(x)$ tiene un punto crítico en $x \approx 43{,}5$

Por último, evaluaremos los puntos $x = 43{,}5$, $x = 0$ y $x = 100$ en la función $A(x)$

$$
\begin{aligned}
A(43{,}5) &= \frac{(43{,}5)^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(100-43{,}5)^2 = 271{,}85 \\
A(0) &= \frac{(0)^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(100-0)^2 = 481{,}125 \\
A(100) &= \frac{(100)^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(100-100)^2 = 625
\end{aligned}
$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Utilizando el *software* GeoGebra y graficando la función $A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(100-x)^2$ podemos verificar el punto mínimo en el intervalo $[0, 100]$



El corte de un lado de la cuerda para que la suma de las dos áreas sea la mínima deberá ser de $43{,}5cm$

Problema 4.2.9

Hay dos patrullas de policías a $8Km$ de distancia entre sí, un carro pasa la primera patrulla y el oficial le toma una lectura de radar de $5km/h$. Seis minutos más tarde, el segundo oficial le toma una lectura de $48km/h$. Demuestre que el carro tuvo que haber excedido el límite de $55km/h$ en algún momento

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Al analizar el problema se tiene los siguientes datos:

Si tomamos que $t_1 = 0$ es el momento donde el carro pasa a la primera patrulla, entonces el momento donde pasa a la segunda patrulla será en $t_2 = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ y denotamos $d(t)$ la función que representa la distancia recorrida.

El problema nos pide hallar si el carro ha excedido el límite de velocidad que es $55km/h$.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para determinar si excedió el límite de velocidad en algún momento dentro de los seis minutos, podemos utilizar el teorema del valor medio. Es así que el plan a seguir será:

1. Analizar los valores de $d(0)$ y $d\left(\frac{1}{10}\right)$
2. Hallar la velocidad promedio del carro
3. Analizar si excedió el límite de velocidad

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, analizaremos los valores $d(0)$ y $d\left(\frac{1}{10}\right)$, ya que $d(t)$ representa la distancia recorrida en un tiempo t, y al ser $t_1 = 0$ el momento que el carro pasa la primera patrulla se tiene que

$$d(0) = 0 = d_1$$

Ya que $t_1 = \frac{1}{10}$ representa el momento que el carro pasa a segunda patrulla que está a una distancia de $8km$, entonces se tiene que

$$d\left(\frac{1}{10}\right) = 8 = d_2$$

Segundo, la fórmula de velocidad promedio es igual a

$$V_p = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{8 - 0}{\frac{1}{10}} = 80$$

Por último, asumiendo que la función de posición $d(t)$ es diferenciable, entonces al aplicar el teorema del valor medio, existe un $t \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$ tal que $d'(t) = 80$, y se sabe que la derivada de la posición con respecto al tiempo es la velocidad, se tiene que el carro si excedió el límite de velocidad.

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

En este problema no es necesario la utilización de algún *software*, y como conclusión del problema se tiene que el carro si excedió el límite de velocidad de $55km/h$ en algún momento dentro de los seis minutos.

Problema 4.2.10

El Producto Interno Bruto (PIB) de un país viene dado de la siguiente manera

$$R(t) = \frac{\sqrt{7t^2 + 8}}{4t + 5}$$

después del año 2017. ¿A qué razón porcentual de cambio tuvo el PIB con respecto al año 2021?

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Analizando el problema tenemos los siguientes datos:

El tiempo $t = 4$

La función $R(t) = \frac{\sqrt{7t^2+8}}{4t+5}$

La fórmula que utilizaremo será la de la razón de cambio porcentual, cuál es la siguiente

$$100\,\frac{R'(t)}{R(t)}$$

Y el problema nos pide hallar cuál es la razón de cambio porcentual del PIB con respecto a los cuatro años.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar la razón de cambio porcentual en el transcurso de los cuatro años tenemos que evaluar $t = 4$ en las funciones $R(t)$ y $R'(t)$. Es así que el plan a seguir será:

1. Determinar $R'(t)$
2. Evaluar $R'(15)$ y $R(15)$
3. Hallar el valor del cambio de razón porcentual del PIB

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $R(t) = \frac{\sqrt{7t^2+8}}{4t+5}$ por lo cual para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$
\begin{aligned}
R'(t) &= \frac{(\sqrt{5t^2+8})'(4t+5) - (\sqrt{5t^2+8})(4t+5)'}{(4t+5)^2} && \text{, regla del cociente} \\
&= \frac{(\frac{1}{2}(5t^2+8)^{-\frac{1}{2}}(5t^2+8)')(4t+5) - (\sqrt{5t^2+8})(4)}{(4t+5)^2} && \text{, regla de la cadena} \\
&= \frac{\frac{(10t)(4t+5)}{2\sqrt{5t^2+8}} - 4\sqrt{5t^2+8}}{(4t+5)^2} && \text{, regla para la potencia} \\
&= \frac{\frac{20t^2+25t-4(5t^2+8)}{\sqrt{5t^2+8}}}{(4t+5)^2} \\
&= \frac{20t^2+25t-20t^2-32}{\sqrt{5t^2+8}\,(4t+5)^2} \\
&= \frac{25t-32}{\sqrt{5t^2+8}\,(4t+5)^2}
\end{aligned}
$$

Segundo, evaluaremos $R'(4)$ y $R(4)$

$$
\begin{aligned}
R'(4) &= \frac{25(4)-32}{(4(4)+5)^2\sqrt{5(4)^2+8}} \approx 0{,}02 \\
R(4) &= \frac{\sqrt{5(4)^2+8}}{4(4)+5} \approx 0{,}45
\end{aligned}
$$

Por último hallaremos el cambio de razón porcentual, el cual es

$$
100\frac{R'(4)}{R(4)} = 100\frac{0{,}02}{0{,}45} = \frac{40}{9} = 4{,}44
$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Mediante el *software* Wolfram Alpha podemos verificar la derivada de la función $R(t)$

Derivada

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{5t^2+8}}{4t+5}\right) = \frac{25t-32}{(4t+5)^2\sqrt{5t^2+8}}$$

La razón de cambio porcentual en los cuatro años fue de $4{,}44\,\%$ del PIB

Problema 4.2.11

Se bombea gas a un globo esférico a razón de $6m^3/min$. Si la presión es constante. ¿Cuál es la velocidad con la que cambia el radio del globo cuando el diámetro mide $120cm$?

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Al analizar el problema se obtiene los siguientes datos:

El volumen del globo $V = \frac{4}{3}r^3$.

Ya que se bombea el globo a razón de $6m^3/min$ se tiene

$$6t = \frac{4}{3}r^3.$$

De esta ecuación se pueden obtener la función del tiempo $t(r)$ y la función del radio $r(t)$

$$t(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 * \frac{1}{6} = \frac{2}{9}\pi r^3$$
$$r(t) = \sqrt[3]{\frac{9t}{2\pi}}$$

y el problema nos pide hallar la velocidad con la que el radio del globo cambia cuando el diámetro mide $120cm$.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar la función de la velocidad se debe derivar la función del radio con respecto al tiempo y para encontrar el valor de la velocidad se debe hallar el tiempo el que el diámetro del globo mide $120cm$. Es así, que el plan a seguir será:

1. Encontrar el tiempo cuando el diámetro del globo alcanza $120cm$
2. Determinar $r'(t)$
3. Encontrar el valor de la velocidad

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, si el diámetro del globo mide $120cm$, entonces el radio mide $60cm$ o $0{,}6m$, por lo cual evaluaremos $t(r)$ cuando $r = 0{,}6$

$$t(0{,}6) = \frac{2}{9}\pi(0{,}6) \approx 0{,}15$$

en el minuto $0{,}15$ el diámetro del globo es $120cm$.

Segundo, se tiene que la función $r(t) = \sqrt[3]{\frac{9t}{2\pi}}$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

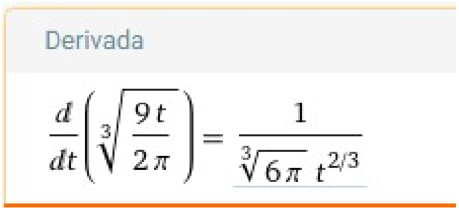
$$\begin{aligned} r'(t) &= \left(\sqrt[3]{\frac{9t}{2\pi}}\right)' = \left(\frac{3^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)' \\ &= \frac{3^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2\pi}}(\sqrt[3]{t})', \text{ regla del múltiplo constante} \\ &= \frac{3^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2\pi}}\frac{1}{3}(t)^{-\frac{2}{3}}, \text{ regla para la potencia} \\ &= \frac{3^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2\pi}}\frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{6\pi}t^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Por último, evaluaremos $t = 0{,}15$ en $r'(t)$ para encontrar la velocidad en que el diámetro mide $120cm$.

$$r'(0{,}15) = \frac{1}{\sqrt[3]{6\pi}(0{,}15)^{\frac{2}{3}}} \approx 1{,}33$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Mediante el *software* Wolfram Alpha podemos verificar la derivada de $r(t)$



La velocidad con la que cambia el radio del globo cuando el diámetro mide $120cm$ es de $1{,}33m/min$.

Problema 4.2.12

Usted quiere hacer una caja rectangular abierta con una cartulina de $8cm$ por $15cm$, cortando las esquinas cuadradas congruentes y doblando hacia arriba los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que puede hacer de esta manera con el mayor volumen y cuál es su volumen?

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Al analizar el problema se obtiene los siguientes datos:

Las dimensiones de la caja serán

el ancho $a = 8 - 2x$

el largo $l = 15 - 2x$

la altura $h = x$

donde x representa la longitud del corte que se realizará.

Es así, que la función con la cual se trabajará será la del volumen de la caja

$$V = alh = (8 - 2x)(15 - 2x)(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$$

y el dominio de la función será el intervalo $(0, 4)$ ya que x no puede ser negativa ni mayor a 4.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar la longitud de x para obtener el máximo volumen debemos hallar el máximo de la función $V(x)$ utilizando el criterio de la segunda derivada. Es así que el plan a seguir será:

1. Determinar $V'(x)$ y $V''(x)$
2. Hallar los puntos críticos de $V(x)$
3. Determinar si los puntos críticos son máximos de la función $V(x)$
4. Hallar el volumen de la caja y sus dimensiones

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$ por lo cual, para halar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} V(x) &= (4x^3)' - (46x^2)' + (120x)', \text{ regla de la suma y diferencia de funciones} \\ &= 12x^2 - 92x + 120 \qquad \text{, regla para la potencia} \end{aligned}$$

y para halar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} V''(x) &= (12x^2)' - (92x)' + (120)', \text{ regla de la suma y diferencia de funciones} \\ &= 24x - 92 \qquad \text{, regla para la potencia y de la constante} \end{aligned}$$

Segundo, hallamos los puntos críticos de $V(x)$

$$\begin{aligned} V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 &= 0 \\ 4(x-6)(3x-5) &= 0 \quad \text{factoreo} \\ (x-6)(3x-5) &= 0 \end{aligned}$$

$V(x)$ tiene un punto crítico en $x = \frac{5}{3} \approx 1{,}66$ en el intervalo $(0, 4)$.

Tercero, determinar si $x = \frac{5}{3}$ es un máximo de la función $V(x)$

$$V''\left(\frac{5}{3}\right) = 24\left(\frac{5}{3}\right) - 92 = -52$$

por el criterio de la segunda derivada cuando $x = \frac{5}{3}$ se tiene un máximo de la función $V(x)$.

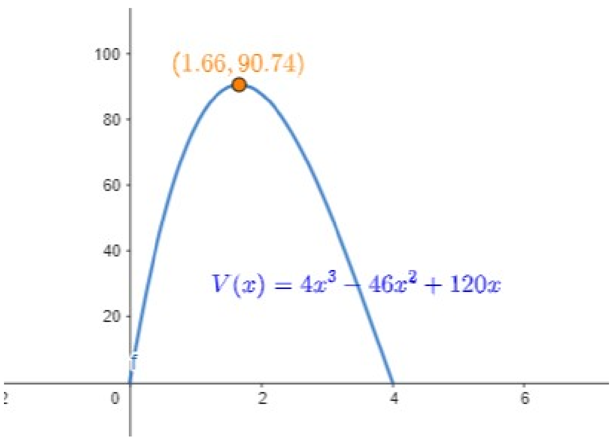
Por último, determinaremos el volumen de la caja y sus dimensiones

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 4\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 46\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 120\left(\frac{5}{3}\right) \approx 90{,}74$$
$$a = 8 - 2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{14}{3}$$
$$l = 15 - 2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{35}{3}$$
$$h = \frac{5}{3}$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Mediante el *software* GeoGebra podemos verificar el máximo de la función

$V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$ en el intervalo $0, 14$



Las dimensiones de la caja para tener el mayor volumen debe ser de $\frac{5}{3}cm$ de altura, $\frac{14}{3}cm$ de ancho y $\frac{35}{3}cm$ de largo y su volumen será de $90{,}74cm^3$.

Problema 4.2.13

Una parcela rectangular en una granja tendrá límites, por un lado, por un río, y por los otros tres mediante una cerca electrificada con un solo alambre. Sí se cuenta sólo con $800cm$ de alambre. ¿Cuál es la mayor área que puede ocupar la parcela y cuáles son sus dimensiones?

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Al analizar el problema se obtiene los siguientes datos:

Ya que solo se cuenta con $800cm$ de alambre para encerrar la parcela y uno de los lados ya está delimitado, se tiene que
el ancho de la parcela $a = x$
el largo de la parcela $l = 800 - 2x$.
La función sobre el cual se irá a trabajar será la del área

$$A(x) = al = x(800 - 2x) = 800x - 2x^2$$

y el problema nos pide hallar la mayor área posible y cuáles serán sus dimensiones.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar la mayor área que puede ocupar la parcela, utilizaremos el criterio de la segunda derivada. Es así que el plan a seguir será:

1. Determinar $A'(x)$ y $A''(x)$
2. Hallar los puntos crítico de $A(x)$
3. Determinar si los puntos críticos son un máximo de la función
4. Determinar el área y las dimensiones de la parcela

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $A(x) = 800x - 2x^2$ por lo cual, para determinar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} A'(x) &= (800x)' - (2x^2)', && \text{regla de la diferencia de funciones} \\ &= 800 - 4x && \text{, regla de la función identidad y para la potencia} \end{aligned}$$

y para determinar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} A''(x) &= (800)' - (4x)', && \text{regla de la diferencia de funciones} \\ &= -4 && \text{, regla de la constante y de la función identidad.} \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de la función $A(x)$

$$A'(x) = 800 - 4x = 0$$
$$800 = 4x$$
$$x = 200$$

$A(x)$ tiene un punto crítico en $x = 200$.

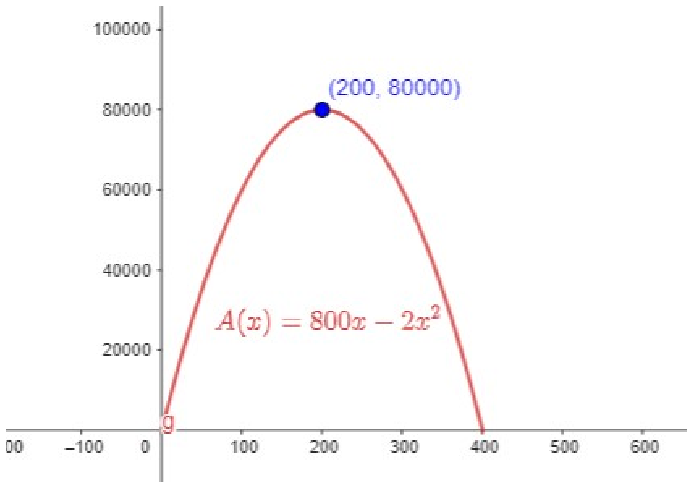
Tercero, como se tiene que $A''(200) < 0$ entonces $x = 200$ es un máximo de la función $A(x)$ por el criterio de la segunda derivada.

Cuarto, para determinar el área y las dimensiones de la parcela se tiene que

$$A(200) = 800(200) - 2(200)^2 = 80000$$
$$a = 200$$
$$l = 800 - 2(200) = 400$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Mediante el *software* GeoGebra podemos verificar el máximo de la función $A(x) = 800x - 2x^2$



La mayor área que puede ocupar la parcela será de $80000m^2$ y tendrá un ancho de $200m$ y un largo de $400m$.

Problema 4.2.14

Un sembradió rectangular de cacao mide $216m^2$; se quiere encerrar con una cerca, y dividirla en dos partes iguales mediante otra cerca paralela a uno de los lados. ¿Que dimensiones del rectángulo exterior requiere la menor longitud total de la cerca? ¿Cuánta cerca se requerirá?

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Al analizar el problema se obtiene los siguientes datos:

El área del rectángulo exterior $A = xy = 216m^2$

El perímetro de la cerca utilizada $P = 2x + 3y$.

De la ecuación del área se puede despejar y sustituir en la del perímetro

$$A = xy = 216 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{216}{y}$$

$$P = 2\left(\frac{216}{y}\right) + 3y = \frac{432}{y} + 3y = \frac{432 + 3y^2}{y}.$$

La función sobre la cual se irá a trabajar será

$$P(y) = \frac{432 + 3y^2}{y}$$

y el problema nos pide hallar las dimensiones del rectángulo exterior con la menor longitud posible y cuanta cerca se utilizará.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar las dimensiones del rectángulo exterior con la menor longitud posible, se debe hallar el mínimo de la función $P(y)$. Es así, que el plan a seguir será:

1. Determinar $P'(y)$ y $P''(y)$
2. Hallar los puntos críticos de $P(y)$
3. Determinar si el punto crítico es un mínimo de la función $P(y)$
4. Determinar las dimensiones del rectángulo exterior y el valor de la cerca utilizada

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $P(y) = \frac{432+3y^2}{y}$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} P'(y) &= \left(\frac{432}{y} + \frac{3y^2}{y}\right) \\ &= \left(\frac{432}{y}\right)' + (3y)', \text{ regla de la suma de funciones} \\ &= -\frac{432}{y^2} + 3 \qquad \text{, regla de la función identidad y para la potencia} \end{aligned}$$

y para hallar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} P''(y) &= (3)' - \left(\frac{432}{y^2}\right)' \text{, regla de la diferencia de funciones} \\ &= \frac{864}{y^3} \qquad \text{, regla de la constante y para la potencia.} \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de $P(y)$

$$\begin{aligned} P'(y) = 3 - \frac{432}{y^2} &= 0 \\ 3 &= \frac{432}{y^2} \\ y &= \pm\sqrt{144} = \pm 12 \end{aligned}$$

$P(y)$ tiene un punto crítico en $y = 12$ ya que no existe dimensiones negativas.

Tercer, determinaremos si $y = 12$ es un mínimo de la función $P(y)$

$$P''(12) = \frac{864}{(12)^3} = \frac{29}{108}$$

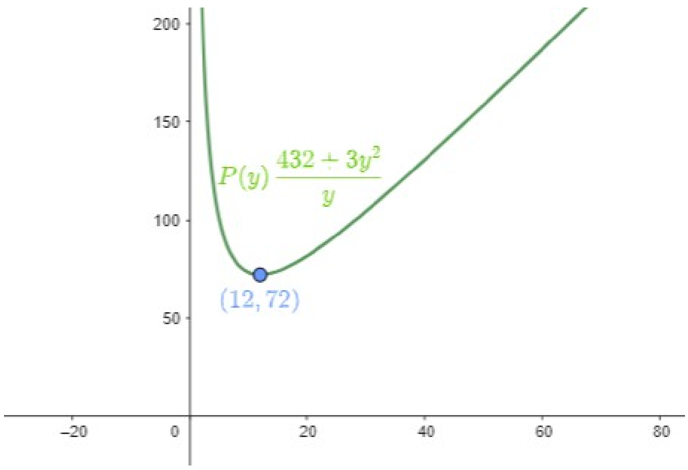
por el criterio de la segunda derivada $y = 12$ es un mínimo de la función $P(y)$.

Por último, encontraremos las dimensiones del rectángulo exterior y el valor de la cerca usada

$$\begin{aligned} x &= \frac{216}{12} = 18 \\ P(12) &= \frac{432 - 3(12)^2}{12} = 72 \end{aligned}$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Utilizando el *software* GeoGebra podemos verificar el mínimo de la función $P(y) = \frac{432-3y^2}{y}$.



Las dimensiones del cuaderno exterior será de $78m$ de largo y $12m$ de ancho y se utilizará un total de $72m$ de cerca.

Problema 4.2.15

El número de dólares del costo total de fabricación de x relojes en una fábrica está dado por

$$C(x) = 1500 + 3x + x^2$$

Determinar la cantidad de relojes que minimiza el coste promedio. Calcular el coste total y el coste promedio mínimo.

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Al analizar el problema se obtiene los siguientes datos:

La función del coste total de producción $C(x) = 1500 + 3x + x^2$, por lo cual la función del coste promedio de producción es

$$C_p(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1500 + 3x + x^2}{x} = \frac{1500}{x} + 3 + x$$

por lo cual la función obre la cual se irá a trabajar, será la función del coste promedio de producción

$$C_p(x) = \frac{1500}{x} + 3 + x$$

y el problema nos pide hallar la cantidad de relojes que minimice los costos de producción y determinar el coste total de producción y el coste promedio de producción.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar la cantidad de relojes con el cual se minimice el coste promedio de producción se debe hallar el mínimo de la función $C_p(x)$. Es así que el plan a seguir será:

1. Determinar $C_p'(x)$ y $C_p''(x)$
2. Encontrar los puntos críticos de C_p
3. Determinar si los puntos críticos es un mínimo de la función C_p
4. Calcular el coste promedio mínimo y el coste de producción total

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la función $C_p(x) = \frac{1500}{x} + 3 + x$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} C_p'(x) &= \left(\frac{1500}{x}\right)' + (3)' + (x)', \text{ regla para la suma de funciones} \\ &= -\frac{1500}{x^2} + 1 \qquad\qquad \text{, regla para la potencia y de la constante} \end{aligned}$$

y para hallar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} C_p(x) &= (1)' - \left(\frac{1500}{x^2}\right)' \text{, regla de la diferencia de funciones} \\ &= \frac{3000}{x^3} \qquad\qquad \text{, regla de la constante y para la potencia} \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de $C_p(x)$

$$\begin{aligned} C_p'(x) = 1 - \frac{1500}{x^2} &= 0 \\ 1 &= \frac{1500}{x^2} \\ x &= \sqrt{1500} \approx 38{,}73 \approx 39 \end{aligned}$$

Tercero, determinaremos si $x\sqrt{1500}$ es un mínimo de la función

$$C_p''(\sqrt{1500}) = \frac{3000}{\left(\sqrt{1500}\right)^3} \approx 0{,}052$$

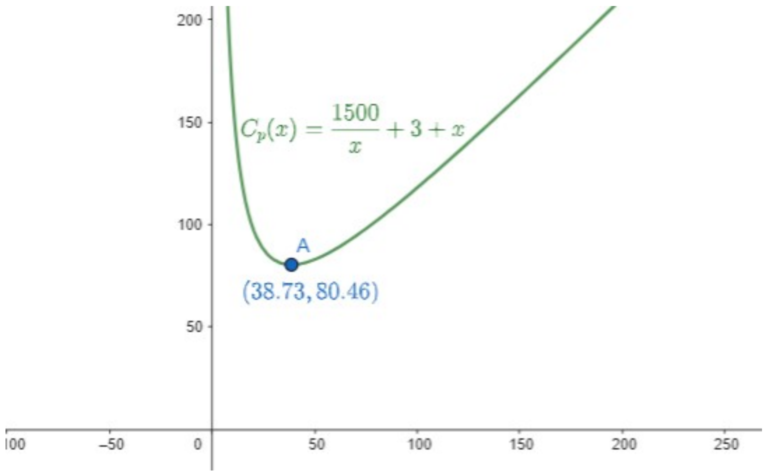
por el criterio de la segunda derivada $x = \sqrt{1500}$ es un mínimo de la función $C_p(x)$

Por último, para determinar el coste promedio mínimo y el coste tota de producción utilizaremos $x = 39$ ya que no es posible fabricar $38{,}73$ relojes

$$C_p(39) = \frac{1500}{39} + 3 + 39 \approx 80{,}46$$
$$C(39) = 1500 + 3(39) + (39)^2 = 3138$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Mediante el *software* GeoGebra se puede verificar el mínimo de la función $C_p(x) = \frac{1500}{x} + 3 + x$



La cantidad de fabricación de relojes que minimice el coste promedio es de 39 relojes, el costo promedio será de $80{,}46\$$ por reloj y el costo total de producción será de $3138\$$

Problema 4.2.16

Hallar las dimensiones de un campo de deportes que tiene un perímetro de $100m$, para que su área sea máxima, con forma de rectángulo coronado por dos semicírculos

Fase 1: Lectura y comprensión del problema

Analizando el problema se tiene los siguientes datos:

El perímetro de un rectángulo coronado por dos semicírculos es

$$P = 2\pi r + 2x = 100 \ \Rightarrow \ x = \frac{100 - 2\pi r}{2}$$

donde x representa los lados del rectángulo y r el radio de los semicírculos.

El área del campo será

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 + 2\pi x = \pi r^2 + 2r\left(\frac{100 - 2\pi r}{2}\right) = \pi r^2 + 100r - 2\pi r^2 \\ &= 100r - \pi r^2 \end{aligned}$$

la formula con la cual se irá a trabajar será la del área del campo de deporte

$$A(r) = 100r - \pi r^2$$

y el problema nos pide hallar el área maxíma del campo de deporte, así como sus dimensiones.

Fase 2: Búsqueda y estudio de las herramientas matemáticas

Para hallar el área máxima que puede tener el campo, se tiene que encontrar el punto máximode la función $A(r)$. Es así que el plan a seguir será:

1. Determinar $A'(r)$ y $A''(r)$
2. Hallar los puntos críticos de $A(r)$
3. Determinar si los puntos críticos es un máximo de la función $A(r)$
4. Hallar el área del campo y sus dimensiones

Fase 3: Construcción de la solución

Primero, se tiene que la funcíon $A(r) = 100r - \pi r^2$ por lo cual, para hallar la primera derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} A'(r) &= (100r)' - (\pi r^2)', \text{ regla de la diferencia de funciones} \\ &= 100 - 2\pi r \qquad , \text{ regla de la función identidad y para la potencia} \end{aligned}$$

y para hallar la segunda derivada se sigue los siguientes pasos

$$\begin{aligned} A''(r) &= (100)' - (2\pi r)', \text{ regla de la diferencia de funciones} \\ &= -2\pi \qquad , \text{ regla de la constante y de la función identidad} \end{aligned}$$

Segundo, encontraremos los puntos críticos de $A(r)$

$$\begin{aligned} A'(r) = 100 - 2\pi r &= 0 \\ 100 &= 2\pi r \\ r &= \frac{50}{\pi} \end{aligned}$$

$A(r)$ tiene un punto crítico en $r = \frac{50}{\pi}$.

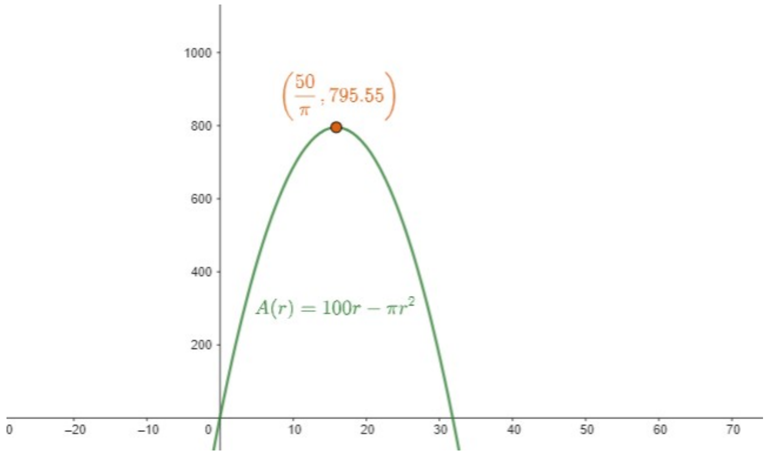
Tercero, como se tiene que $A''\left(\frac{50}{\pi}\right) < 0$ entonces $r = \frac{50}{\pi}$ es un maáximo de la función $A(r)$ por el criterio de la segunda derivada.

Por último, hallaremos el área del campo y sus dimensiones

$$\begin{aligned} A\left(\frac{50}{\pi}\right) &= 100\left(\frac{50}{\pi}\right) - \pi\left(\frac{50}{\pi}\right)^2 \approx 795{,}77 \\ x &= \frac{100 - 2\pi\left(\frac{50}{\pi}\right)}{2} = 0 \end{aligned}$$

Fase 4: Verificación de resultados apoyado en herramientas tecnológicas

Mediante el *software* GeoGebra podemos verificar el máximo de la función $A(r) = 100r - \pi r^2$



El área máxima del campo es de $795{,}55m^2$ y sus dimensiones serán de $\frac{50}{\pi}m$ de radio y de $0m$ de largo, es decir, tendrá forma de un círculo el campo de deportes.

Bibliografía

Blanco, L. J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon*, 49-60.

Foong, P. Y. (2002). The role of problems to enhance pedagogical practices in the Singapore mathematics classroom. *6*(2), 15-31. http://hdl.handle.net/10497/52

Garcıa, W. E. V., & Rodrıguez, L. M. V. (2015). Software educativo para lograr aprendizajes significativos en el área de matemática. *UCV-HACER: Revista de Investigación y Cultura*, *4*(2), 38-45.

González Ramírez, T. (2000). Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: un estudio evaluativo. *Revista de Investigación Educativa*, *18*(1), 175-199. https://revistas.um.es/rie/article/view/121541

Krulik, S., & Rudnick, J. (1988). *Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers.* ERIC.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. *Acquisition of mathematics concepts and processes*.

Marqués, P. (1996). El software educativo. *J. Ferrés y P. Marqués, Comunicación educativa y Nuevas Tecnologıas*, 119-144.

Martínez Padrón, O. J. (2021). El afecto en la resolución de problemas de Matemática. *RECIE. Revista Caribeña de Investigación Educativa*, *5*(1), 86-100. https://doi.org/10.32541/recie.2021.v5i1.pp86-100

Meneses Osorio, M. C., & Artunduaga Gutiérrez, L. (2014). Software educativo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el grado 6. https://repositorio.ucm.edu.co/handle/10839/838

Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas* (inf. téc.). Trillas México.

Quintero, H., Portillo, L., Luque, R., & González, M. (2005). Desarrollo de software educativo: una propuesta metodológica. *Telos*. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=99318837004

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving* (1.ª ed.). London: Academic Press. Inc.

Segovia, I., & Rico, L. (2001). Didáctica de la matemática en la educación primaria. *Editorial Síntesis*, *86*.

Vázquez González, C. (2004). Reflexiones y ejemplos de situaciones didácticas para una adecuada contextualización de los contenidos cientıficos en el proceso de enseñanza. *Universidad de Cádiz/Asociación de Profesores Amigos de la Ciencia Eureka*. http://hdl.handle.net/10498/16438

espoch | Dirección de Bibliotecas y Recursos del Aprendizaje

UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y DOCUMENTAL

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 07 / 12 / 2023

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: Fernando Daniel Panta Vásquez
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemático
f. Analista de Biblioteca responsable: Ing. Rafael Inty Salto Hidalgo

1970-DBRA-UPT-2023