



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

ESTUDIO DE SERIES DE FOURIER Y ALGUNAS APLICACIONES

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: MARCO VINCIO PARRA CHÁVEZ

DIRECTOR: MSC. RAMÓN ANTONIO ABANCÍN OSPINA

Riobamba – Ecuador

2023

©2023, Marco Vinicio Parra Chávez

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Marco Vinicio Parra Chávez, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 10 de Noviembre de 2023



Marco Vinicio Parra Chávez


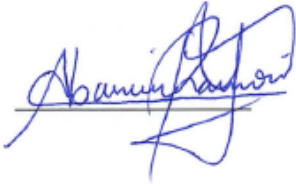

060402659-1

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación, **ESTUDIO DE SERIES DE FOURIER Y ALGUNAS APLICACIONES**, realizado por el señor: **MARCO VINICIO PARRA CHÁVEZ**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Ms.C. María Palacios Robalino PRESIDENTE DEL TRIBUNAL		2023-11-10
Ms.C. Ramón Abancín Ospina DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2023-11-10
Ms.C. Carlos Cova Salaya ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2023-11-10

DEDICATORIA

A mi amada esposa, mis queridos hijos y toda mi familia querida.

En este emocionante momento de mi vida al culminar mi trabajo final de titulación en la ESPOCH, deseo dedicar este logro con todo mi corazón a cada uno de ustedes. Vuestra presencia constante, cariño incondicional y apoyo incansable han sido mi mayor fortaleza en este camino.

Cada paso dado, cada desafío superado, lo he hecho con el amor y la esperanza de brindarles un futuro lleno de oportunidades y alegrías. Vuestro aliento ha sido la inspiración que me impulsó a nunca rendirme, recordándome que no estaba solo en este trayecto.

Hoy, con la satisfacción de alcanzar esta meta, quiero reafirmar mi compromiso de seguir creciendo y aprendiendo junto a ustedes. Este logro no es solo mío, sino también de cada uno de ustedes que ha sido mi sostén en los momentos de dificultad.

Gracias por ser mi mayor motivación y por creer en mí, los amo con todo mi corazón.

Con cariño y dedicación

Marco

AGRADECIMIENTO

Mi Gratitude a Dios Todopoderoso y a La Virgen Santísima por acompañarme siempre con sus bendiciones; por permitir que mis seres más amados se encuentren junto a mí.

A mi abuelita Betty, ñaño Tito y a mi mamá Martha, por el apoyo incondicional que me supieron dar, gracias por los sabios consejos en los momentos más difíciles.

A mi esposa Anita por su paciencia, apoyo, entrega y colaboración.

A mis hijos amados Panchito y Rafita, por ser el motor y fuente principal de inspiración de mi diario vivir.

A mi hermano por alentarme constantemente.

A mis compañeros y amigos de estudio, en especial a Jess, Fer, Belén y Joel que por muchos años me han enseñado valores que me han ayudado a crecer y compartir con ellos momentos inolvidables.

A toda mi familia y a quienes compartieron conmigo los días de esfuerzo y sacrificio, mil gracias, sus nombres quedan grabados en mi corazón.

Y un especial agradecimiento a mi Director de Trabajo de Integración Curricular (TIC), McS. Ramón Abancín, que confió plenamente en mí durante todo el desarrollo del TIC, su apoyo inquebrantable, sus palabras de aliento, sus valiosas correcciones y sugerencias fueron fundamentales para cumplir tan anhelado objetivo.

Marco

ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN	ix
ABSTRACT	x
INTRODUCCIÓN	1
 CAPÍTULO I	
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	4
1.1. Planteamiento del problema	4
1.2. Objetivos	4
1.3. Justificación	5
 CAPÍTULO II	
2. MARCO TEÓRICO	6
2.1. Aspectos fundamentales de las series de Fourier	6
2.2. Series de Fourier	6
2.3. Algunas aplicaciones de las series de Fourier	6
 CAPÍTULO III	
3. MARCO METODOLÓGICO	8
3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación empleadas	8
 CAPÍTULO IV	
4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	11
4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados	11
4.2. Discusión	13
 CAPÍTULO V	
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	14
5.1. Conclusiones	14

5.2. Recomendaciones 15

BIBLIOGRAFÍA

ANEXO

RESUMEN

El tema series de Fourier no forma parte del plan de estudios de pregrado de matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). Situación común en varias Instituciones de Educación Superior en Ecuador que ofrecen estos programas, pero no así en las facultades de ingeniería, donde es un tema esencial para su formación. El objetivo de esta investigación documental es proporcionar un documento referencial integral para estudiantes de la ESPOCH interesados en el estudio de las series de Fourier. Así, la metodología adoptada es cualitativa no interactiva con un alcance descriptivo, centrada en la revisión y análisis de fuentes documentales. Esto permitió recopilar información de fuentes bibliográficas, incluyendo libros clásicos y actualizados, para comprender los conceptos teóricos y aplicaciones de las series de Fourier. Como resultado, se desarrolló un documento referencial que proporciona una base sólida para el estudio de las series de Fourier, destacando definiciones, teoremas, proposiciones, lemas y propiedades; asimismo, ejemplos de problemas didácticos de aplicaciones en contextos reales, que pueden enriquecer la formación académica de los estudiantes de la carrera de matemática y, así como, lo suficientemente flexible para ser adaptado por carreras de ingenierías. Concretamente, este documento se organiza en tres módulos como una estrategia efectiva para abordar el estudio de las series de Fourier. El primero establece conceptos preliminares para brindar una base sólida; mientras que, el segundo se adentra en el desarrollo teórico y, finalmente, el tercero dedicado a presentar algunas aplicaciones, mostrando la relevancia práctica en diversos campos. En conclusión, el documento referencial representa un aporte sustancial tanto para la carrera de Matemática como para aquellas que contemplan el estudio de Series de Fourier en la ESPOCH, principalmente para los estudiantes que quieran introducirse al estudio de las series de Fourier, con hincapié en aprendices con miras a realizar estudios de profundización, estudios de cuarto nivel y actividad docente enfocado al estudio de Series de Fourier.

Palabras clave: <SERIES DE FOURIER>, <CONVERGENCIA>, <CONDICIÓN DE DIRICHLET>, <FUNCIONES PERIÓDICAS>, <COEFICIENTES DE FOURIER>, <APLICACIONES>.

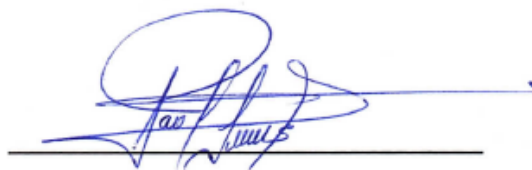
1995-DBRA-UPT-2023

A handwritten signature in blue ink is written over a circular stamp. The signature is cursive and appears to read 'J. P. ...'. The stamp is faint and circular, with some illegible text inside.

ABSTRACT

Fourier series is not part of the undergraduate Mathematics curriculum at Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). This is a common situation in several Higher Educational Institutions in Ecuador that offer these programs, different from the engineering faculties, in which this is an essential topic for the professional training. The aim of this documentary research is to provide an integral and referential document for the students from ESPOCH, who are interested in the study of Fourier series. Thus, the methodology used is qualitative non-interactive with a descriptive scope and focused on the review and analysis of documentary sources. This allowed gathering information from bibliographic sources, including classic and updated books, to understand the theoretical concepts and applications of Fourier series. As a result, a referential document was created to provide a solid basis for the study of Fourier series, highlighting definitions, theorems, propositions, lemmas and properties, as well as examples of didactic problems for applications in real contexts, which can improve the academic training of mathematics students. On the other hand, it must be flexible enough to be adapted for engineering majors. This paper is specifically organized in three modules as an effective strategy to approach the study of Fourier series. The first one establishes preliminary concepts to provide a solid foundation, while the second one deepens the theoretical development and finally, the third one presents some applications on the practical relevance in several fields. In conclusion, the referential document represents a substantial contribution both for the mathematics major and for those who consider the study of Fourier Series at ESPOCH, mainly for students who want to be introduced to the study of Fourier series, especially for those learners with a view to carry out in-depth studies, fourth level studies and teaching activities focused on the study of Fourier Series.

Keywords: <FOURIER SERIES>, <CONVERGENCE>, <DIRICHLET'S CONDITION>, <PERIODIC FUNCTIONS>, <FOURIER COEFFICIENTS>, <APPLICATIONS>.



Lic. Paul Rolando Armas Pesantez Mgs.

060328987-7

INTRODUCCIÓN

Las series llevan el nombre de su descubridor el matemático francés Joseph Fourier (1768-1830), quien las introdujo cuando estudiaba la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{donde } \alpha \text{ es una constante que pertenece al conjunto de los } \mathbb{R}.$$

Para ese entonces fue utilizada para ayudar a resolver dicha ecuación; mientras que, ahora las series de Fourier son la representación matemática de una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua,

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(w_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}(w_0 kt), \quad a_0, a_k, w_0, b_k, t \in \mathbb{R}.$$

Con esto las series de Fourier se convierten en una herramienta matemática indispensable para el análisis de funciones periódicas por medio de la descomposición en sumas infinitas de funciones trigonométricas (en términos de seno y coseno).

Desde su descubrimiento, las series de Fourier han sido un tema relevante tanto dentro del campo de la matemática como en otros dominios académicos, puesto que tienen muchas áreas de aplicación, como por ejemplo la desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^m (Rosales, 2020), la desigualdad de Wirtinger (González, 2017), del mismo modo, también se hacen presentes en óptica (Goodman, 2005), acústica (Kinsler, 2000), procesamiento de señales (Tomasi, 2003) ya sean de audio, video o simplemente imágenes; así como, para el estudio de vibraciones (Hildreth, 1974), compresión de datos (Barrado, 2017), entre otras; con mayor presencia, en el campo de la ingenierías, especialmente en las señales de telecomunicaciones (Tomasi, 2003).

En este sentido, a ilustración concreta de una aplicación de las series de Fourier en el mundo real es: el formato MP3 (MPEG Audio Layer III, cuyas siglas en inglés hacen referencia a *Moving Picture Experts Group*, nombre colocado al grupo de estándares ISO para audio y video), por lo general es asociado con la música. Pero detrás de este formato, está el procesamiento de señales de audio, donde se toma un sonido, al cual se asocia una serie de Fourier, y lo más probable es una serie infinita, la cual converge tan rápido que, el tomar los primeros términos es suficiente para reproducir el sonido original, el resto de términos se pueden ignorar porque pasan desapercibidos para el oído humano. Por ello se guarda solo los primeros términos y se utiliza para reproducir el sonido, optimizando la memoria del dispositivo de almacenamiento.

Con lo expuesto anteriormente, se evidencia la existencia de una diversidad de aplicaciones

tanto interesantes como relevantes de las series de Fourier para diferentes áreas del conocimiento, cristalizando aportes sustanciales para las sociedades actuales. Es esta relevancia de sus aplicaciones la que muchas veces hace que sea apreciada y valorada por otras áreas del conocimiento, como el campo de las ingenierías, por ejemplo; mientras que, los programas de Matemática de pregrado (tercer nivel) se concentran en el mejor de los casos solo en los aspectos teóricos, dejando de lado la parte práctica para el siguiente nivel académico como una maestría o un doctorado (títulos de cuarto nivel), siendo estos últimos niveles donde se puede estudiar formalmente el tema de las series de Fourier y la gama de herramientas que este tema puede ofrecer para resolver problemas prácticos.

En este sentido, Di Bárbaro *et al.* (2014) menciona que la enseñanza y el aprendizaje de las series de Fourier representan un desafío, especialmente debido a la necesidad de contar con sólidos conocimientos teóricos previos. De igual forma Cabral *et al.* (2013) afirman que el aprendizaje de las series de Fourier en los programas de estudio de pregrado deben ser comprensible y preciso, a pesar de eso, señala que resulta difícil de comprender para los estudiantes debido a la naturaleza gráfica de las funciones generadas por otras funciones y su resolución.

Es así que, dentro de este contexto aquellos aprendices afortunados de estudiar el tema de series de Fourier a nivel de pregrado, trae consigo dificultades latentes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Entre algunas de estas cabe mencionar: a) Aplicaciones de temas previos como: funciones trigonométricas, noción de convergencia de funciones, comprensión de sumas infinitas, diferenciar entre funciones par o impar, comprender las propiedades de las funciones periódicas como frecuencia, período, fase, amplitud. Particularmente, lo que significan y cómo se relacionan entre sí, etc; y b) No se logra una eficiente comprensión teórica, particularmente las herramientas que las series de Fourier ofrece debido a la carencia de aplicabilidad en la resolución de problemas contextualizados.

Ambas dificultades están latentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema de series de Fourier, a pesar que Romero *et al.* (2015) afirman que, el estudio y la práctica en series de Fourier, proporcionan al educando una serie de ventajas que van desde un marco exclusivo del pensamiento hasta las experiencias diarias vitales, a fin de involucrar al alumno en un proceso de construcción del conocimiento. Asimismo Ortiz (1998), considera que las series de Fourier es adecuada para ser enseñada en el pregrado universitario pues se conjugan una serie de ideas matemáticas fundamentales que son manejables y, sobre todo, que su enseñanza y aprendizaje sirve para motivar la aplicación de la matemática a muchas diversas áreas.

En síntesis, ambos autores concuerdan en la relevancia y ventajas que puede traer estudiar el tema

de series de Fourier, tanto desde la perspectiva teórica como práctica desde los estudios de pregrado. Finalmente, el presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el capítulo I aborda el problema de investigación, con la finalidad de definir la problemática de estudio, se plantearon los objetivos tanto general como específicos ya previstos, quienes permitieron el desarrollo de la investigación. Por último, se presentó la justificación en dicho apartado, se dieron a conocer los motivos que permitieron sustentar la importancia de la investigación. En el capítulo II, se expuso un marco conceptual con miras a la comprensión del problema de investigación, sustentado en libros clásicos, investigaciones afines y artículos científicos, los cuales sentaron las bases teóricas para la investigación.

Mientras que en el capítulo III, se procedió a describir el enfoque metodológico utilizado, así como su alcance y el diseño de investigación, sumado a esto, se detalló las técnicas e instrumentos utilizados para la investigación. El capítulo IV, se enfocó en el marco de análisis e interpretación de resultados, presentando la creación del documento referencial basado en la investigación teórica y la información recopilada durante el estudio. El capítulo V, se centró en las conclusiones y recomendaciones, ofreciendo un resumen conciso de los resultados más significativos, contribuyendo a la finalización coherente del Trabajo de Integración Curricular. Finalmente, se completa el trabajo con la inclusión de una detallada lista de fuentes bibliográficas que desempeñaron un papel fundamental en la creación y desarrollo del documento referencial.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

De acuerdo al pensum de varias Instituciones de Educación Superior (IES) en el Ecuador, es común que el estudio de las series de Fourier se reserve para las facultades de Ingenierías, pero no así para las carreras de matemática. Esto último, particularmente, se evidencia en la malla curricular de la carrera de matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), donde el tema de series de Fourier no está estipulado para su estudio durante el programa de formación académica de pregrado. Es así, que su estudio se posterga posiblemente para los programas de postgrados.

1.2. Objetivos

Objetivo general

Estudiar en detalle el tema de series de Fourier, mediante una revisión documental, para estructurar un documento referencial principalmente para los estudiantes de la ESPOCH que deseen introducirse en su estudio.

Objetivos específicos

- Realizar una investigación subjetiva sobre la teoría de series de Fourier, a través del análisis de fuentes académicas y literatura especializada para recopilar información esencial sobre su historia, desarrollo matemático y aplicaciones en diversas disciplinas.
- Definir la estructura y contenido del documento referencial sobre series de Fourier, mediante la determinación de los apartados tales como introducción, fundamentos teóricos, cálculos de coeficientes, aplicaciones en distintas áreas, conclusiones que resalten la relevancia y amplitud de su aplicabilidad.
- Seleccionar ejemplos representativos que ilustren la aplicación de series de Fourier en contextos reales, identificando las áreas del conocimiento donde las series de Fourier son relevantes, para analizar en detalle cómo estas herramientas resuelven problemas específicos.
- Redactar un documento referencial que combine claridad y coherencia al presentar el riguroso tema de series de Fourier, utilizando un lenguaje accesible, ejemplos y gráficos, para enriquecer la

comprensión cómo estas series tienen un impacto en diversas áreas del conocimiento, enlazando la teoría con ejemplos concretos de uso en la práctica.

1.3. Justificación

Dada la importancia de las series de Fourier principalmente por su gama de aplicaciones en contextos reales, tener la posibilidad de introducirse a su estudio desde pregrado abre un abanico de posibilidades, principalmente como una adición complementaria a la formación académica de un futuro matemático, así como, la posibilidad de adquirir nociones básicas con respecto al tema que posibilitará la incorporación a un programa de cuarto nivel o ampliar su campo docente y de investigación en las carreras de ingenierías.

El documento referencial derivado de la presente investigación será un aporte sustancial a la carrera de matemática de la ESPOCH, principalmente para aquellos estudiantes que quieran introducirse al estudio de las series de Fourier y algunas aplicaciones, con hincapié en aquellos aprendices con miras a realizar estudios de cuarto nivel y actividad docente en carreras como ingenierías, por ejemplo.

Bajo esa premisa, el documento referencial también hará un aporte relevante a la comunidad académica de ingeniería, especialmente a las carreras de mecánica, electricidad, electrónica y telecomunicaciones de la ESPOCH, el cual servirá como una guía para orientar a los estudiantes, permitiéndole desarrollar habilidades, además fomentando el crecimiento y progreso en el ámbito educativo profesional.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

El desarrollo de las series de Fourier ha tenido una notable trascendencia en matemática, principalmente en la comprensión de las señales periódicas y sus propiedades. Su fácil adaptabilidad, le permite ser utilizada en diferentes aplicaciones, especialmente en los campos del conocimiento de las ciencias y las ingenierías. En ese sentido, estas series presentan propiedades interesantes tales como la capacidad de aproximar funciones periódicas y continuas, mediante la suma finita de funciones suaves como los senos y cosenos.

2.1. Aspectos fundamentales de las series de Fourier

Después de una revisión bibliográfica selectiva focalizada en los aspectos necesarios para abordar el estudio previo a series de Fourier, se eligieron los siguientes autores: Apostol (2006), Rivera (2014), Hwei (1970), Spiegel (1976), Stein (2003), Zill (2012) y Olson (2017); los cuales permitieron estructurar el siguiente cuerpo de conocimientos: Notación de conjuntos, notación de derivadas parciales, ortogonalidad, funciones periódicas, Riemann integrable, funciones continuas por intervalos, funciones par e impar, convergencia, y por último propiedades de las funciones seno y coseno.

Es importante destacar que las temáticas mencionadas anteriormente, fueron desarrolladas tanto teórica como práctica en el documento referencial. Para más detalles ver anexo.

2.2. Series de Fourier

De forma análoga, como en la sección 2.1 anterior, la selección bibliográfica se enfocó en los aspectos esenciales para el desarrollo del tema series de Fourier, en razón de ello, se seleccionaron los siguientes autores: O'neil (2012) y Folland (1992); permitiendo contemplar los siguientes apartados: Origenes de la serie de Fourier, serie de Fourier de una función, convergencia de la serie de Fourier y condiciones de Dirichlet o de existencia. En este sentido, se recomienda ver anexos para obtener información a detalle.

2.3. Algunas aplicaciones de las series de Fourier

Por último pero no menos importante, y de igual tenor que en las secciones anteriores, se procedió con la selección bibliográfica enfocada para tratar el desarrollo de las aplicaciones que tiene las

series de Fourier, se seleccionaron los siguientes autores, Tomasi (2003), Barrado (2007), y Hildreth (1974); dando paso a la obtención de distintas aplicaciones. En ese sentido, cabe mencionar que las aplicaciones fueron presentadas y resueltas en el documento referencial. Para una visión más completa, consultar el anexo adjunto.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

En este capítulo se expondrán los mecanismos utilizados para alcanzar el propósito de este trabajo. Concretamente, se mostrará el enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación empleadas para la realización del presente estudio.

Primero, el presente trabajo tuvo un enfoque metodológico cualitativo no-interactivo con alcance descriptivo y un diseño de investigación documental. Según Creswell (2014) la investigación cualitativa no-interactiva corresponde a un tipo de método de investigación que se enfoca en analizar fuentes de datos como documentos escritos, videos o registros históricos, entre otros. En este sentido, este tipo de investigación, la recolección de datos se realizó mediante la revisión y análisis de materiales e información ya existentes, sin la participación activa del investigador en el proceso de la recolección de datos.

Por lo que, la investigación cualitativa no-interactiva se justifica en el Trabajo de Integración Curricular sobre el estudio de Series de Fourier y algunas Aplicaciones, puesto que se recopiló información de fuentes bibliográficas tales como: libros clásicos y actualizados como base de investigación que, permitieron obtener una comprensión profunda de los conceptos teóricos y aplicaciones relacionados con las series de Fourier. Así como también, su evolución a lo largo del tiempo en la literatura académica.

Por otro lado, Sampieri (2014) refiere al alcance descriptivo como la descripción detallada y minuciosa de un fenómeno o tema en particular, que incluye tanto sus características como su funcionamiento y otros aspectos relevantes. Por consiguiente, resultó adecuado el uso del alcance descriptivo en el Trabajo de Integración Curricular sobre el estudio de Series de Fourier y algunas Aplicaciones, puesto que permitió la descripción de como, funciones con discontinuidades en sus derivadas pueden ser representadas en la suma de funciones suaves como los senos y cosenos. Así pues, esta descripción tuvo importancia para comprender sus propiedades y aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento.

Además, Ferreira da Silva (2006) menciona que el diseño de investigación documental, planifica y organiza un proceso de investigación que involucra la búsqueda, selección, revisión, análisis y

síntesis de información documental relevante para la comprensión y resolución de un problema de investigación en particular. Lo que evidencia que este diseño de investigación se utiliza cuando los objetivos de investigación requieren el estudio de información ya existente en fuentes documentales, como libros, artículos, informes, sin involucrar la recolección de datos mediante instrumentos como cuestionarios o entrevistas.

Así, el uso del diseño de investigación documental en el Trabajo de Integración Curricular entorno al tema Series de Fourier y algunas aplicaciones, fue la mejor alternativa para su desarrollo, ya que abarcó la búsqueda, selección, revisión y análisis de documentación relevante que permitió, la creación de un documento referencial que abarcó el estudio en detalle del tema a tratar, para los estudiantes de las carreras de ingeniería y matemática de la ESPOCH.

Segundo, para alcanzar el propósito planteado de la investigación se propuso realizar las siguientes etapas utilizando la técnica de análisis de datos documental:

- a) Revisión bibliográfica que implicó la verificación y extracción relevante de información sobre el tema de series de Fourier que se encuentra disponible en la *Web*, principalmente, en buscadores académicos como *Google Scholar*, *Academia.edu*, *Redalyc*, entre otras.
- b) Proceso de selección y elección bibliográfica que permitan el correcto desarrollo del tema de investigación, y apoyen así mismo a la presentación de algunas aplicaciones.
- c) Organizar los contenidos de series de Fourier derivados de la revisión, selección y elección bibliográfica.
- d) Elaboración y redacción del documento referencial sobre el estudio de series de Fourier y algunas aplicaciones, enfocado principalmente para los estudiantes de la ESPOCH, particularmente de las carreras de ingeniería y matemática.

En otras palabras, las técnicas de análisis de datos documental, recopiló y evaluó la información relevante presentada en documentos previamente existentes en el proceso de investigación, ya sea en forma física o digital, con la extracción de datos a partir de la información obtenida.

Finalmente tercero pero no menos importante, con respecto a los instrumentos de investigación utilizados se pueden mencionar:

- Computador, debido a que en la actualidad se ha convertido en una herramienta muy útil, y aun más, en el campo de la investigación, puesto que permite realizar una amplia variedad de tareas, como revisión de literatura, recopilación de datos, y presentación de resultados; permitiendo al investigador acceder a la información, de manera más eficiente y con mayor precisión que los métodos tradicionales. También permitió una colaboración y comunicación más fácil entre los miembros del equipo de investigación y la posibilidad de compartir información y resultados en

línea.

- Internet, debido a que actualmente la Internet ofrece motores de búsquedas académicas tales como *Google Scholar*, *Redalyc*, entre otros; que facilitaron la indagación y recopilación de información para los procesos de investigación científica. Esto permitió la selección y elección de información sobre el tema de series de Fourier y algunas aplicaciones de forma rápida y con amplia cobertura de la bibliografía disponible con respecto al tópico.
- Motores de búsqueda, o también conocidos como buscadores de información, permitieron acceder a una gran cantidad de recursos y fuentes de datos de manera rápida y eficiente.
- \LaTeX , puesto que es un *software* editor de texto, que brinda herramientas que facilitaron la escritura del documento de Trabajo de Integración Curricular y Referencial. Esto se debe a que proporciona comandos para la creación de fórmulas matemáticas, citas bibliográficas, entre otras; permitiendo presentar un documento acorde a la escritura matemática.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos sobre el estudio de series de Fourier y algunas aplicaciones, mediante las técnicas adecuadas como el análisis subjetivo de la selección y elección de fuentes bibliográficas, las cuales permitieron respaldar la elaboración del Trabajo de Integración Curricular junto al documento referencial.

4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados

En el ámbito de la creación de un documento referencial acerca de las series de Fourier, se aborda un proceso meticuloso y estructurado en la selección, análisis e interpretación de literatura especializada en series de Fourier, proceso que se enfoca en garantizar la pertinencia de los contenidos presentados, asegurando una comprensión precisa del tema en cuestión.

La primera etapa del proceso implica la selección y elección subjetiva de textos, donde la elección se basa en la relevancia temática, la autoridad de los autores y el aporte de los contenidos. Se priorizan textos que aborden tanto los conceptos fundamentales como las aplicaciones prácticas de las series de Fourier, asegurando su comprensión.

Una vez completada la selección y elección, se procede al análisis de la literatura pertinente. En esta fase, se realiza una lectura crítica de cada texto, extrayendo definiciones, teorías, lemas, ejemplos y aplicaciones específicas relacionados con las series de Fourier. Además, se evalúa la coherencia de los argumentos presentados en los textos, identificando similitudes y discrepancias entre ellos.

El análisis también implica que los textos deben alinearse con los objetivos del documento referencial, por lo cual son sometidos a evaluaciones más exhaustiva para determinar su idoneidad y relevancia. Este proceso garantiza que solo la literatura más pertinente sea incorporada en la fase de interpretación.

La interpretación, fase final del proceso, involucra la síntesis y comprensión integral de la literatura analizada. Aquí, se entrelazan las ideas y conceptos provenientes de diversas fuentes para construir una perspectiva coherente e integrada del tema, estableciendo conexiones entre los distintos enfoques presentados en la literatura. Permitiendo una comprensión más profunda de las definiciones, lemas, ejemplos y aplicaciones de las series de Fourier.

En última instancia, la cristalización del documento referencial es el resultado directo de la selección,

análisis e interpretación de la literatura. Los conceptos, teorías y aplicaciones se organizaron de manera coherente en una estructura que guía a los estudiantes desde los conceptos preliminares hasta la comprensión avanzada. Dando paso, como principal resultado la estructura del documento referencial como sigue a continuación:

Introducción

Módulo I

1. Preliminares

1.1 Objetivo del módulo

1.2 Jean Baptiste Joshep Fourier

1.3 Aspectos básicos

1.3.1 Notación de conjuntos: números naturales, números enteros y números reales

1.3.2 Notación de derivadas parciales

1.3.3 Ortogonalidad

1.3.4 Funciones periódicas

1.3.5 Riemann integrable

1.3.6 Funciones continuas por intervalos

1.3.7 Función par y función impar

1.3.8 Convergencia

1.3.9 Propiedades de las funciones seno y coseno: funciones ortogonales

Módulo II

2. Series de Fourier

2.1 Objetivo del módulo

2.2 Origenes de la serie de Fourier

2.3 Serie de Fourier de una función

2.4 Convergencia de la serie de Fourier

2.5 Condiciones de Dirichlet o de existencia

Módulo III

3. Algunas aplicaciones

3.1 Objetivo del módulo

3.2 Ecuación del calor

3.3 Serie de Fourier para una forma de onda rectangular

3.4 Sistema rectificador no controlado

4.2. Discusión

Este apartado detalla la distribución de la bibliografía y las aplicaciones en el estudio de las series de Fourier, siendo nuestro principal tema de relevancia para estudiantes, académicos y personas interesadas en esta herramienta matemática. Un enfoque adecuado en la estructura del documento referencial puede enriquecer significativamente el aprendizaje del tema, proporcionando una visión integral y aplicaciones prácticas.

La organización teórica ofrece definiciones claras con ejemplos ilustrativos y conceptos preliminares sustentados en libros especializados en el tema. Al presentar los conceptos de manera organizada y progresiva, los estudiantes de la ESPOCH pueden desarrollar una comprensión profunda llegando a conectar los aspectos teóricos con aplicaciones prácticas.

En cuanto a las aplicaciones, la estructura del documento aborda casos prácticos relevantes en algunas áreas del conocimiento como son las telecomunicaciones, electrónica de potencia y física. Destacando estas aplicaciones, el documento referencial muestra la utilidad de las series de Fourier en problemas contextualizados al mundo real.

La elección de organizar el documento referencial en tres módulos demuestra ser una estrategia efectiva para abordar comprehensivamente el estudio de las series de Fourier. En el primer módulo, los conceptos preliminares establecen un cimiento sólido, asegurando que los estudiantes tengan el trasfondo necesario. El segundo módulo, centrado en el desarrollo teórico de las series de Fourier, profundiza en los aspectos fundamentales, siendo una guía desde los fundamentos hasta un entendimiento más avanzado. El tercer módulo, dedicado a las aplicaciones, cierra el ciclo al demostrar la relevancia práctica de las series de Fourier en diversos campos, proporcionando un enfoque práctico y completo en el aprendizaje de este tema.

Finalmente, el aporte que tiene el documento referencial sobre las series de Fourier es valioso para las carreras de matemática e ingenierías de la ESPOCH, permitiendo el aprendizaje significativo y aplicable. Su enfoque organizado en teoría y ejemplos brinda a los estudiantes una sólida formación, preparándolos para enfrentar retos académicos, profesionales sobre el tema de series de Fourier.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Con la culminación de este Trabajo de Integración Curricular se puede mencionar las siguientes conclusiones: primero, después de una revisión subjetiva de la literatura académica sobre las series de Fourier, se ha elaborado un documento referencial integral sobre este tema, recurso diseñado especialmente para estudiantes de la ESPOCH que buscan una introducción a detalle de este tema, la identificación de fuentes pertinentes y el análisis meticuloso de sus contenidos. Esto permitió la elaboración de un material donde se destaca conceptos esenciales con enfoques didácticos, proporcionando bases sólidas para el estudio y las aplicación de las series de Fourier.

Segundo, el estudio sistemático de las series de Fourier proporcionó una comprensión sólida de esta herramienta matemática. Mediante el análisis detallado de sus fundamentos teóricos y aplicaciones, se adquirió un conocimiento completo y estructurado sobre el tema, lo cual ha permitido sentar las bases para su futura aplicación en diversos campos de la ciencia y las ingenierías, aportando soluciones efectivas a problemas.

Tercero, la búsqueda y selección subjetiva de bibliografía pertinente, garantizó la confiabilidad y precisión de la información recopilada. Además, la elección de fuentes académicas permitió incorporar varias aplicaciones en el área de las series de Fourier. El riguroso proceso de selección bibliográfica aseguró que el documento referencial esté respaldado por información confiable y relevante, lo que enriquece su valor como recurso académico.

Cuarto, la organización sistemática de los contenidos derivados de la revisión bibliográfica facilita la asimilación de conceptos claves sobre series de Fourier. La estructura coherente del documento referencial ha permitido presentar la información de manera clara y accesible, promoviendo una comprensión progresiva del tema. Los ejemplos y demostraciones refuerzan el aprendizaje, permitiendo desarrollar la comprensión de las aplicaciones prácticas que posee las series de Fourier.

Finalmente, quinto, el documento referencial elaborado con base en los objetivos cumplidos representa una herramienta de formación académica complementaria para los estudiantes de la ESPOCH. Su enfoque didáctico y ordenado proporciona una visión integral de las series de Fourier y su relevancia en diversas áreas del conocimiento. Los ejemplos presentados fomentan el pensamiento crítico permitiendo desarrollar habilidades analíticas. En general, este documento

aporta significativamente al conocimiento y formación académica de los estudiantes, brindando una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas.

5.2. Recomendaciones

A continuación se presentan varias recomendaciones derivadas del análisis y la evaluación crítica realizados en el transcurso de esta investigación. Primero, para estudiar las series de Fourier de manera efectiva, es recomendable contar con sólidos conocimientos previos en matemáticas, especialmente en álgebra, cálculo y análisis matemático. Una comprensión fundamentada de estos conceptos facilitará el abordaje de las propiedades junto a los teoremas asociados con las series de Fourier, permitiendo una mayor profundidad en el análisis y aplicabilidad de esta herramienta.

Segundo, se recomienda que los estudiantes de pregrado de la carrera de matemática de la ESPOCH, consideren el estudio de las series de Fourier como parte de su formación académica, ya que la comprensión de las series de Fourier allana el camino para una comprensión más profunda de conceptos matemáticos complejos y proporciona una ventaja significativa en futuros estudios de postgrado o en el campo laboral.

Tercero, a los estudiantes que reciben la materia de series de Fourier, se les recomienda utilizar el documento referencial como una herramienta complementaria para su aprendizaje, ya que este recurso les permitirá consolidar su comprensión de los conceptos fundamentales, profundizar en las aplicaciones prácticas y adquirir una visión más integral de las series de Fourier.

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, T. *Análisis matemático introducción moderna al cálculo superior*. Loreto-Barcelona: Reverté, 2006. 84-291-5004-8, pp. 265-269.

BARRADO, A. *Problemas de Electrónica de Potencia*. Madrid-España: PEARSON EDUCACIÓN, S.A., 2007, pp. 10-17.

CABRAL, C.; et al. "Teaching of Fourier series expansions in undergraduate education." *2013 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)*, (2013), (Alemania) pp. 431-435.

CRESWEL, J. *Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches* [en línea]. 4^{ta} ed. California-USA: SAGE Publications, Inc, 2014. [Consulta: 13 abril 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=gX1ZDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

DI BÁRBARO, M.; et al "Contextualización del estudio de la convergencia para series de Fourier." *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, vol. 5, n^o 2 (2014), (Argentina) pp. 130-165.

FERREIRA DA SILVA, M. *Introducción a las técnicas cualitativas de investigación aplicadas en salud*. 1^{ta} ed. Barcelona-España: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 2006. pp. 74.

FOLLAND, G. *Fourier analysis and its applications*. Pacific Grove, California, United States of America: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1992, pp. 50-68.

GOODMAN, J. *Introduction to Fourier optics*. 3^{ra} ed. Roberts and Company Publishers, 2005, pp. 35-36

GÓNZALES, I. Evolutoides de curvas convexas y la propiedad pedal de la elipse. (Trabajo de titulación). (Maestría). Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería. Maestría en Matemáticas Aplicadas, Querétaro, México, 2017, pp. 39-40.

HILDRETH, H. *Circuitos en ingeniería eléctrica*. 6^{ta} ed. Tlalpan-México: COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A., 1974, pp. 519-522.

HWEI, H. *Análisis de Fourier*. Michigan-USA: Simon & Schuster, 1970. pp. 4-16.

KINSLER, L. *Fundamentals of acoustics*. 4^{ta} ed. John Wiley & Sons, 2000.

- OLSON, T.** *Applied Fourier analysis from signal processing to medical imaging*. Florida - USA.: Birkhäuser, 2017, pp. 19-24.
- O'NEIL, P.** *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 7^a ed. Alabama-USA: CENGAGE Learning, 2012. pp. 49-55.
- ORTÍZ, A.** “Ondículas:Un modelo de enseñanza en matemática (Reflexiones sobre la Enseñanza de la Matemática).” *Pro Mathematica*, vol. XII, n^o 4 (1998), (Perú) pp. 23-24.
- RIVERA, A.** *Cálculo integral sucesiones y series de funciones*. México-México D.F.: Patria, 2014. 978-607-438-900-5, pp.197-207.
- ROMERO, C.; et al** “Computer program for the education of the Fourier series of problems and contour teaching.” *Matua Revista del programa de Matemáticas*, vol. 2, n^o 2 (2015), (Colombia) pp. 38-47.
- ROSALES, C.** *El problema isoperimétrico* [blog]. Granada-España: Creative Commons, 2020 [Consulta: 08 abril 2023]. Disponible en: https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/80791/problema_isoperimetrico.pdf?sequence=1
- SAMPIERI, R.; et al.** *Metodología de la investigación*. 6^{ta} ed. Celaya-México: McGRAW-HILL / Interamericana Editores, S.A., 2014. ISBN 978-1-4562-2396-0 pp. 91-93.
- SPIEGEL, M.** *Teoría y problemas de análisis de Fourier*. Bogotá - Colombia: McGRAW-HILL, 1976, pp. 21-30.
- STEIN, E.** *Fourier analysis an introduction*. Princeton - USA.: Princeton University Press, 2012, pp. 478-480.
- TOMASI, W.** *Sistemas de comunicaciones electrónicas*. 4^{ta} ed. México: PEARSON EDUCACIÓN, 2003, pp. 22-26.
- ZILL, D.** *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 4^{ta} ed. México: McGrawHill Educación, 2012, pp. 478-480.



ANEXO

ANEXO A: DOCUMENTO REFERENCIAL “SERIES DE FOURIER Y ALGUNAS APLICACIONES”.



SERIES DE FOURIER

Y ALGUNAS
APLICACIONES

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

MARCO PARRA

2023

ESTUDIO DE SERIES DE FOURIER Y ALGUNAS APLICACIONES

Autor:
Marco Vinicio Parra Chávez

Riobamba, 2023

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Objetivo	1
1.2. Jean Baptiste Joseph Fourier	1
1.3. Aspectos básicos	4
1.3.1. Algunos conjuntos numéricos	4
1.3.2. Notación de derivadas parciales	6
1.3.3. Ortogonalidad	7
1.3.4. Funciones periódicas	10
1.3.5. Riemann integrable	13
1.3.6. Funciones continuas por intervalos	15
1.3.7. Función par e impar	16
1.3.8. Convergencia	18
1.3.9. Propiedades de las funciones seno y coseno	26
2. Series de Fourier	33
2.1. Objetivo	33
2.2. Orígenes y motivación de las Series de Fourier	33
2.3. La serie de Fourier de una función	37
2.4. Convergencia de serie de Fourier	52
2.4.1. Condiciones de Dirichlet o de existencia	55
3. Algunas aplicaciones	58
3.1. La serie de Fourier y la música	58
3.2. Electrocardiografía	60
3.3. La serie de Fourier en las ecuaciones diferenciales no ordinarias	64
3.3.1. La ecuación de calor; separación de variables	66
3.3.2. La ecuación de onda	72
3.4. Movimiento no amortiguado	75
3.5. Resonancia pura	80
3.6. Rectificador trifásico de media onda no controlado	81

3.7. Cálculo de la temperatura de la tierra	89
3.8. El problema isoperimétrico	90

Introducción

Las series de Fourier son una de las herramientas matemática más relevantes en el estudio de fenómenos periódicos. La capacidad de descomponer señales en una suma infinita de funciones trigonométricas ha permitido una mejor comprensión y análisis de diversos fenómenos físicos. En ese sentido, las áreas del conocimiento, tales como la Física, las Ingenierías en Electrónica, Telecomunicaciones, Electricidad, Automotriz, Mantenimiento Industrial y Mecánica han aprovechado su potencial. En la Física, las series de Fourier son utilizadas para analizar fenómenos oscilatorios con diferente periodicidad, por ejemplo en termodinámica, con el estudio de la ecuación del calor; la mecánica cuántica, donde las funciones de onda de partículas pueden ser descompuestas en series de Fourier, permitiendo predecir su comportamiento.

En las ingenierías como electrónica, telecomunicaciones y electricidad, es de suma importancia favoreciendo al análisis y síntesis de señales; por ejemplo, la modulación de señales de radio, donde las series de Fourier permiten descomponer una señal en diferentes frecuencias portadoras para transmitir información sin mucha atenuación; por otro lado, también presente en el diseño de circuitos electrónicos, en la optimización del comportamiento de los sistemas *MIMO* (cuyas siglas en inglés hacen referencia a *Multiple-Input Multiple-Output*).

Así mismo, las ingenierías mecánicas, tanto en el campo del mantenimiento industrial y en el de la automotriz, las series de Fourier encuentran aplicaciones en el análisis de vibraciones y el diagnóstico de fallos. Por ejemplo, al descomponer una señal de vibración en sus componentes de frecuencia, es posible identificar las frecuencias dominantes, detectar anomalías y desequilibrios en maquinarias o vehículos, permitiendo realizar mantenimientos predictivos, con el fin de garantizar el funcionamiento eficiente de los sistemas mecánicos.

Por tan importantes aplicaciones, se presenta este documento referencial, el cual está diseñado para permitir un panorama detallado de las series de Fourier, desde su desarrollo en el siglo XIX hasta algunas aplicaciones. A medida que se avanza en el presente trabajo, se exponen aspectos matemáticos y teóricos del tema de series de

Fourier, su uso en la solución de problemas prácticos y su importancia en la comprensión de diversos fenómenos físicos del entorno.

El documento referencial, se sintetiza en tres módulos para su mejor comprensión. En este contexto, el primer módulo abarcan los conceptos que anteceden al estudio de las series de Fourier tales como: notación de conjuntos de números naturales (\mathbb{N}), números enteros (\mathbb{Z}) y números reales (\mathbb{R}), así como la que se utiliza en derivadas parciales, definiciones de funciones periódicas, función par e impar, series infinitas, convergencia puntual y sucesión de sumas parciales. Cabe recalcar que los contenidos presentados en el primer módulo, pueden ser ampliados en las referencias: Apostol (2006), Rivera (2014), Hwei (1970), Spiegel (1976), Stein (2003), Zill (2012) y Olson (2017).

El segundo módulo, se enfoca al estudio y análisis del siguiente cuerpo de conocimientos: la serie de Fourier de una función, las condiciones de existencia y la evaluación de los coeficientes de Fourier. De la misma forma que en el primer módulo, los contenidos pueden ser ampliados en las referencias: O'neil (2012) y Folland (1992). Finalmente, el tercer módulo enfocado a la aplicabilidad de las series de Fourier en algunas aplicaciones, a manera de ejemplo se menciona la desigualdad de Wirtinger, la ecuación del calor, un sistema rectificador no controlado, etc. Las aplicaciones pueden ser ampliadas en las siguientes referencias: Tomasi (2003), Barrado (2007) y Hildreth (1974).

Como es de notar, el documento referencial puede utilizarse principalmente como una herramienta de apoyo para los estudiantes de matemática y de ingeniería de la ESPOCH que quieran introducirse al estudio de las series de Fourier, con hincapié en aprendices con miras a realizar estudios de profundización, estudios de cuarto nivel y actividad docente enfocado al estudio de Series de Fourier.

Módulo 1

Preliminares

1.1. Objetivo

Exponer y aclarar de manera explícita conceptos fundamentales previos al estudio de series de Fourier que se utilizarán a lo largo del documento, el cual permitirá la familiarización con el lenguaje, terminología e ideas que se utilizarán en los módulos posteriores. Para lograr este propósito, se abordarán los conceptos de manera didáctica, con una explicación sin confusiones en su interpretación, utilizando ejemplos para simplificar y contextualizar cada concepto, por lo tanto, esta parte del documento denominado Preliminares, permitirá comprender los dos módulos siguientes aprovechando plenamente su contenido.

1.2. Jean Baptiste Joseph Fourier

A continuación, a partir del trabajo de Dhombres y Robert (1998), se mostrará un panorama de los aspectos más relevantes de J. Fourier y sus aportes a la Matemática. En el siglo XVIII (1753) existieron varios problemas matemáticos, uno de ellos fue el conocido con el nombre del “problema de la cuerda vibrante”, problema estudiado por notables científicos de la época como D’Alembert (1717-1783), Euler (1707-1783) y Daniel Bernoulli (1700-1782). En ese sentido, Bernoulli realizó el estudio utilizando otras técnicas (usando el método de propagación de ondas), cuya solución dada por Bernoulli discordaba con los resultados de D’Alembert y de Euler. El resultado propuesto por Bernoulli consistía en dar solución al problema como superposición de ondas sencillas generalmente infinitas. Las ideas y resultados expuestos por Bernoulli, no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de D’Alembert y Euler quienes no admitían que cualquier función con una expresión analítica pudiera representarse de esa forma (superposición de

ondas sencillas).

Cincuenta y cuatro (54) años después en (1807) las ideas de Bernoulli fueron tomadas en cuenta por Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés, nació el 21 de marzo de 1768 en Auxerre, Francia. Proveniente de una familia modesta, mostró un extraordinario talento para las matemáticas desde temprana edad. Su educación y carrera comenzaron en el convento de *Saint-Marc* (San Marco), a pesar de las dificultades económicas, su pasión por el conocimiento lo llevó a obtener una educación sólida y, posteriormente, ingresó a la *École Normale Supérieure* (Escuela Normal Superior) en París.

Figura 1. Jean-Baptiste Joseph Fourier



Fuente: Pinterest

El destacado matemático alcanzó reconocimiento y prestigio en su vida profesional, permitiéndolo conocer a Napoleón Bonaparte a sus 30 años. Durante el gobierno de Napoleón, Fourier desempeñó un papel importante en su administración, llegando a ser prefecto de la comunidad de *Isère* en 1802, destacándose por sus conocimientos matemáticos y habilidades administrativas. Por tal motivo Napoleón mostró interés en sus estudios científicos, permitiéndolo incorporar la expedición hacia Egipto.

La razón detrás de la decisión de Napoleón de llevar a Fourier consigo a Egipto no está completamente documentada, pero hay algunas hipótesis y hechos históricos que pueden arrojar luz sobre esta elección. En primer lugar, es importante mencionar que la expedición a Egipto tenía objetivos militares y políticos, ya que Napoleón buscaba establecer una base de poder en el país y amenazar los intereses británicos en la región. Sin embargo, también tenía un componente científico y cultural, ya que se llevaron a numerosos artistas, arqueólogos, científicos y otros expertos para estudiar y documentar la antigua civilización egipcia.

Se cree que Fourier pudo haber sido seleccionado por Napoleón debido a su habilidad en matemáticas y su conocimiento en áreas como la física y la teoría del calor. Estas habilidades eran relevantes para las actividades científicas y técnicas necesarias en la expedición, como la cartografía, la topografía y la medición de las temperaturas y condiciones climáticas del desierto.

Durante la expedición, Fourier tuvo la oportunidad de aplicar sus conocimientos en la práctica y contribuir a los esfuerzos militares y científicos de la misión. Participó en labores de ingeniería, ayudando a establecer fortificaciones y planificando estrategias de defensa. Además, trabajó en proyectos de cartografía y topografía, creando mapas detallados de la región y estudiando la geografía del territorio.

Además de sus tareas científicas y técnicas, Fourier también pudo haber tenido una influencia política en la expedición. Se sabe que mantuvo una relación cercana con el líder francés y políticos que apoyaban las ideas de la Revolución Francesa. Es posible que esta relación personal y política haya sido un factor adicional para que Napoleón decidiera llevar a Fourier consigo a Egipto. Sin embargo, la expedición a Egipto no resultó tan exitosa como Napoleón había esperado. Aunque hubo algunos logros científicos y culturales significativos, como el descubrimiento de la famosa Piedra de Rosetta, las fuerzas francesas finalmente se retiraron de Egipto en 1801 debido a la derrota militar ante las fuerzas británicas y otomanas.

Después de la expedición de Egipto, J. Fourier regresó a Francia en 1801. A pesar de las dificultades y los desafíos políticos que enfrentó debido al cambio de gobierno en Francia, continuó dedicándose a sus estudios en matemática, permitiéndole el ingreso como profesor en el área de análisis matemático en la *École Polytechnique* (Escuela Politécnica) de Francia, allí se interesó por la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos. Donde propuso la ecuación (1.1) para analizar la distribución de temperatura a través de un cuerpo.

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(w_0kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}(w_0kt), \text{ para } a_0, a_k, w_0, b_k, t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

En su época J. Fourier no pudo demostrar con suficiente precisión matemática qué tipo de funciones periódicas podrían representarse por estas series. Sin embargo, tuvo la perspicacia de comprender el potencial de aplicación de la representación de funciones a través de series trigonométricas. Él sostenía que cualquier función periódica podría representarse por una serie de este tipo, debido a que, su trabajo se basó en ideas anteriores sobre vibraciones de una cuerda realizados por Euler en 1748 y Bernoulli en 1753.

El 21 de diciembre de 1807, J. Fourier, presentó al Instituto de Francia la memo-

ria titulada *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (Memoria sobre la propagación del calor en cuerpos sólidos). El documento planteado por J. Fourier fue revisado por cuatro matemáticos de la Academia Francesa: F. Lacroix (1765-1843), G. Monge (1746-1818) y S. de Laplace (1749-1827); quienes estuvieron de acuerdo en publicar su trabajo, pero L. Lagrange (1736-1813) rechazó rotundamente la idea por considerar imposible que funciones discontinuas o con discontinuidades en sus derivadas (con picos) pudieran ser representadas como sumas de funciones suaves como los senos y cosenos.

No obstante, los miembros de tan prestigiosa institución estaban convencidos de la importancia que tenían los problemas relacionados con la propagación del calor y, los resultados teóricos presentados por J. Fourier, los cuales tenían concordancia con diversos experimentos llevados a cabo previamente. Por este motivo, los miembros del Instituto de Francia organizaron un concurso, convocando a todas las mentes brillantes de esa época, la temática del concurso fue: dar la teoría matemática de las leyes de propagación del calor y comparar los resultados de esta teoría con los de experiencias exactas.

Dicho concurso lo ganó J. Fourier en 1812, pero a pesar de esto, los miembros de la Academia criticaban aún su falta de rigor, es por ello que, a pesar de ganar el concurso, J. Fourier no consiguió publicar su trabajo en la célebre serie *Mémoires* (Memorias) de la Academia Francesa. No obstante, J. Fourier, con gran esfuerzo y dedicación, continuó trabajando en el tema y no fue sino 15 años más tarde, en 1822, publicó sus ideas en un trabajo titulado *Théorie analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor). Actualmente este libro es una de las obras Clásicas en Matemáticas, y calificándolo en esa época por el físico Arnold Sommerfeld (1868-1951) como la "Biblia de la Física Matemática".

Finalmente, J. Fourier falleció el 16 de mayo de 1830 en París, no obstante, tras su muerte, el legado de J. Fourier continuó expandiéndose, por consiguiente, sus escritos fueron estudiados y ampliados por la comunidad científica, permitiendo que su serie trigonométrica se convirtiese en una herramienta fundamental para resolver problemas en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

1.3. Aspectos básicos

1.3.1. Algunos conjuntos numéricos

Los conjuntos de números tales como los naturales, enteros, racionales e irracionales, que unidos forman el conjunto de números reales son pilares fundamentales en la matemática, por lo que, han sido objeto de estudio y exploración a lo largo de la

historia. Estos conjuntos forman parte del vasto mundo de los números jugando un papel crucial en diversas aplicaciones científicas y cotidianas.

Conjunto de números naturales

El conjunto de números naturales denotado como \mathbb{N} , es el conjunto que incluye todos los números positivos sin parte decimal y el cero. Formalmente el conjunto de números enteros se expresa como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

y

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Los números naturales representan cantidades discretas y se utilizan para contar objetos, personas, o elementos en cualquier conjunto finito. Los números naturales surgieron de la necesidad del ser humano de contar y medir.

Conjunto de números enteros

El conjunto de números enteros denotado por \mathbb{Z} , es aquel conjunto que incluye todos los números naturales (positivos) junto con sus negativos y el cero. El conjunto de números enteros se expresa como:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Se utilizan para representar cantidades negativas, cambios en magnitudes, y en la resolución de problemas que involucran sumas o restas de valores.

Conjunto de números racionales

Los números racionales denotado como \mathbb{Q} , son aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos enteros donde el denominador es diferente de cero, es decir, pueden representarse como fracciones. Formalmente, el conjunto de números racionales está dado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\},$$

donde a es el numerador y b es el denominador.

Conjunto de números irracionales

Por otro lado, los números irracionales denotados por \mathbb{I} son aquellos que no pueden expresarse como fracciones y tienen una expansión decimal infinita y no periódica,

por ejemplo es el caso de π o de $\sqrt{2}$.

Conjunto de números reales

El conjunto de números reales denotado \mathbb{R} , es el conjunto que contiene todos los números que pueden ser representados por una expansión decimal infinita o finita, es decir, todos los números racionales e irracionales. Por consiguiente, el conjunto de números reales \mathbb{R} , es la unión de los números racionales y los números irracionales, es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Por consiguiente, los números reales (\mathbb{R}), se definen como el conjunto de números que agrupa o incluye los números naturales (\mathbb{N}), enteros (\mathbb{Z}), racionales (\mathbb{Q}) e irracionales (\mathbb{I}).

1.3.2. Notación de derivadas parciales

Las derivadas parciales son conceptos fundamentales en el cálculo multivariable que permiten medir cómo cambia una función de varias variables con respecto a cada una de sus variables independientes de forma individual. Los diferentes tipos de notación utilizados en las ecuaciones diferenciales parciales surgen debido a la diversidad de contextos y aplicaciones en los que se utilizan estas ecuaciones. Cada tipo de notación ha sido desarrollado con el propósito de simplificar la representación y el cálculo de las derivadas parciales, adaptándose a las necesidades específicas de cada área de estudio.

En matemáticas, la derivada parcial de una función de varias variables, es la derivada con respecto a cada una de esas variables manteniendo las otras como constantes. La derivada parcial de una función $f(x, y, \dots)$ con respecto a la variable x se puede denotar de distintas maneras:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f = D_1 f = \partial_x f = f_x.$$

La notación tradicional con subíndices $\frac{\partial f}{\partial x}$, es la más utilizada debido a su facilidad de lectura, ideales para cálculos simples y para el estudio de funciones de una sola variable.

Ejemplo 1.3.1: Derivada parcial de primer orden

Sea $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $z(x, y) = x^2y - 3xy + 5y$. Encontrar las derivadas parciales de la función z de primer orden.

Solución

Se expresa la función z de la siguiente manera $z = (x^2y - 3xy + 5y)$. En este caso, la función z se derivará de las 2 formas: a) primero, respecto a x , y b) segundo, respecto a y .

a) Primero, se deriva la función z respecto a x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 3y + 0.$$

b) Segundo, se deriva la función z respecto a y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 3x + 5.$$

En consecuencia, la respuesta final es:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 3y + 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 3x + 5.$$



1.3.3. Ortogonalidad

En ciertas áreas de las matemáticas avanzadas, a una función se le considera como la generalización de un vector. En este apartado, se considerará el estudio de la forma en que los dos conceptos vectoriales de producto interno, o producto escalar, y la ortogonalidad de vectores pueden hacerse extensivos a funciones.

Vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k}

Los vectores unitarios son vectores con magnitud igual a 1, utilizados para indicar la dirección de un vector en el espacio tridimensional. Los vectores \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} o también denotados como \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son los vectores unitarios utilizados comúnmente. Estos se derivan de los ejes cartesianos X , Y y Z , respectivamente. Es decir, \vec{i} es el vector unitario que apunta en la dirección positiva del eje X , \vec{j} es el vector unitario que apunta en la dirección positiva del eje Y y \vec{k} es el vector unitario que apunta en la dirección positiva del eje Z . Estos vectores unitarios son perpendiculares entre sí y forman un sistema de coordenadas tridimensional.

Producto interno

Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ son dos vectores en \mathbb{R}^3 o en el espacio tridimensional, entonces el producto interno o producto escalar de \mathbf{u} y \mathbf{v} es un

número real (o escalar) que se define como la suma de los productos de sus componentes correspondientes:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{k=1}^3 u_kv_k.$$

Nota: El producto interno se expresa como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Proposición 1.3.1: Propiedades del producto interno

Sea los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces (\mathbf{u}, \mathbf{v}) cumple:

- a) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$.
- b) $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, para k un escalar.
- c) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.
- d) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Demostración

- a) Para demostrar que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$, utilizaremos la propiedad de conmutatividad del producto escalar.

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (\text{Definición de producto escalar}) \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 \quad (\text{Conmutatividad de la multiplicación en } \mathbb{R}) \\ &= (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (\text{Definición de producto escalar}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

- b) Para demostrar que $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ para un escalar k , utilizaremos la propiedad de distribución del producto escalar sobre la multiplicación escalar.

$$\begin{aligned} (k\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \quad (\text{Definición de producto escalar}) \\ &= ku_1v_1 + ku_2v_2 + ku_3v_3 \quad (\text{Distribución de la multiplicación escalar}) \\ &= k(u_1v_1) + k(u_2v_2) + k(u_3v_3) \quad (\text{Asociatividad de la multiplicación en } \mathbb{R}) \\ &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \quad (\text{Distribución de la multiplicación escalar}) \\ &= k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\text{Definición de producto escalar}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

- c) Para demostrar que $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, consideremos ambos casos.

Caso 1: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

En este caso, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ ya que el producto escalar de cualquier vector consigo mismo es igual a la magnitud del vector al cuadrado, y en este caso, la magnitud del vector nulo es 0.

Caso 2: $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

En este caso, la magnitud de \mathbf{u} es un número real positivo ($\|\mathbf{u}\| > 0$) ya que \mathbf{u} no es el vector nulo. Entonces,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 > 0 \quad (\text{El cuadrado de un número real positivo es positivo}).$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

- d) Para demostrar que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$, utilizaremos la propiedad de distribución del producto escalar sobre la suma de vectores.

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (u_1 + v_1, w_1) + (u_2 + v_2, w_2) + (u_3 + v_3, w_3) \quad (\text{Producto escalar}) \\ &= u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + u_3w_3 + v_3w_3 \quad (\text{Distr. suma}) \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) + (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (\text{Definición de producto escalar}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$. ■

Se espera que cualquier generalización del producto interno tenga estas mismas propiedades.

Suponga que f_1 y f_2 son funciones definidas en un intervalo $[a, b]$. Puesto que una integral definida en el intervalo del producto $f_1(x)f_2(x)$ tiene las propiedades antes mencionadas del producto interno vectorial, siempre que la integral exista sugerimos atender la siguiente definición.

Definición 1.3.1: Producto interno de funciones

Sean $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. El **producto interno** de las dos funciones f_1 y f_2 en el intervalo $[a, b]$ es el número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx.$$

Funciones ortogonales

Motivados por el hecho de que dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales siempre que su producto interno sea cero, definimos las **funciones ortogonales** de manera similar.

Definición 1.3.2: Funciones ortogonales

Sean $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que dos funciones f_1 y f_2 son **ortogonales** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0. \quad (1.2)$$

Ejemplo 1.3.2: Ortogonalidad entre funciones

Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$.

Verificar que las funciones dadas son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^3 dx = \int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{6}[(1)^6 - (-1)^6] = \frac{1}{6}(1 - 1) = 0.$$

Por lo tanto, $(f_1, f_2) = 0$. Así, f_1 y f_2 son ortogonales en $[-1, 1]$ ■

A diferencia del análisis vectorial, donde la palabra ortogonal es un sinónimo de perpendicular, en el presente contexto el término ortogonal y la condición (1.2) no tienen ningún significado geométrico.

1.3.4. Funciones periódicas

Definición 1.3.3: Función periódica

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una **función periódica** se puede definir como una función para la cual

$$f(t) = f(t + T), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

La constante mínima T que satisface la relación (1.3) se llama el **período** de la función.

Mediante repetición de la ecuación $f(t) = f(t + T)$, $t \in \mathbb{R}$, se obtiene

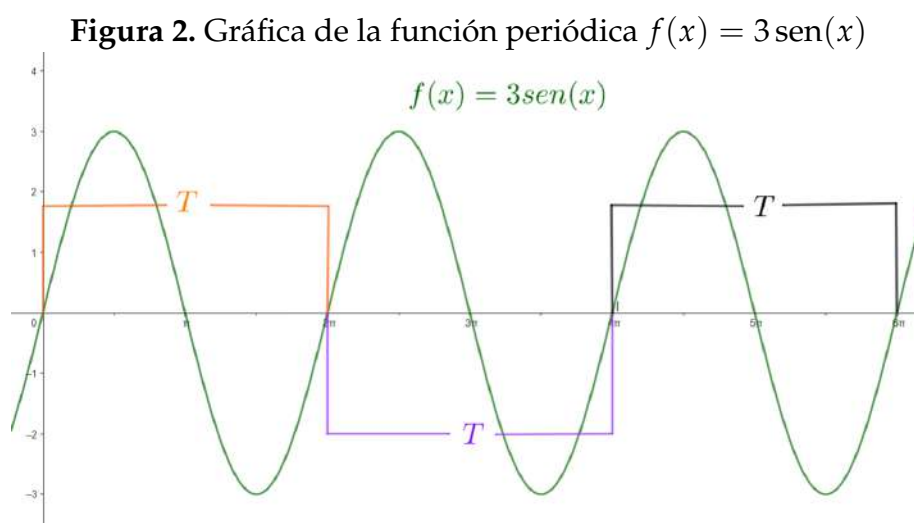
$$f(t) = f(t + nT), \quad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.3.3: Función periódica

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3\text{sen}(x)$. Graficar la función f e indicar su período.

Solución

En la Figura 2 se muestra la gráfica de la función periódica $f(x) = 3\text{sen}(x)$. Se observa que el período de la función f es $T = 2\pi$.



Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 1.3.4: El período mínimo de una función

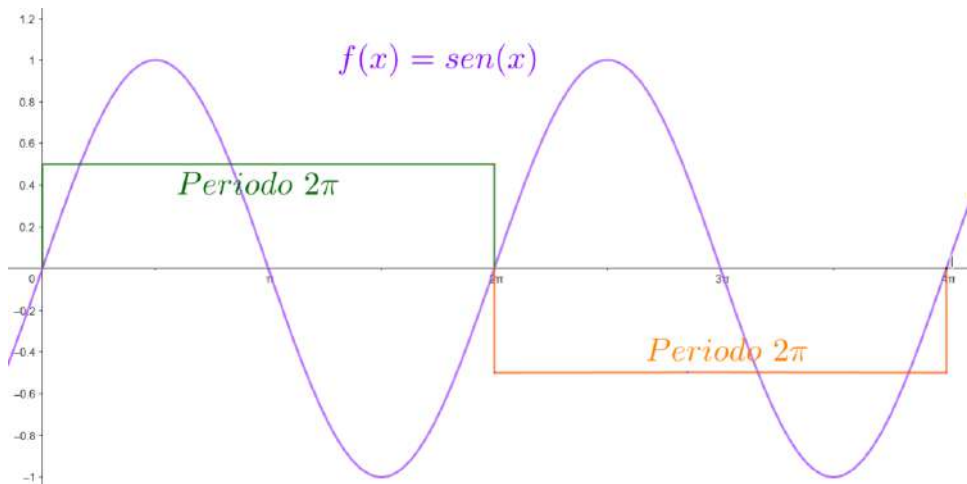
Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}(x)$. Graficar la función y determinar el período mínimo.

Solución

La función $\text{sen}(x)$ tiene períodos de $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, puesto que $\text{sen}(x + 2\pi), \text{sen}(x + 4\pi), \text{sen}(x + 6\pi), \dots$ todos son iguales a $\text{sen}(x)$.

Sin embargo, 2π es el período mínimo o simplemente el período de $\text{sen}(x)$. Aquello se evidencia en la Figura 3.

Figura 3. Función periódica $f(x) = \sin(x)$



Fuente: Elaboración propia

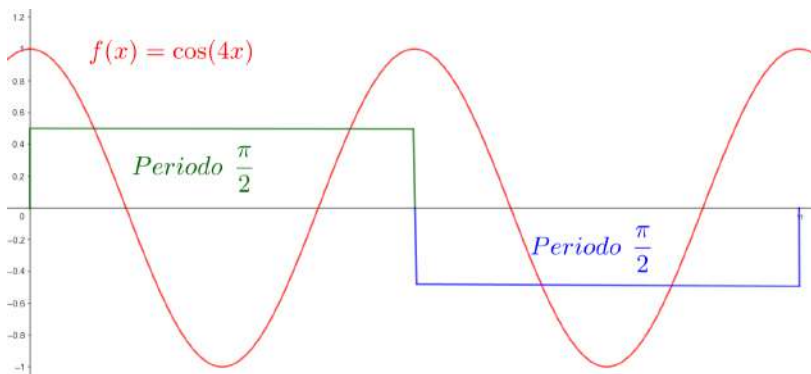


Ejemplo 1.3.5: Función periódica para un entero positivo n
 Graficar y calcular el período de $\cos(nx)$, donde n es un entero positivo.

Solución

Se debe tener presente y recordar, que las funciones tanto del $\sin(nx)$ y $\cos(nx)$, donde $n \in \mathbb{N}^*$, el resultado del período siempre será igual a $T = \frac{2\pi}{n}$.
 Entonces, asignándole un valor a n que sea igual a 4, la función a graficar es $f(x) = \cos(4x)$, obteniendo el período de esta función $T = \frac{2\pi}{4}$ simplificando términos obtenemos que el período $T = \frac{\pi}{2}$.

Figura 4. Gráfica de la función periódica $f(x) = \cos(4x)$



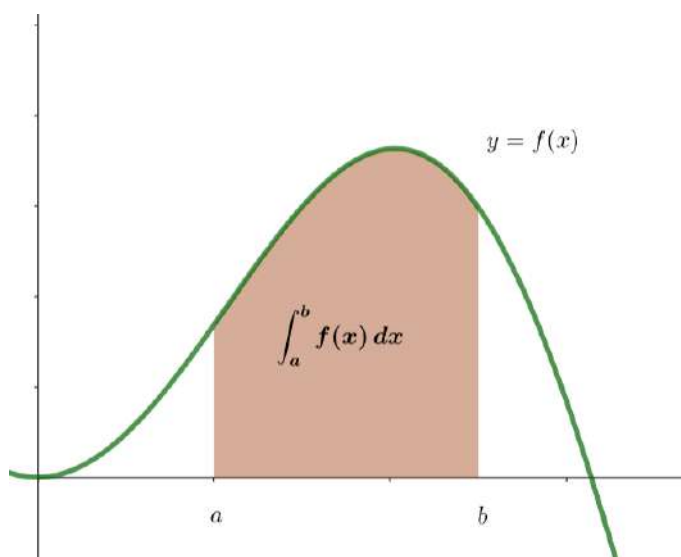
Fuente: Elaboración propia



1.3.5. Riemann integrable

Una función f **acotada** definida en un intervalo $[a, b]$ se dice que es Riemann integrable en $[a, b]$ si existe un número I en los reales tal que, para todo número real positivo ϵ existe una δ positiva tal que si P es una partición de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ y $S(P, f)$ es cualquier suma de Riemann entonces $|S(P, f) - I| < \epsilon$.

Figura 5. Área bajo la curva



Fuente: Elaboración propia

La idea que se utiliza en el cálculo de la integral de Riemann, es dividir la región coloreada en rectángulos, de tal forma que nos permitan aproximar el valor del área de una curva, mediante la suma del área de rectángulos.

Para entender la integral de Riemann, es necesario conocer varias definiciones:

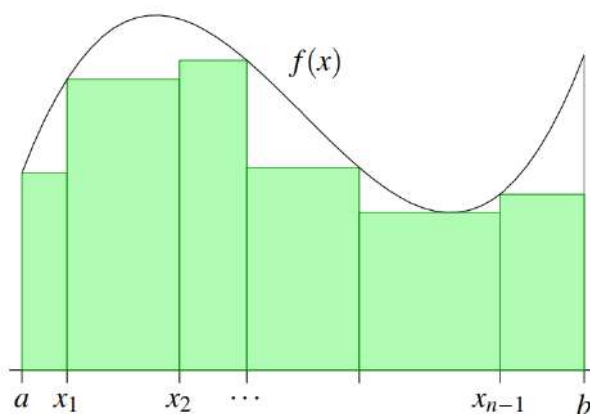
Partición (\mathcal{P})

Llamamos partición (\mathcal{P}) de un intervalo cerrado $I = [a, b]$ a una sucesión de puntos finita y ordenada, donde el primer término es a y el último término es b , de tal forma que obtendríamos: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, por tanto $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se define la **suma inferior** (\underline{S}) de f :

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}), \text{ donde } m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

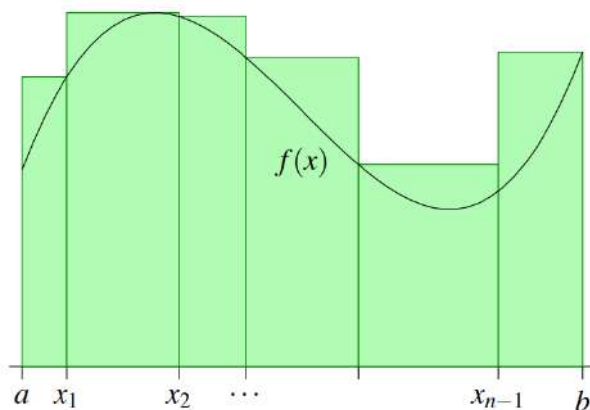
Figura 6. Suma inferior asociada a una partición

Fuente: Elaboración propia

Análogamente, sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se define la **suma superior** (\bar{S}) de f :

$$\bar{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}), \text{ donde } M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

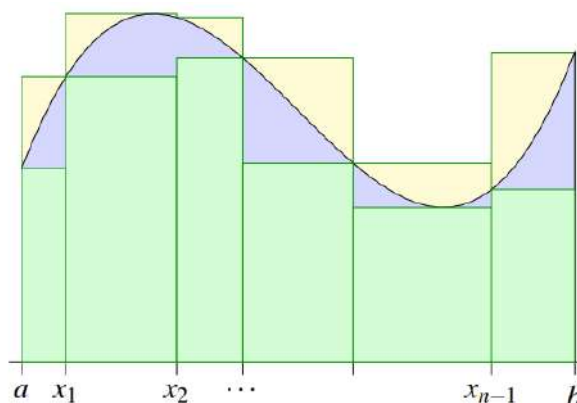
Figura 7. Suma superior asociada a una partición

Fuente: Elaboración propia

Cuando el extremo inferior del conjunto de las sumas superiores coincide con el extremo superior del conjunto de las sumas inferiores entonces diremos que la función es integrable o que es una integral de Riemann.

$$\begin{aligned} \inf \{\bar{S}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P}, \text{ es partición de } [a, b]\} &= \sup \{\underline{S}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es partición de } [a, b]\} \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Figura 8. Suma superior, área y suma inferior



Fuente: Elaboración propia

1.3.6. Funciones continuas por intervalos

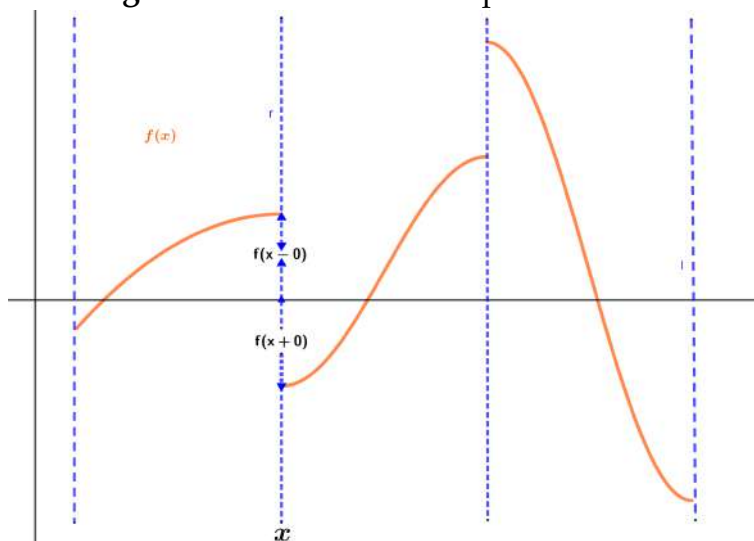
Definición 1.3.4: Función continua por intervalos

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **continua por intervalos** en un trayecto si

- éste puede ser dividido en un número finito de sub-intervalos en cada uno de los cuales $f(x)$ es continua y
- los límites de $f(x)$ a medida que x se aproxima a los extremos de cada subintervalo son finitos.

Otro modo de definirla es decir que una función **continua por intervalos** es aquella que tiene un número finito de discontinuidades finitas. La Figura 9 es un ejemplo de una función continua por intervalos.

Figura 9. Función continua por intervalos



Fuente: Elaboración propia

El límite de $f(x)$ hacia la derecha o el límite del lado derecho de $f(x)$ es llamado generalmente límite cuando $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon) = f(x + 0)$, donde $\epsilon > 0$.

Igualmente, el límite de $f(x)$ hacia la izquierda o el límite del extremo izquierdo de $f(x)$ se denomina $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x - \epsilon) = f(x - 0)$, donde $\epsilon > 0$.

Los valores de $f(x + 0)$ y $f(x - 0)$ de la Figura 9 en el punto x , son como se indica. El hecho de que $\epsilon \rightarrow 0$ y $\epsilon > 0$ algunas veces se indica también brevemente por $\epsilon > 0^+$. Entonces por ejemplo $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + \epsilon) = f(x + 0)$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x - \epsilon) = f(x - 0)$.

1.3.7. Función par e impar

Definición 1.3.5: Función par e impar

- Se dice que f es una función **par** si, sea $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ para toda x en el dominio de f , $f(-x) = f(x)$.
- Se dice que una función f es una función **impar** si, sea $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ para toda x en el dominio de f , $f(-x) = -f(x)$.

En ambas parte a) y b) se entiende que $-x$ está en el dominio de f siempre que x lo esté.

Ejemplo 1.3.6: Función par e impar

Dada las funciones siguientes:

- $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$
- $g(x) = 3x^5 + 4x^3 - 9x$
- $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$.

Indicar cuales funciones son pares, impares o ninguna de las dos.

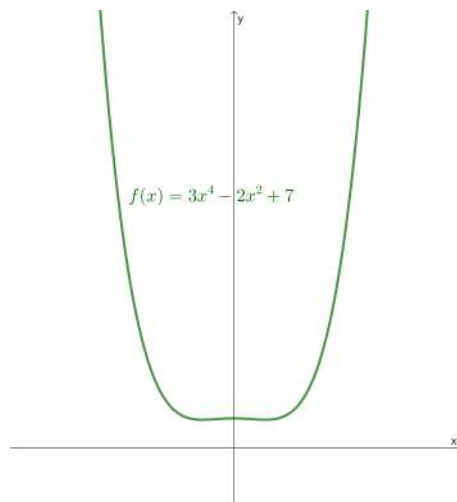
Solución

- Si $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$ y se sustituye x por $-x$ se tiene:

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 \Rightarrow f(-x) = 3(x)^4 - 2(x)^2 + 7 \Rightarrow f(x) = f(-x).$$

Por lo tanto f es una función par.

Figura 10. Gráfica de $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$ es una función par



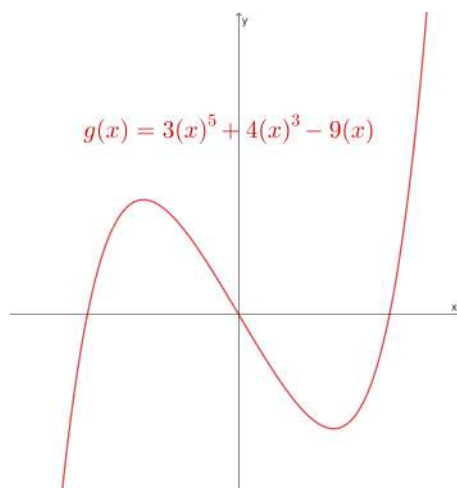
Fuente: Elaboración propia

b) Si $g(x) = 3x^5 + 4x^3 - 9x$, y se sustituye x por $-x$ se tiene:

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 + 4(-x)^3 - 9(-x) \Rightarrow g(-x) = -(3x^5 + 4x^3 - 9x) \\ &\Rightarrow g(-x) = -g(x). \end{aligned}$$

Así, g es una función impar.

Figura 11. Gráfica de $g(x) = 3x^5 + 4x^3 - 9x$ es una función impar



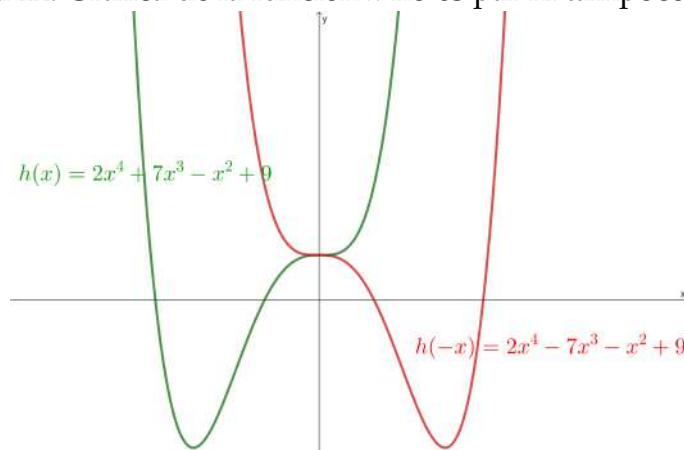
Fuente: Elaboración propia

c) Si $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$ y se sustituye x por $-x$ se tiene:

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \Rightarrow h(-x) = 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \\ &\Rightarrow h(x) \neq h(-x). \end{aligned}$$

la función h no es par ni tampoco impar.

Figura 12. Gráfica de la función h no es par ni tampoco impar.



Fuente: Elaboración propia



1.3.8. Convergencia

La relevancia del cálculo radica en la idea de Newton de representar las funciones mediante sumas de series infinitas. Por ejemplo, cuando se trataba de determinar áreas, Newton a menudo tomaba una función, la expresaba primero como una serie y luego integraba cada uno de los términos de la serie.

Muchas de las funciones que surgen en la física matemática y en la química matemática, como las funciones de Bessel, se definen como sumas de series, de modo que es importante conocer los conceptos básicos de convergencia de sucesiones y series infinitas.

Sucesiones

Definición 1.3.6: Definición formal de una sucesión

Una **sucesión** numérica se formaliza como una función de los números naturales sobre otro conjunto numérico X , de manera:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

En análisis matemático y en álgebra, una sucesión es una secuencia de números u otros objetos matemáticos relacionados entre sí, en la que se tiene en cuenta la posición relativa de cada número respecto del anterior. La sucesión se define matemáticamente como una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su codominio es cualquier otro conjunto, generalmente de números de diferente naturaleza, también pueden ser figuras geométricas o funciones; es decir, a cada po-

sición de la secuencia índice 1, 2, 3, 4... se le asocia un objeto que le corresponde en el conjunto de destino. Cada uno de ellos es denominado término (también elemento o miembro) de la sucesión y al número de elementos ordenados (posiblemente infinitos) se le denomina la longitud de la sucesión. A diferencia de un conjunto, el orden en que aparecen los términos sí es relevante y un mismo término puede aparecer en más de una posición.

Notación

Se suele usar la notación $\{a_n\}$ para indicar una sucesión, donde a_n hace referencia al elemento de la sucesión en la posición n , llamado término general. El subíndice $n \in \mathbb{N}$ indica el lugar que ocupa en dicha sucesión.

En la literatura es posible encontrar una gran variedad de notaciones alternativas. Por ejemplo, uso de paréntesis en vez de llaves, o indicaciones de los límites mediante variantes con superíndices y subíndices, como por ejemplo:

- $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots$
- $(a_k)_{k=1}^m = a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$
- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots$

Ejemplo 1.3.7: Sucesión de términos

Considere la sucesión $\left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \dots \right\}$ y suponga que el patrón de los primeros términos continúa. Encontrar una fórmula para el término general a_n

Solución

Se sabe que

$$a_1 = \frac{3}{5}, \quad a_2 = -\frac{4}{25}, \quad a_3 = \frac{5}{125}, \quad a_4 = -\frac{6}{625}, \quad a_5 = \frac{7}{3125}, \dots$$

Observe que los numeradores de estas fracciones empiezan con 3 y se incrementan una unidad al pasar al siguiente término. El segundo término tiene numerador 4, el siguiente numerador es 5; en general, el n -ésimo término tendrá como numerador $n + 2$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Los denominadores son las potencias de 5, de modo que a_n tiene por denominador 5^n .

El signo de los términos es alternadamente positivo y negativo, por lo que es necesario multiplicar por una potencia de (-1) . Como aquí se busca iniciar con un término positivo, se usa $(-1)^{n-1}$, o bien, $(-1)^{n+1}$.

Por lo tanto el término general buscado es:

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{n+2}{5^n}.$$



Ejemplo 1.3.8: Ejemplo de sucesión

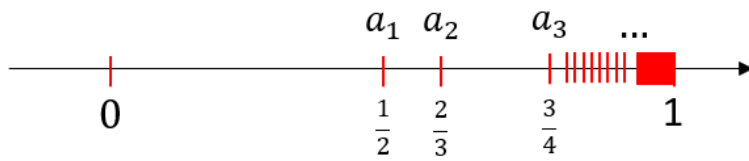
Sea la sucesión de la forma $a_n = \frac{n}{n+1}$, representar sus términos en una recta numérica y trazar la gráfica.

Solución

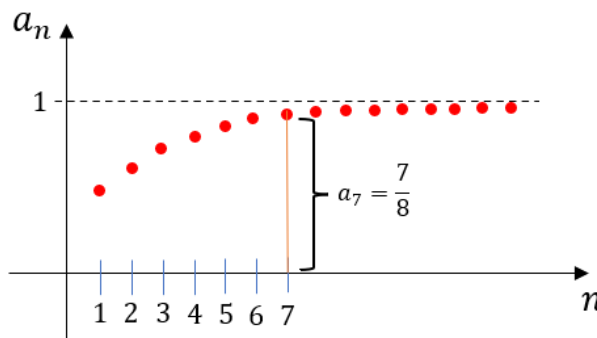
Se calcula varios valores de a_n para diferentes valores de n :

n	a_n
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{4}{5}$
5	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{6}{7}$
7	$\frac{7}{8}$
\vdots	\vdots

Representación de los términos de $a_n = \frac{n}{n+1}$



Trazo de la gráfica de los términos de $a_n = \frac{n}{n+1}$



Observe que, como una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, su gráfica consta de puntos aislados con coordenadas

$$(1, a_1) \quad (2, a_2) \quad (3, a_3) \quad \dots \quad (n, a_n) \quad \dots$$

De acuerdo con las gráficas del Ejemplo 1.3.8, parece que los términos de la sucesión

$a_n = \frac{n}{n+1}$ se aproximan a 1 cuando n se incrementa. En efecto, la diferencia

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera al incrementar a n . Lo antes mencionado, se indica escribiendo de la siguiente manera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

En general, la notación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

quiere decir que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a L cuando n se incrementa suficientemente.

Definición 1.3.7: Convergencia de sucesión

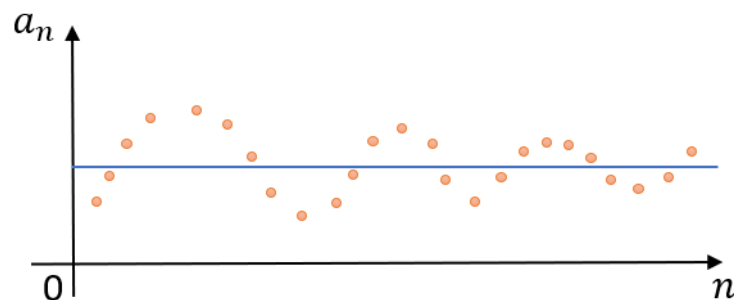
Una sucesión $\{a_n\}$ tiene como límite L , y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{o} \quad a_n \rightarrow L \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

si podemos aproximar los términos a_n tanto como se quiera cuando n es suficientemente grande. Si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, se dice que la **sucesión converge** (o que es convergente). De lo contrario se dice que la **sucesión diverge** (o es divergente).

En la figura 13 se ilustra la definición 1.3.7 mostrando la gráfica de la sucesión que tienen como límite a L .

Figura 13. Gráfica de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$



Fuente: Elaboración propia

Una versión más exacta de la definición 1.3.7 es como se indica a continuación.

Definición 1.3.8: Más exacta de convergencia de sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite a L y se escribe

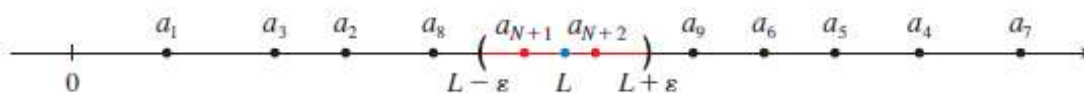
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{o bien} \quad a_n \rightarrow L \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero correspondiente N tal que

$$\text{si } n > N \text{ entonces } |a_n - L| < \epsilon.$$

La definición 1.3.8 se ilustra mediante la figura 14, en la cual los términos a_1, a_2, a_3, \dots , se localizan en la recta numérica. No importa qué tan pequeño se escoja al intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, existe una N tal que todos los términos de la sucesión desde a_{N+1} en adelante deben estar en el intervalo.

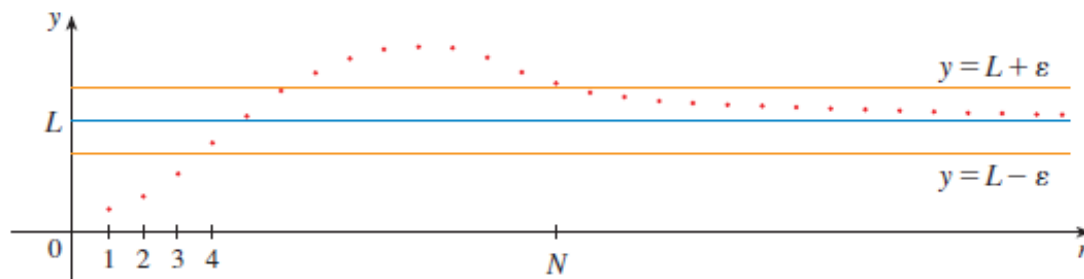
Figura 14. Términos a_1, a_2, a_3, \dots , en la recta numérica.



Fuente: Elaboración propia

Otra ilustración de la definición 1.3.8 es la figura 15. Los puntos sobre la gráfica de $\{a_n\}$ deben estar entre las rectas horizontales $y = L + \epsilon$ y $y = L - \epsilon$ si $n > N$. Esta imagen debe ser válida, no importa qué tan pequeño se haya escogido ϵ , pero por lo regular un ϵ más pequeño requiere un N más grande.

Figura 15. Términos de una sucesión como función



Fuente: Elaboración propia

Serie infinita

Si trata de sumar los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtiene una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

que se denomina **serie infinita**, o sólo serie, y se denota con los símbolos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{o} \quad \sum a_n.$$

Observación 1.3.1

¿Tiene sentido hablar de suma de una cantidad infinita de términos?

a) Sería imposible encontrar la suma finita de la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n + \dots$$

porque si empieza a sumar los términos, obtiene sumas acumulativas $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ y después del n -ésimo término, llega a $\frac{n(n+1)}{2}$, lo cual se vuelve muy grande cuando n se incrementa.

b) Si empieza por sumar los términos de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

obtiene $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}, \dots$. Estas sumas parciales se vuelven más y más cercanas a 1, de hecho, al sumar suficientes términos de la serie es posible hacer que las sumas parciales sean tan cercanas a 1 como se quiera. Por eso es razonable decir que la suma de esta serie infinita es igual a 1 y escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1.$$

Se aplica una idea similar para determinar si una serie tiene o no tiene una suma. Considere las sumas parciales

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y en general,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Estas sumas parciales forman una nueva sucesión $\{s_n\}$, la cual puede tener o no

tener un límite. Si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ (como un número finito), se llama suma de la serie infinita $\sum a_n$.

Definición 1.3.9: Convergencia de serie infinita

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, denote con s_n la n -ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ existe como un número real, entonces la serie $\sum a_n$ se dice **convergente** y se escribe

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

El número S se llama **suma de la serie**. Si no es así, la serie se dice **divergente**.

Así, la suma de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales. Cuando escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ quiere decir que al sumar suficientes términos de la serie puede llegar tan cerca como quiera al número S . Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Ejemplo 1.3.9: Serie geométrica

La serie infinita

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad \text{para } a \neq 0$$

se conoce con el nombre de serie geométrica.

Nota: Una serie geométrica es un grupo de números ordenados con un patrón específico. El patrón se determina multiplicando un cierto número por cada número de la serie. Esto determina el siguiente número de la serie, el número multiplicado debe ser el mismo para cada término de la serie y se llama **razón común**.

Solución

Cada término se obtiene a partir del término precedente y se multiplica por la razón común r .

- Si $r = 1$, en consecuencia

$$s_n = a + a + \dots + a = na \rightarrow \pm\infty.$$

Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ no existe, la serie geométrica diverge en este caso.

- Si $r \neq 1$,

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}, \text{ entonces,} \\ rs_n &= ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n. \end{aligned}$$

Al restar estas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} s_n - rs_n &= a - ar^n \\ s_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ para } r \neq 1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Realizamos el límite $n \rightarrow \infty$; recuerde que $r^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \frac{a}{1 - r}.$$

Por esto, cuando $|r| < 1$, la serie geométrica es convergente y su suma es $\frac{a}{1 - r}$. Si $r \leq -1$ o bien, $r > 1$, la sucesión $\{r^n\}$ es divergente, de ese modo $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ no existe. Por lo tanto, la serie geométrica diverge en esos casos.

■

El resumen de los resultados del ejemplo 1.3.9 es como se señala en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.2: Serie geométrica

La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$

- a) Es convergente si, $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \text{ para } |r| < 1.$$

- b) Si $|r| \geq 1$, la serie geométrica es divergente.

Ejemplo 1.3.10: Convergente o divergente

Determinar si la siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ es convergente o divergente.

Solución

Se escribe el n -ésimo término de la serie en la forma ar^{n-1} :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Identifique esta serie como una serie geométrica con $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, la serie diverge, de acuerdo con la proposición 1.3.2. ■

Teorema 1.3.1: Convergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demostración

Sea $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. En tal caso, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Puesto que $\sum a_n$ es convergente, la sucesión $\{s_n\}$ es convergente. Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Como $(n-1) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, también se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$. Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

Nota

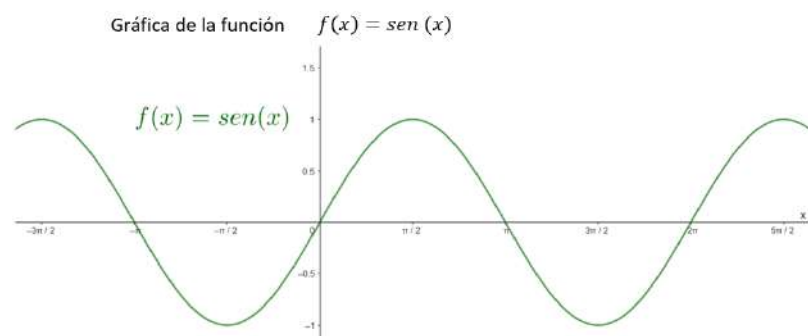
Con cualquier serie $\sum a_n$ se asocian dos sucesiones: la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales y la sucesión $\{a_n\}$ de sus términos. Si $\sum a_n$ es convergente, entonces el límite de la sucesión $\{s_n\}$ es S , (la suma de la serie) y, como establece el teorema 1.3.1, el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es 0.

1.3.9. Propiedades de las funciones seno y coseno**Función seno**

- Su dominio es el conjunto de los números reales \mathbb{R} y es continua
- Su recorrido es $[-1, 1]$; ya que $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$
- Corta al eje X en los puntos $k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Corta al eje Y en el punto $(0, 0)$

- d) Es impar, es decir, es simétrica respecto al origen: $\sin(-x) = -\sin(x)$
- e) Es estrictamente creciente en los intervalos de la forma (a, b) donde $a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y $b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$
- f) Es estrictamente decreciente en los intervalos de la forma (a, b) donde $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ y $b = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$
- g) Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1)$ para $k \in \mathbb{Z}$. Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma $(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, -1)$ para $k \in \mathbb{Z}$
- h) Su período es 2π
- i) Está acotada superiormente e inferiormente por 1 y -1 respectivamente.

x	$f(x) = \text{sen}(x)$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
π	0
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
2π	0



Dominio: El conjunto de los números reales.

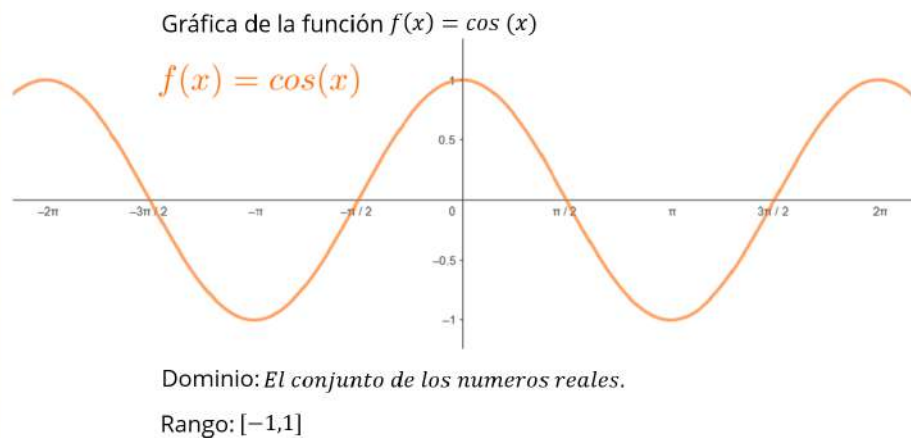
Rango: $[-1, 1]$

Función coseno

- a) Su dominio es \mathbb{R} y continua
- b) Su recorrido es $[-1, 1]$
- c) Corta al eje X en los puntos $\frac{\pi}{2} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Corta al eje Y en el punto $(0, 1)$
- d) Es par, es decir, es simétrica respecto al eje Y. $\cos(x) = \cos(-x)$
- e) Es estrictamente creciente en los intervalos de la forma (a, b) donde $a = -\pi + 2k\pi$ y $b = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$
- f) Es estrictamente decreciente en los intervalos de la forma (a, b) donde $a = 2k\pi$ y $b = \pi + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

- g) Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma $(2k\pi, 1)$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma $(\pi + 2k\pi, -1)$ para $k \in \mathbb{Z}$
- h) Su período es 2π
- i) Está acotada superiormente e inferiormente por 1 y -1 respectivamente.

x	$f(x) = \text{sen}(x)$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	-1
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2π	1



Definición 1.3.10: Función ortogonal

Se dice que dos funciones son **ortogonales** si la integral de su producto escalar, bajo condiciones adecuadas de integración, es nula.

Ejemplo 1.3.11: Ortogonalidad de las funciones seno y coseno

Sean las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ cumplen con esa condición y son ortogonales en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución

Por la definición 1.3.2,

$$(f, g) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x) \cos(x) dx = 0. \tag{1.6}$$

Para resolverlo, se reescribe la integral indefinida como sigue:

$$\int \cos(x) \text{sen}(x) dx,$$

luego se utiliza sustitución donde,

$$u = \text{sen}(x) \Rightarrow du = \cos(x)dx.$$

Con el paso anterior, se reescribe nuevamente la integral

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \text{sen}(x)dx &= \int u du = \frac{u^2}{2} + C; \text{ regla de la potencia } \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1 \\ &= \frac{\text{sen}^2(x)}{2} + C; \text{ devolviendo el cambio } u = \text{sen}(x) \end{aligned}$$

Así, la integral indefinida resuelta es:

$$\int \cos(x) \text{sen}(x) dx = \frac{\text{sen}^2(x)}{2} + C.$$

Evaluando los límites de integración se obtiene

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \text{sen}(x) dx = \frac{\text{sen}^2(x)}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\text{sen}^2(\frac{\pi}{2})}{2} - \frac{\text{sen}^2(-\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Por lo tanto ($f, g = 0$).

Proposición 1.3.3: Identidades trigonométricas

Sean $A, B \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\text{a) } \text{sen}(A) \cos(B) = \frac{1}{2}[\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)]$$

$$\text{b) } \cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\text{c) } \cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$$

$$\text{d) } \text{sen}^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$$

Demostración

a) Comenzamos con el lado izquierdo:

$$\text{sen}(A) \cos(B) = \text{sen}(A) \cos(B),$$

utilizando la fórmula de la suma de ángulos para $\text{sen}(A+B)$:

$$\text{sen}(A+B) = \text{sen}(A) \cos(B) + \cos(A) \text{sen}(B),$$

de igual forma para $\text{sen}(A - B)$:

$$\text{sen}(A - B) = \text{sen}(A) \cos(B) - \cos(A) \text{sen}(B),$$

sumamos estas dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{sen}(A + B) + \text{sen}(A - B) &= \text{sen}(A) \cos(B) + \cos(A) \text{sen}(B) + \text{sen}(A) \cos(B) \\ &\quad - \cos(A) \text{sen}(B) \end{aligned}$$

$$\text{sen}(A + B) + \text{sen}(A - B) = 2 \text{sen}(A) \cos(B).$$

Dividimos ambos lados por 2:

$$\frac{1}{2} [\text{sen}(A + B) + \text{sen}(A - B)] = \text{sen}(A) \cos(B)$$

Esta es la igualdad que queríamos demostrar.

b) Comenzamos con el lado izquierdo:

$$\cos(A) \cos(B) = \cos(A) \cos(B).$$

Utilizamos la fórmula de la suma de ángulos para $\cos(A + B)$:

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \text{sen}(A) \text{sen}(B),$$

de la misma forma $\cos(A - B)$:

$$\cos(A - B) = \cos(A) \cos(B) + \text{sen}(A) \text{sen}(B).$$

Sumamos estas dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \cos(A + B) + \cos(A - B) &= \cos(A) \cos(B) - \text{sen}(A) \text{sen}(B) \\ &\quad + \cos(A) \cos(B) + \text{sen}(A) \text{sen}(B) \\ \cos(A + B) + \cos(A - B) &= 2 \cos(A) \cos(B) \end{aligned}$$

Dividimos ambos lados por 2:

$$\frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)] = \cos(A) \cos(B)$$

Esta es la igualdad que queríamos demostrar.

c) Comenzamos con la identidad trigonométrica para el coseno del doble de un ángulo:

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

Deseamos obtener una expresión que involucre $\cos^2 A$, por lo que despejamos $\cos^2 A$ en términos de $\cos(2A)$ y $\operatorname{sen}^2 A$:

$$\cos^2 A = \cos(2A) + \operatorname{sen}^2 A$$

Ahora, utilizamos la identidad trigonométrica fundamental

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1,$$

Sustituimos esta identidad en la ecuación anterior:

$$\cos^2 A = \cos(2A) + 1 - \cos^2 A$$

Sumamos $\cos^2 A$ a ambos lados de la ecuación:

$$2 \cos^2 A = \cos(2A) + 1$$

Finalmente, dividimos ambos lados de la ecuación por 2 para obtener la identidad deseada:

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos(2A))$$

Hemos demostrado la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos(2A))$$

d) Comenzamos con la identidad trigonométrica para el coseno del doble de un ángulo:

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

Deseamos obtener una expresión que involucre $\operatorname{sen}^2 A$, por lo que despejamos $\operatorname{sen}^2 A$ en términos de $\cos(2A)$ y $\cos^2 A$:

$$\operatorname{sen}^2 A = \cos^2 A - \cos(2A)$$

Ahora, utilizamos la identidad trigonométrica fundamental

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Sustituimos esta identidad en la ecuación anterior:

$$\operatorname{sen}^2 A = \cos^2 A - \cos(2A) = \cos^2 A - (1 - \operatorname{sen}^2 A)$$

Simplificamos la ecuación:

$$\operatorname{sen}^2 A = \cos^2 A - 1 + \operatorname{sen}^2 A$$

Sumamos 1 a ambos lados:

$$\operatorname{sen}^2 A + 1 = \cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A$$

Restamos $\operatorname{sen}^2 A$ de ambos lados:

$$1 = \cos^2 A$$

Finalmente, dividimos ambos lados de la ecuación por 2 para obtener la identidad deseada:

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos(2A))$$

Hemos demostrado la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos(2A))$$



Módulo 2

Series de Fourier

2.1. Objetivo

Desarrollar el estudio de las series de Fourier, enfocado en sus conceptos fundamentales, utilizando ejemplos que permiten ilustrar y facilitar la comprensión de estos. Esta parte del documento referencial, permitirá la familiarización con la terminología relacionado con las series de Fourier. Proveerá de herramientas teóricas esenciales para su aplicación en ejercicios relacionados, contribuyendo al desarrollo académico y profesional.

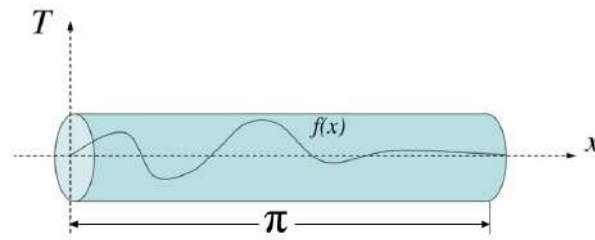
2.2. Orígenes y motivación de las Series de Fourier

El estudiar y comprender las series de Fourier, permite adentrarnos en un mundo de maravillas matemáticas y aplicaciones prácticas. Desde su origen en la física hasta su difusión en la música, la ingeniería y la ciencia, estas series han dejado una huella imborrable en nuestra comprensión del universo y en el desarrollo de la tecnología. Así, al adentrarnos en las series de Fourier, descubrimos una armonía oculta que permea todos los aspectos de la vida y nos invita a seguir explorando y creando conocimiento sin límites.

Una serie de Fourier es la representación de una función como una serie de constantes multiplicadas por funciones seno y/o coseno de diferentes frecuencias. Para mostrar el interés que tienen estas series, a continuación se presenta un problema del tipo que llevó a J. Fourier a considerarlas.

Considérese una barra como la Figura 16, delgada de longitud π , y de sección transversal de densidad constante y uniforme. Sea $u(x, t)$ la temperatura en el tiempo t en la sección transversal de la barra en x , para $0 \leq x \leq \pi$. La ecuación en derivadas

Figura 16. Barra delgada de longitud π



Fuente: Elaboración propia

parciales que satisface u es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{para } 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

donde k es una constante que depende del material de la barra. Esta ecuación se conoce con el nombre de **ecuación de calor**. Supóngase que los extremos izquierdo y derecho de la barra se mantienen a temperatura cero, es decir

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad \text{para } t > 0, \quad (2.2)$$

y la temperatura a lo largo de la barra en el tiempo $t = 0$ está especificada por

$$u(x, 0) = f(x) = x(\pi - x). \quad (2.3)$$

La ecuación de calor junto con la distribución de la temperatura inicial a lo largo de la barra y la información de que los extremos se mantienen a cero grados durante todo el tiempo, son suficientes para determinar la distribución de la temperatura $u(x, t)$ a lo largo de la barra en cualquier tiempo t .

J. Fourier encontró que las funciones que satisfacen la ecuación de calor (2.1) y las condiciones en los extremos de la barra, las ecuaciones (2.2), tienen la forma

$$u_n(x, t) = b_n \text{sen}(nx) e^{-kn^2 t}, \quad (2.4)$$

donde n es cualquier entero positivo y b_n cualquier número real. Estas funciones se utilizan para encontrar una que también satisfaga la condición (2.3).

Una simple elección del entero positivo n_0 y la constante b_{n_0} no funciona. Es así que, si

$$u(x, t) = b_{n_0} \text{sen}(n_0 x) e^{-kn_0^2 t},$$

entonces necesita

$$u(x, 0) = x(\pi - x) = b_{n_0} \text{sen}(n_0 x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi,$$

lo cual es imposible. Esto se debe a que un polinomio no puede ser igual a una constante multiplicada por una función seno en $[0, \pi]$ (o en cualquier intervalo no trivial).

Por lo tanto, lo siguiente es intentar una suma finita de funciones de la forma (2.4),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}(nx) e^{-kn^2 t}, \quad \text{para } N \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Esta última función seguirá satisfaciendo la ecuación de calor y las condiciones (2.2). Así, para satisfacer la condición (2.3), se debe elegir N y b'_n s de manera que:

$$u(x, 0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}(nx), \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi.$$

Pero, esto también es imposible. Una suma finita de múltiplos constantes de las funciones seno no puede ser igual a un polinomio en el intervalo $[0, \pi]$.

En este punto J. Fourier en vista que, ninguna suma finita de funciones del tipo (2.4) puede ser una solución, intentó con una serie infinita de la siguiente forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) e^{-kn^2 t}. \quad (2.6)$$

Esta función cumplirá la ecuación de calor, así como las condiciones

$$u(x, 0) = u(\pi, 0) = 0.$$

Para satisfacer la condición (2.3) se debe escoger las b'_n s de manera que:

$$u(x, 0) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx), \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi. \quad (2.7)$$

Esto es diferente a intentar representar el polinomio $x(\pi - x)$ por una suma trigonométrica del tipo finita (2.5).

J. Fourier afirmaba que la ecuación (2.7) es válida para $0 \leq x \leq \pi$ si los coeficientes se eligen como:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n^3}.$$

En efecto, para resolver esta integral utilizaremos integración por partes. La fórmula de integración por partes es:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

donde u y v son funciones diferenciables. Para esta integral, elegimos:

$u = x$ y $dv = (\pi - x) \operatorname{sen}(nx) dx$. Así,

$$du = dx, \quad (\text{derivada de } u \text{ con respecto a } x)$$

$$v = -\frac{1}{n} \cos(nx), \quad (\text{integral de } dv \text{ con respecto a } x)$$

Calculamos $u \cdot v$ y $\int v du$:

De donde, aplicando la fórmula de integración por partes a la integral indefinida se tiene:

$$\int x(\pi - x) \operatorname{sen}(nx) dx = u \cdot v - \int v du = -\frac{x}{n} \cos(nx) - \left(-\frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \right) + C.$$

Evaluamos la integral definida desde 0 hasta π :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen}(nx) dx &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) - \left(-\frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \right) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n\pi) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{n} (-1)^n + 0 \right], \text{ simplificando} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Multiplicamos por $\frac{2}{\pi}$ en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Para que ambas expresiones coincidan, multiplicamos y dividimos por n^2 en el resultado obtenido:

$$\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{n} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} \frac{1 - (-1)^n}{1} = \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} \frac{1}{n^2}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{4}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n^3}.$$

Así, sustituyendo estos coeficientes en la solución propuesta en (2.6), se obtiene que la solución al problema de conducción de calor con la temperatura inicial dada es

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \operatorname{sen}(nx) e^{-kn^2 t}.$$

Por tanto, la afirmación que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \right) \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \operatorname{sen}(nx) = x(\pi - x), \quad \text{para } 0 \leq x \leq \pi,$$

fue demasiado radical de aceptar para algunos científicos contemporáneos de J. Fourier. Una razón pudo haber sido que las matemáticas de ese tiempo no eran adecuadas para demostrar este tipo de afirmaciones. Además, la falta de rigor fue un factor determinante que motivó a la Academia Francesa a rechazar la publicación del artículo, pero las implicaciones no fueron olvidadas por algunos colegas de J. Fourier tales como F. Lacroix (1765-1843), G. Monge (1746-1818) y S. de Laplace (1749-1827).

Con aquel resultado, J. Fourier afirmó que es útil para una extensa clase de funciones f , los coeficientes b_n pueden elegirse de manera que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \quad \text{en el intervalo } [0, \pi].$$

Con el tiempo, esta afirmación y otras aún más generales sobre estas series propuestas por Fourier fueron demostradas. Ahora sigue un análisis de las ideas de Fourier y algunas de sus ramificaciones.

2.3. La serie de Fourier de una función

Sea $f : [-L, L] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Por el momento, suponga sólo que $\int_{-L}^L f(x) dx$ existe, se quiere explorar la posibilidad de elegir números que pertenece al conjunto de los números reales \mathbb{R} , $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ tales que

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (2.8)$$

para $-L \leq x \leq L$. Algunas veces esto es pedir demasiado, pero se puede lograr bajo ciertas condiciones sobre f . Sin embargo, para empezar, acepte y suponga por el momento que la ecuación (2.8) es cierta. ¿Qué dice esto acerca de la elección de los coeficientes? Hay un mecanismo ingenioso para contestar esta pregunta, que era conocido por J. Fourier y otros de su época. Para ello se necesita el siguiente lema

elemental.

Lema 2.3.1

Sean n y m enteros no negativos. Entonces

a)

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

b) Si $n \neq m$, entonces

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

c) si $n \neq 0$, entonces

$$\int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L.$$

Demostración

Estos resultados se obtienen integrando directamente.

a)

$$\begin{aligned} & \int \sin\left(\frac{mx\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) dx \\ & u = \frac{x\pi}{L} \Rightarrow du = \frac{\pi}{L} dx \\ & = \frac{L}{\pi} \int \sin(mu) \cos(nu) du \quad (**) \end{aligned}$$

Aplicando la proposición 1.3.3, $\sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B) - \sin(B-A))$

$$\begin{aligned} & = \int \frac{\sin((n+m)u) - \sin((n-m)u)}{2} du \quad (*) \\ & = \underbrace{\frac{1}{2} \int \sin((n+m)u) du}_1 - \underbrace{\frac{1}{2} \int \sin((n-m)u) du}_2 \end{aligned}$$

1) $\int \sin((n+m)u) du$, por sustitución $v = (n+m)u \Rightarrow dv = (n+m)du$

$$= \frac{1}{n+m} \int \sin(v) dv = \frac{1}{n+m} \left[-\frac{\cos(v)}{n+m} \right] = -\frac{\cos((n+m)u)}{n+m}$$

2) $\int \sin((n-m)u) du$, por sustitución $v = (n-m)u \Rightarrow dv = (n-m)du$

$$= \frac{1}{n-m} \int \sin(v) dv = \frac{1}{n-m} \left[-\frac{\cos(v)}{n-m} \right] = -\frac{\cos((n-m)u)}{n-m}$$

Entonces, reemplazando 1), 2) en la integral (*)

$$\int \frac{\operatorname{sen}((n+m)u) - \operatorname{sen}((n-m)u)}{2} du = \frac{\cos((n-m)u)}{2(n-m)} - \frac{\cos((n+m)u)}{2(n+m)}.$$

Luego, se reemplaza en la integral (**)

$$\frac{L}{\pi} \int \operatorname{sen}(mu) \cos(nu) du = \frac{L \cos((n-m)u)}{2\pi(n-m)} - \frac{L \cos((n+m)u)}{2\pi(n+m)}$$

Se devuelve la sustitución $u = \frac{x\pi}{L}$

$$\begin{aligned} &= \frac{L \cos\left(\frac{(n-m)x\pi}{L}\right)}{2\pi(n-m)} - \frac{L \cos\left(\frac{(n+m)x\pi}{L}\right)}{2\pi(n+m)} \\ &= -\frac{L \cdot \left((n-m) \cos\left(\left(\frac{\pi n}{L} + \frac{\pi m}{L}\right)x\right) + (-n-m) \cos\left(\left(\frac{\pi m}{L} - \frac{\pi n}{L}\right)x\right) \right)}{2\pi \cdot (n-m)(n+m)} \Bigg|_{-L}^L \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Para demostrar que

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0,$$

cuando $n \neq m$, podemos usar la propiedad de los productos trigonométricos y el hecho de que las funciones seno y coseno son funciones ortogonales en el intervalo $[-L, L]$.

Comencemos con la primera integral:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Utilizaremos la fórmula de identidad trigonométrica de la proposición 1.3.3

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

En este caso, $A = \frac{n\pi x}{L}$ y $B = \frac{m\pi x}{L}$. Entonces, la integral se convierte en:

$$\frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L}\right) \right] dx$$

Se simplifica el término de cada coseno

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L}\right) = \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)$$

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L}\right) = \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)$$

Se reemplaza:

$$\frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) \right] dx$$

Ahora, evaluemos la integral de cada término por separado. Recuerde que la integral del coseno sobre un intervalo simétrico alrededor del origen es cero.

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Finalmente, como ambos términos de la integral son cero, la integral completa es la suma de dos ceros, lo que nos lleva a:

$$\frac{1}{2} \cdot (0 + 0) = 0$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

De forma análoga se procede para la integral con la función seno.

c) Utilizamos las identidades trigonométricas de la proposición 1.3.3

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) \quad \text{y} \quad \sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$$

$$\int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) dx$$

Se realiza cambio de variable, donde $u = \frac{n\pi x}{L}$ y $du = \frac{n\pi}{L} dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right)) dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L (1 + \cos(2u)) \frac{L}{n\pi} du \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L (1 + \cos(2u)) \frac{L}{n\pi} du \\ &= \frac{L}{2n\pi} \left[u + \frac{\text{sen}(2u)}{2} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{L}{2n\pi} \left[\left(\frac{n\pi L}{L} \right) + \frac{\text{sen}(2 \frac{n\pi L}{L})}{2} - \left(\frac{n\pi(-L)}{L} \right) - \frac{\text{sen}(2 \frac{n\pi(-L)}{L})}{2} \right] \\ &= \frac{L}{2n\pi} \left[(n\pi) + \frac{\text{sen}(2n\pi)}{2} - (-n\pi) - \frac{\text{sen}(-2n\pi)}{2} \right] \end{aligned}$$

Como $\text{sen}(2n\pi) = 0$ y $\text{sen}(-2n\pi) = 0$, por lo tanto:

$$\frac{L}{2n\pi} [2n\pi] = L$$

Así, se demuestra que: $\int_{-L}^L \cos^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = L$.

Ahora, resolvamos la segunda integral:

$$\int_{-L}^L \text{sen}^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right)) dx$$

Siguiendo un procedimiento similar al anterior, se llega a:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right)) dx &= \frac{L}{2n\pi} \left[u - \frac{\text{sen}(2u)}{2} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{L}{2n\pi} \left[\left(\frac{n\pi L}{L} \right) - \frac{\text{sen}(2 \frac{n\pi L}{L})}{2} - \left(\frac{n\pi(-L)}{L} \right) + \frac{\text{sen}(2 \frac{n\pi(-L)}{L})}{2} \right] \\ &= \frac{L}{2n\pi} [2n\pi] = L \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\int_{-L}^L \text{sen}^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = L$$

■

Después de haber revisado el lema 2.3.1, ahora, se debe encontrar a_0 , para ello, se integra la serie (2.8) término a término:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right].$$

Para encontrar el valor de a_0 en la serie de Fourier de la función $f(x)$, necesitamos calcular el coeficiente a_0 que se encuentra en la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

Para calcular a_0 , usamos la siguiente fórmula:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

En este caso, $f(x)$ está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

sustituyendo $f(x)$ en la fórmula para a_0 y utilizando las propiedades de linealidad de la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_{-L}^L \left(\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left(\frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx \right). \end{aligned}$$

Ahora, notamos que la integral de las funciones trigonométricas $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ en el intervalo $[-L, L]$ cumple la propiedad siguiente:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0.$$

Esto se debe a que la función $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ es una función par y la función $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ es una función impar en el intervalo $[-L, L]$, por lo que su integral sobre un intervalo simétrico es cero.

Utilizando esta propiedad, podemos simplificar la expresión para a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \left(\frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \right) \\ &= \frac{2}{L} \left(\frac{1}{2} a_0 \cdot 2L + \sum_{n=1}^{\infty} [0] \right) = \frac{2}{L} (a_0 L) = 2a_0 \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos:

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

El valor de a_0 es igual a la mitad del promedio de la función $f(x)$ en el intervalo $[-L, L]$. Por lo tanto, podemos calcular a_0 tomando la integral de $f(x)$ sobre el intervalo y dividiéndola por L .

Luego, para determinar a_k , para cualquier entero positivo k . Se multiplica la ecuación (2.8) por $\cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right)$, después se integra cada término de la serie resultante, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx \\ &\quad + b_n \int_{-L}^L \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

Ahora considere, que todas las integrales de la derecha son cero excepto la

$$\int_{-L}^L \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx,$$

que aparecen cuando $n = k$, y esta integral es igual a L . El lado derecho de esta ecuación se reduce a un solo término y la ecuación se convierte en:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx = a_k L,$$

de donde

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx.$$

Por último, para encontrar b_k , se regresa nuevamente a la ecuación (2.8). Esta oca-

sión, se multiplica la ecuación por $\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ y se integra cada término para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Ahora, por el lema 2.3.1, todos los términos de la derecha son cero a excepción de la integral $\int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$ cuando $n = k$, y esta ecuación se reduce a

$$\int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = b_k L.$$

Por tanto,

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

Así, con ello, se encuentran los coeficientes en el desarrollo de la serie trigonométrica (2.8). Por supuesto, este análisis es débil debido al intercambio de las series y las integrales, lo que no siempre está justificado. Sin embargo, este argumento señala cómo pueden elegirse las constantes, al menos bajo ciertas condiciones, y sugiere la siguiente definición.

Definición 2.3.1: Serie y coeficientes de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una función Riemann integrable que pertenece al intervalo $[-L, L]$.

a) Los números, $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, para $n = 0, 1, 2, \dots$ y

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

son los coeficientes de Fourier de f en el intervalo $[-L, L]$.

b) La serie $f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$,

es la serie de Fourier de f en el intervalo $[-L, L]$ cuando las constantes son los coeficientes de Fourier de f en el intervalo $[-L, L]$.

Ejemplo 2.3.1: Cálculo de una serie de Fourier de una función

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = x$ definido en $-\pi \leq x \leq \pi$. Escriba la serie de Fourier de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución

Se procede a encontrar los coeficientes a_0 , a_n y b_n , en este ejercicio $L = \pi$.

Primero, coeficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0$$

Segundo, coeficiente a_n

Para resolver esta integral, aplicaremos la técnica de integración por partes, que se basa en la fórmula:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Donde se elige el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(nx) \, dx &\Rightarrow v = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[x \cdot \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\pi \cdot \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi) - (-\pi) \cdot \frac{1}{n} \operatorname{sen}(-n\pi) \right] - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\pi \cdot \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi) + \pi \cdot \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi) \right] - \frac{1}{n\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2}{n} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(n\pi) - \frac{1}{n} \cos(-n\pi) \right] \\ &= \frac{2}{n} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right] \\ &= \frac{2}{n} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi} \cdot 0 \\ &= \frac{2}{n} \operatorname{sen}(n\pi) \end{aligned}$$

Observamos que $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para cualquier número entero n , ya que $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $\operatorname{sen}(\pi) = 0$. Por lo tanto, $a_n = 0$ para todos los valores de n .

Tercero, coeficiente b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1},$$

Para resolver esta integral, aplicamos la técnica de integración por partes, que se basa en la fórmula:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Donde elegimos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(nx) dx &\Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos(nx) \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[x \cdot \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \pi \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \pi \cos(-n\pi) \right] + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[0 + \frac{1}{n} \pi \right] + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{1}{n} \operatorname{sen}(-n\pi) \right] \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n\pi} [0 - 0] \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Finalmente, considerando que n es un número entero positivo, podemos expresar la solución final como:

$$b_n = \frac{1}{n} = \frac{2}{2n} = \frac{2}{n} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^{n+1}} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

Con ello la serie de Fourier de $f(x) = x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx) = 2 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(4x) + \dots$$

En este ejemplo, el término constante y los coeficientes de los cosenos son todos cero y la serie de Fourier tiene sólo términos en senos.



Ejemplo 2.3.2: Cálculo de la serie de Fourier de una función

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -3 \leq x \leq 0 \\ x & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Escribir la serie de Fourier.

Solución

Aquí $L = 3$ y los coeficientes de Fourier son:

Primero, coeficiente a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[0 + \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^3 \right] = \frac{1}{3} \left(0 + \frac{9}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Segundo, coeficiente a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx + \int_0^3 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[0 + \int_0^3 x \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \right] \end{aligned}$$

Aplicamos integración por partes para la integral $\int_0^3 x \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx$, entonces sea

$$u = x \text{ y } dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx, \Rightarrow du = dx \text{ y } v = \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 x \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx &= \frac{3}{n\pi} x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \Big|_0^3 - \frac{3}{n\pi} \int_0^3 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \\ &= \frac{3}{n\pi} \cdot 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \cdot 3}{3}\right) - \frac{3}{n\pi} \left[-\frac{3}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right] \Big|_0^3 \\ &= \frac{3}{n\pi} \cdot 3 \cdot \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{3}{n^2\pi^2} \cdot \cos(n\pi) + \frac{3}{n^2\pi^2} \cos(0) \\ &= \frac{3}{n\pi} \cdot 3 \cdot 0 - \frac{3}{n^2\pi^2} \cdot (-1)^n + \frac{3}{n^2\pi^2} \\ &= \frac{9}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de a_n es:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx + \int_0^3 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] = \frac{3}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

Tercero, coeficiente b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 x \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \int_{-3}^0 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx + \int_0^3 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \\ &= \int_{-3}^0 0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx + \int_0^3 x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \\ &= 0 + \int_0^3 x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \end{aligned}$$

Resolvemos la integral $\int_0^3 x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx$, aplicando integración por partes.

Sea $u = x$ y $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx$, $\Rightarrow du = dx$ y $v = -\frac{3}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$.

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx &= -\frac{3}{n\pi} x \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \Big|_0^3 + \frac{3}{n\pi} \int_0^3 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \\ &= -\frac{3}{n\pi} \cdot 3 \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot 3}{3}\right) + \frac{3}{n\pi} \left[\frac{3}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right] \Big|_0^3 \\ &= -\frac{3}{n\pi} \cdot 3 \cdot \cos(n\pi) + \frac{3}{n^2\pi^2} \cdot \sin(n\pi) - \frac{3}{n^2\pi^2} \cdot \sin(0) \\ &= -\frac{3}{n\pi} \cdot 3 \cdot (-1)^n + \frac{3}{n^2\pi^2} \cdot 0 - \frac{3}{n^2\pi^2} \cdot 0 \\ &= \frac{9(-1)^n}{n\pi}. \end{aligned}$$

Así, b_n es:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \left(0 + \int_0^3 x \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9(-1)^n}{n\pi} = \frac{3}{n\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

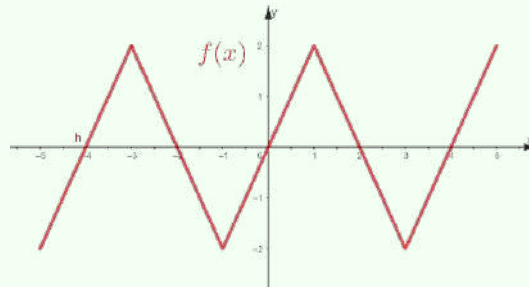
Por lo tanto, la serie de Fourier de f en $[-3, 3]$ es

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \frac{3}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right).$$

■

Ejemplo 2.3.3: Cálculo de la serie de Fourier de una función

Calcular la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ cuya gráfica es la siguiente



Solución

Primero, se analiza la gráfica, en la cual, se determina que:

- Tiene período $T = 4$, por lo cual $L = \frac{T}{2} = 2$
- Es simétrico respecto al origen, por lo que esta función $f(x)$ es impar.

Nota: por ser función impar, la serie de Fourier tendrá solo una serie de *senos* no existirá la serie en *cosenos* ya que sus coeficientes serán 0, además, no es necesario tomar toda la expresión de $f(x)$ del intervalo $[-2, 2]$ ya que será suficiente con obtener la expresión en el intervalo $[0, 2]$ por ser una función impar.

Segundo, calculamos la expresión para $f(x)$ en el intervalo $]0, 2[$, para lo cual, se realiza por segmentos, el segmento de recta que une los puntos $(0, 0)$ con $(1, 2)$ es $y = 2x$. Para encontrar dicho valor, se utiliza la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{2 - 0}{1 - 0}(x - 0)$$

$$y = 2x.$$

Análogamente, el segmento de recta que une los puntos $(1, 2)$ con $(2, 0)$ es $y = -2x + 4$. Utilizando la ecuación de recta se tiene

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{0 - 2}{2 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = -2(x - 1)$$

$$y - 2 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 2 + 2$$

$$y = -2x + 4.$$

Tercero, obtenido los segmentos de recta, se procede a obtener dicha función, la cual se caracteriza por ser una función a trozos, entonces

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Como se menciono anteriormente, por ser una función impar, los coeficientes a_0 y a_n serán igual a 0, por lo que, resta por encontrar el coeficiente b_n .

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

En este punto, se debe también tener en cuenta otra característica de las funciones impares, se puede simplificar el proceso de integración, es decir, en lugar de integrar de $[-L, L]$ se integra desde la mitad del intervalo es decir $[0, L]$, pero la fórmula de b_n tiene un ligero cambio, el número 1 por el número 2. Dando paso a la siguiente expresión

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Ahora sí, se procede al cálculo del coeficiente b_n para poder encontrar la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{xn\pi}{2} \right) dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 2x \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{2} \right) dx}_1 + \underbrace{\int_1^2 (-2x + 4) \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{2} \right) dx}_2 \end{aligned}$$

Utilizamos integración por partes tanto para la primera integral como para la segunda: $\int u dv = uv - \int v du$.

Primera integral.

$$\begin{aligned} u &= 2x \Rightarrow du = 2dx \\ dv &= \operatorname{sen} \left(\frac{xn\pi}{2} \right) dx \Rightarrow v = -\frac{2}{n\pi} \cos \left(\frac{nx\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Segunda integral.

$$\begin{aligned} u &= -2x + 4 \Rightarrow du = -2dx \\ dv &= \operatorname{sen} \left(\frac{xn\pi}{2} \right) dx \Rightarrow v = -\frac{2}{n\pi} \cos \left(\frac{xn\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en cada integral se obtiene:

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{2}{n\pi}(2x) \cos\left(\frac{xn\pi}{2}\right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{2}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{xn\pi}{2}\right) (2dt) \\
&+ (-2x+4) \left(-\frac{2}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{xn\pi}{2}\right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{2}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{xn\pi}{2}\right) (-2dx) \\
&= -\frac{2}{n\pi}(2*1) \cos\left(\frac{xn\pi}{2}\right) - \frac{-2}{n\pi}(2*0) \cos\left(\frac{n\pi*0}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{nx\pi}{2}\right) dx \\
&+ (-2*2+4) \left(-\frac{2}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi*2}{2}\right) - (-2*1+4) \left(-\frac{2}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi*1}{2}\right) \\
&- \frac{4}{n\pi} \int_1^2 \cos\left(\frac{nx\pi}{2}\right) dx \\
&= -\frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{nx\pi}{2}\right) dx + \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&- \frac{4}{n\pi} \int_1^2 \cos\left(\frac{nx\pi}{2}\right) dx \\
&= -\frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \left(\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{2}\right)\right) \Big|_0^1 + \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&- \frac{4}{n\pi} \left(\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{2}\right)\right) \Big|_1^2 \\
&= -\frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{2}\right) \Big|_0^1 + \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{2}\right) \Big|_1^2 \\
&= -\frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n*1\pi}{2}\right) - \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n*0\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&- \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n*0\pi}{2}\right) + \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n*1\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi) \\
&+ \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{16}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

La serie de Fourier $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{nx\pi}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{L}\right) \right]$, reemplazando los coeficientes encontrados, la serie trigonométrica para este ejemplo es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{nx\pi}{2}\right).$$

Como último paso se tiene que analizar para los casos cuando n sea par e impar, por

lo que se realiza a continuación:

Si $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}^*$ entonces,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0.$$

Si $n = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$ entonces,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k.$$

En este caso, cuando n es par se vuelve cero, por lo que no lo consideramos, por otro lado cuando n es impar si es considerado par formar la serie de Fourier,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$$

■

2.4. Convergencia de serie de Fourier

Poder expresar los coeficientes de Fourier de una función f en un intervalo $[-L, L]$ es una cuestión que solo requiere la existencia de las integrales definidas

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

y

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Sin embargo, determinar si la serie de Fourier resultante converge a $f(x)$, o siquiera converge en absoluto, es completamente diferente. Las complejidades de esta pregunta se destacaron en 1873 cuando el matemático francés Paul Du Bois-Reymond (1831–1889) presentó un ejemplo de una función continua en el intervalo $(-\pi, \pi)$, pero cuya serie de Fourier no convergía en ningún punto dentro de este intervalo.

No obstante, la evidente utilidad de las series de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales parciales generó un esfuerzo intensivo en el siglo XIX para determinar sus propiedades de convergencia. Alrededor de 1829, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) estableció condiciones suficientes para la convergencia de la serie de Fourier de f .

Ejemplo 2.4.1: Serie divergente

Utilizar el criterio de D'Alemberte o también conocido como el criterio del cociente o de la razón, para la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}.$$

Indicar si la serie converge o diverge.

Solución

Recordando el criterio D'Alembert, el cual menciona que

$$\text{sea } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ entonces: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} k < 1 & \text{Converge} \\ k > 1 & \text{Diverge} \\ k = 1 & \text{No es concluyente} \end{cases}.$$

Primero, se encuentran los términos $n - \text{ésimo más uno}$ y $n - \text{ésimo}$, entonces los términos son,

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)+1} = \frac{2^{n+1}}{n+2},$$

$$a_n = \frac{2^n}{n+1}.$$

Segundo, se calcula el límite para cada término encontrado

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+2}}{\frac{2^n}{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2^{n+1})}{2^n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2^n)(2)}{(2^n)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2)}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n+2} \quad \text{dividivos a cada término para } n \text{ entonces} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n} + \frac{2}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{2 + \frac{2}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{2}{1} = 2, \Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Entonces $2 > 1$ y por el criterio de D'Alembert la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} \text{ diverge.}$$



Ejemplo 2.4.2: Serie divergente

Utilizando el criterio de la integral, determinar si la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente o convergente.

Solución

Utilizando el criterio de la integral, el cual establece que, si una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ y sea a_n una sucesión tal que $a_n = f(n)$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

Primero, veamos si la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cumple con las condiciones del criterio de la integral:

1. Continuidad: La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[1, \infty)$.
2. Positividad: $f(x) > 0$ para $x > 0$.
3. Decrecimiento: Para $x > 1$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ es siempre negativo, lo que significa que $f(x)$ es decreciente.

Dado que $f(x)$ cumple con las condiciones del criterio de la integral, podemos proceder a comparar la serie con la integral impropia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (Serie)}, \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ (Integral)}$$

Calculamos la integral:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln(x)|_1^a] = \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln(a) - \ln(1)] \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \ln(a) = \ln(\infty) = \infty \end{aligned}$$

Como el límite de la integral es infinito, por ende la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente. ■

2.4.1. Condiciones de Dirichlet o de existencia

Las condiciones de Dirichlet (o condiciones de existencia) para la convergencia de la serie de Fourier de una función $f(x)$ con período $2L$ son las siguientes:

1. La función $f(x)$ debe ser definida y tener un valor único en todo el intervalo $[-L, L]$, excepto posiblemente en un número finito de puntos. Esto significa que $f(x)$ no debe tener saltos o discontinuidades infinitas dentro del intervalo, y no puede tener una cantidad infinita de puntos en los cuales no está definida o no tiene un valor único.
2. La función $f(x)$ debe ser periódica con período $2L$. Lo cual significa que la función $f(x + 2L) = f(x)$ para todos los valores de x dentro del dominio de la función.
3. Tanto $f(x)$ como su derivada $f'(x)$ deben ser continuas por intervalos en el intervalo $[-L, L]$. Esto implica que $f(x)$ no debe tener saltos o discontinuidades infinitas, y que $f'(x)$ debe ser continua en todos los puntos donde existe.

Si una función $f(x)$ cumple con estas condiciones, entonces se garantiza la convergencia de la serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $[-L, L]$. La serie de Fourier representa a $f(x)$ como una combinación de funciones seno y coseno, y converge a $f(x)$ en los puntos donde $f(x)$ es continua. En los puntos donde $f(x)$ tiene discontinuidades finitas, la serie de Fourier converge al valor promedio de los límites a ambos lados de la discontinuidad, lo que se conoce como el fenómeno de la aproximación de Gibbs.

Ejemplo 2.4.3: Convergencia

Considere la siguiente serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Determinar si es convergente o divergente.

Solución

Se desea encontrar la suma total de esta serie. Para hacerlo, podemos utilizar la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Donde: S es la suma total de la serie. a es el primer término de la serie (en este caso, $a = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$). r es la razón común entre los términos sucesivos (en este caso, $r = \frac{1}{2}$).

Sustituyendo los valores en la fórmula, obtenemos:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Simplificando la expresión:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Por lo tanto, la suma de la serie es $S = 1$, y así se concluye que la serie geométrica es convergente.



Ejemplo 2.4.4: Convergencia

Considera la siguiente serie alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

Demostrar que esta serie es convergente utilizando el criterio de la alternancia y el hecho de que el término general tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Para demostrar que esta serie es convergente, primero utilizamos el criterio de la alternancia y el término general. Criterio de la alternancia: 1. Los términos de la serie deben alternar entre positivos y negativos.

2. Los valores absolutos de los términos deben disminuir monótonamente.

En esta serie, los términos alternan debido al factor $(-1)^n$.

Término general: observe que el término general de la serie es

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

Calculamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} \right|$$

Dado que los valores absolutos no afectan el signo de la serie alternante, se puede ignorar $(-1)^n$ al tomar el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

Simplificando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}},$$

se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = 0$$

Por lo tanto, se ha demostrado que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, cumpliendo con la segunda condición del criterio de la alternancia. Dado que la serie satisface ambas condiciones del criterio de la alternancia y el término general tiende a cero, podemos concluir que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

es convergente.



Módulo 3

Algunas aplicaciones

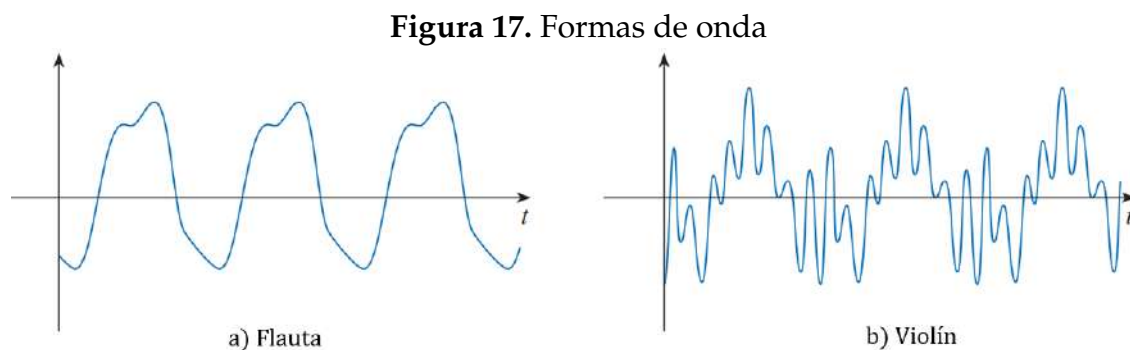
Las series de Fourier emergen como una herramienta matemática de inmenso valor en campos diversos. Al descomponer funciones periódicas en funciones trigonométricas como son los senos y cosenos, ofreciendo una comprensión de las señales y fenómenos complejos. Su aplicabilidad es crucial en varios campos, tales como, ingeniería eléctrica, física, música, procesamiento de señales, etc. El uso de las series de Fourier facilitan el diseño de circuitos electrónicos, la creación de timbres musicales y sobre todo la resolución de ecuaciones físicas. Además, su versatilidad en el campo de la tecnología permite la compresión de medios digitales junto al procesamiento de imágenes. Destacando así, la importancia que tienen las series de Fourier con su presencia generalizada, desde la música que apreciamos hasta la nitidez de las imágenes que observamos, abordando problemas esenciales en nuestra vida cotidiana.

3.1. La serie de Fourier y la música

Uno de los usos fundamentales de las series de Fourier se encuentra en la solución de ciertas ecuaciones diferenciales presentes en el ámbito de la física matemática, tales como la ecuación de onda y la ecuación de calor. A continuación, se da una breve explicación de cómo las series de Fourier desempeñan un papel esencial en el análisis y síntesis de sonidos musicales. La percepción de un sonido se origina cuando nuestros tímpanos entran en vibración como respuesta a las variaciones en la presión del aire. Por ejemplo, cuando se toca una cuerda de guitarra, se hace pasar un arco por una cuerda de violín o se golpea una cuerda de piano, la cuerda comienza a vibrar. Estas vibraciones se propagan al aire y generan fluctuaciones en la presión del aire. Estas fluctuaciones llegan a nuestros tímpanos y se transforman en señales eléctricas que son procesadas por el cerebro. Ahora bien, ¿cómo podemos

discernir entre una nota o tono específico producido por dos instrumentos musicales distintos?

Los gráficos de la Figura 17, muestran estas fluctuaciones (desviaciones de la presión de aire promedio) para una flauta y un violín tocando la misma nota sostenida D (294 vibraciones por segundo) como funciones del tiempo. Tales gráficos se llaman formas de onda y vemos que las variaciones en la presión del aire son bastante diferentes entre sí. En particular, la forma de onda del violín es más compleja que la de la flauta. Obtenemos información sobre las diferencias entre las formas de onda



Fuente: stewartcalculus.com

si las expresamos como sumas de series de Fourier:

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + \dots$$

Al hacerlo, estamos expresando el sonido como una suma de sonidos puros simples. La diferencia de sonidos entre dos instrumentos puede atribuirse a los tamaños relativos de los coeficientes de Fourier de las respectivas formas de onda. El n -ésimo término de la serie de Fourier, es decir,

$$a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right),$$

se llama el n -ésimo armónico de P . La amplitud del armónico n -ésimo es

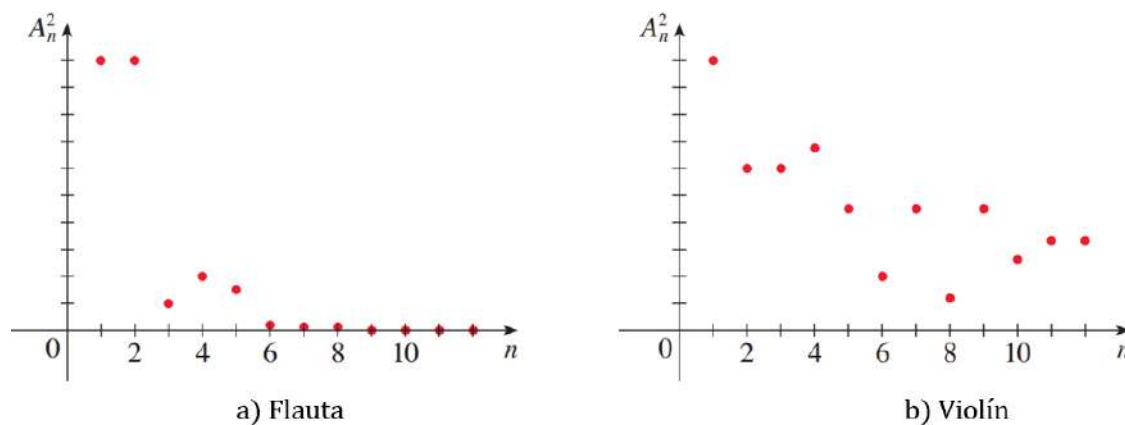
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

y su cuadrado, $A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$, a veces se llama energía del n -ésimo armónico. (Nótese que para una serie de Fourier con sólo términos sinusoidales, la amplitud es $A_n = |b_n|$ y la energía es $A_n^2 = b_n^2$.) El gráfico de la sucesión A_n^2 es llamada el espectro de energía de P y muestra los tamaños relativos de los armónicos.

La Figura 18 muestra los espectros de energía para las formas de onda de la flauta y el violín en la Figura 17. Note que, para la flauta, tiende a disminuir rápidamente

a medida que aumenta, mientras que, para el violín, los armónicos más altos son bastante fuertes. Esto explica la relativa simplicidad de la forma de onda de la flauta en la Figura 17 y el hecho de que la flauta produce sonidos relativamente puros en comparación con los tonos de violín más complejos.

Figura 18. Espectro de energía



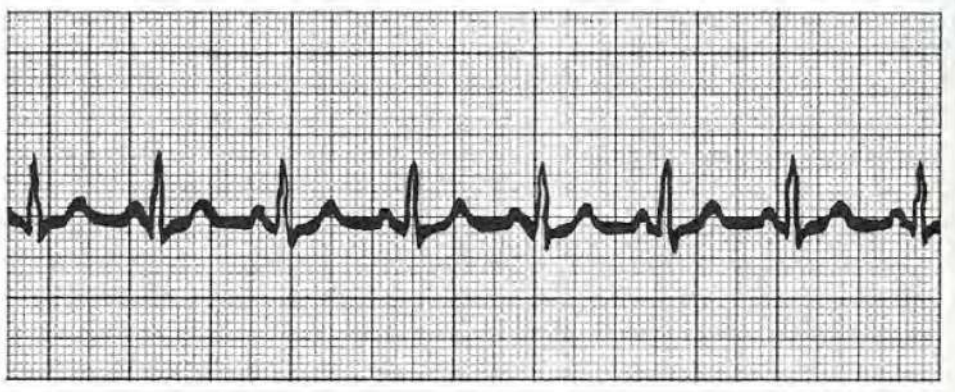
Fuente: stewartcalculus.com

Además de analizar los sonidos de los instrumentos musicales convencionales, las series de Fourier nos permiten sintetizar sonidos. La idea detrás de los sintetizadores de música es que podemos combinar varios tonos puros (armónicos) para crear un sonido más rico al enfatizar ciertos armónicos asignando coeficientes de Fourier más grandes (y por lo tanto energías correspondientes más altas).

3.2. Electrocardiografía

Puesto que las series de Fourier proporcionan una representación periódica para una amplia gama de funciones, es razonable pensar que las series de Fourier, tengan conexión con funciones que sean verdaderamente periódicas en su estado natural. Un cierto tipo de tales funciones que son naturalmente periódicas es ampliamente empleado en medicina, particularmente como una ayuda en el diagnóstico de enfermedades del corazón. Se descubrió hace mucho tiempo que existe una corriente eléctrica causada por la actividad propia del corazón y que era posible registrar gráficamente el voltaje debido a dicha corriente. El producto final se llamó un electrocardiograma.

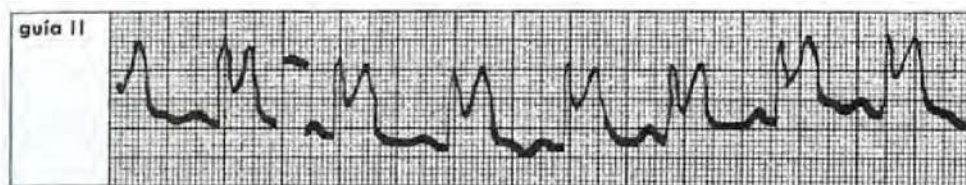
Las Figuras 19-22 muestran partes del electrocardiograma. Un galvanómetro es un instrumento que mide la diferencia en el potencial eléctrico entre dos puntos específicos, una corriente eléctrica, o bien una fuerza electromotriz (voltaje) asociada con la corriente, dependiendo todo lo anterior de la clase de galvanómetro empleado.

Figura 19.

Fuente: Rainville (1981)

Un electrocardiógrafo es un tipo particular de galvanómetro, ya que registra voltajes.

Cuando los médicos desean obtener electrocardiogramas de algún paciente, los técnicos encargados de obtener los datos deseados, siguen ciertos procedimientos cuidadosos que están perfectamente establecidos, los cuales se describen a continuación, sin poner mayor énfasis en los detalles de la técnica. La máquina (electrocardiógrafo) se conecta en dos puntos sobre el cuerpo del paciente, por ejemplo en el brazo derecho y por arriba de la muñeca y en la pierna izquierda, por arriba del tobillo. (Este procedimiento se conoce con el nombre de guía II.) La corriente gene-

Figura 20.

Fuente: Rainville (1981)

rada por la actividad del corazón se hace pasar de la pierna izquierda del paciente a través del galvanómetro y después hacia el brazo derecho del paciente cerrando de esta manera el circuito. El electrocardiógrafo mide un voltaje asociado a dicha corriente y lo registra sobre una gráfica a una escala deseada. El resultado que se obtiene es un electrocardiograma (guía II) el cual forma parte de la numerosa colección de datos estudiados por los médicos antes de llegar a un diagnóstico.

La porción dañada de un corazón presentará una resistencia total o parcial al flujo de la corriente eléctrica y alterará la apariencia del electrocardiograma. La forma, el tamaño y la localización de la parte que está causando las desviaciones con respecto al funcionamiento normal servirá como índice para determinar el carácter de la enfermedad o lesión presentes. Se usan varias guías o combinaciones de lugares donde se conecta el galvanómetro al cuerpo.

Por medio de las teorías físicas, los experimentos en el laboratorio y las observaciones directas de los pacientes, los médicos y electrocardiólogos han acumulado gran cantidad de datos sobre las correlaciones entre los diferentes electrocardiogramas, lo cual les permite establecer las variaciones que se aparten de lo normal y determinar de esta manera las enfermedades y lesiones cardiacas.

Supongamos que t sea el tiempo medido en segundos y $2t_2$ la duración de un periodo como se muestra en la Figura 19, escojamos como origen el punto medio de alguno de los periodos representativos, en él $t = 0$ y sea $F_2(t)$ la ordenada como se muestra en el electrocardiograma (guía II). Entonces $F_2(t)$ tendrá un periodo $2t_2$,

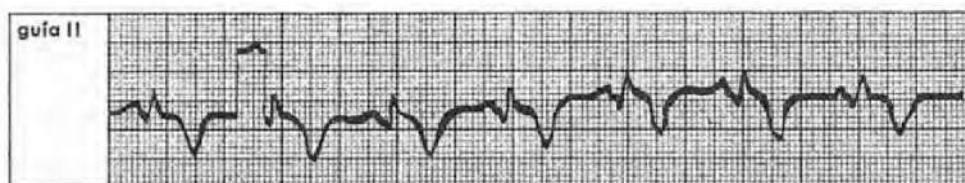
$$1) F_2(t + 2t_2) = F_2(t)$$

Para $F_2(t)$ habrá un desarrollo en serie de Fourier,

$$2) F_2(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{nt\pi}{t_2} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{nt\pi}{t_2} \right) \right),$$

para que los coeficientes a_n y b_n pueden determinarse directamente de los datos gráficos haciendo uso de medios mecánicos, por ejemplo un analizador armónico.

Figura 21.



Fuente: Rainville (1981)

Ahora, suponga que el desarrollo en serie de Fourier, que se hizo anteriormente de la función, representado en el electrocardiograma (guía II) haya sido obtenido de personas normales de ambos sexos y cuyos pesos y edades no difieran significativamente, a fin de que sea posible registrar cualquier cambio notable. Una vez que se tiene la información anterior, puede desarrollarse en serie de Fourier la $F_2(t)$ de un paciente dado y comparar los coeficientes que se obtengan con aquellos que se consideren normales. Lo mismo puede hacerse con electrocardiogramas de otras guías.

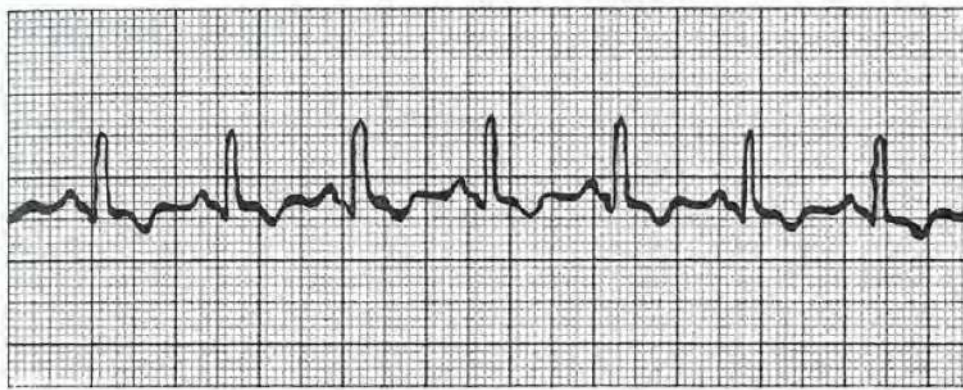
Es fácil ver que los coeficientes en la serie de Fourier para $F_2(t)$ tendrán marcados cambios conforme pasamos de la Figura 19 hasta la Figura 22. La Figura 19 es un ejemplo de un electrocardiograma normal. Las Figuras 20 y 21 se hicieron durante el diagnóstico y tratamiento de un paciente que sufría una trombosis coronaria. La Figura 21 muestra un electrocardiograma del mismo paciente tomado muchos años después.

La identificación de los cambios en los coeficientes en la serie de Fourier asociados

con cada una de las lesiones o enfermedades cardiacas, o bien con cualquier otro fenómeno puede ser interesante y concebiblemente útil. En varios centros médicos se están haciendo investigaciones al respecto.

Un avance importante hacia la comprensión de la situación matemática puede obtenerse por medio de desarrollos explícitos de diferentes electrocardiogramas ideales. Podemos, por ejemplo, ajustar la curva por medio de segmentos de rectas, o bien por medio de rectas y segmentos de curvas polinomiales simples. Debido a que es aplicable el principio de superposición podemos incluso dividir el trabajo, al obtener los

Figura 22.



Fuente: Rainville (1981)

desarrollos en serie de Fourier de las diferentes funciones, cada uno de estos desarrollos correspondería únicamente a la porción del electrocardiograma que tuviese significado desde el punto de vista médico y considerando nula la parte restante de cada uno de los periodos. El autor ha encontrado muy útiles tales idealizaciones para la comprensión de los cambios en los coeficientes en las series de Fourier. En el *Journal of the British Institution of Radio Engineers*, 1949, páginas 170-183, W. E. Benham publicó un análisis de Fourier de algunos electrocardiogramas idealizados.

La importancia de ciertas peculiaridades que tienen una alta frecuencia y que no se registran en los electrocardiogramas convencionales, pero cuya presencia es notable en aquellos que se han hecho con osciloscopios que tienen escalas de tiempo muy amplias, están siendo estudiadas por el doctor Paul H. Langner Jr., director de la Provident Mutual Life Insurance Company de Filadelfia. El doctor Langner actualmente está haciendo estudios de las curvas que representan derivadas temporales de las funciones en los electrocardiogramas. La derivada presenta de una manera natural y en una forma muy marcada cualesquiera fluctuaciones a alta frecuencia de la función original.

3.3. La serie de Fourier en las ecuaciones diferenciales no ordinarias

Muchos problemas importantes de las matemáticas aplicadas dan origen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Una ecuación diferencial en derivadas parciales o no ordinaria es una relación que contiene una o más funciones de varias variables y sus derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

es una ecuación diferencial no ordinaria para la función $u(x, t)$, y las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y'} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

son un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$. El orden de una ecuación diferencial en derivadas parciales es el mayor de los órdenes de las derivadas que aparecen en la ecuación. Por ejemplo, el orden de la ecuación no ordinaria

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u$$

es 2, ya que el mayor de los órdenes presentes en esta ecuación es 2. Hay tres ecuaciones clásicas en derivadas parciales, de orden 2, que aparecen con frecuencia en las aplicaciones de las series de Fourier y que dominan en la teoría de las ecuaciones diferenciales no ordinarias. Tales ecuaciones son

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.3)$$

La ecuación (3.1) se conoce como la **ecuación de calor**, y aparece en el estudio de la transferencia de calor y en procesos de difusión. Por ejemplo, considérese una barra metálica delgada de longitud l y cuya superficie está aislada térmicamente. Denótese por $u(x, y)$ la temperatura de la barra en el punto x en el instante t . Esta función satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales (3.1) para $0 < x < l$. La constante α^2 se denomina difusividad térmica o conductividad termométrica de

la barra, y depende únicamente del material de la barra.

La ecuación (3.2) se conoce como la **ecuación de onda**, y aparece en el estudio de las ondas sonoras, acuáticas y electromagnéticas. En cualquier análisis matemático de fenómenos en los que interviene la propagación de ondas en un medio continuo, aparece, casi invariablemente, alguna forma de esta ecuación o de alguna de sus generalizaciones. La ecuación de onda aparece también en el estudio de vibraciones mecánicas. Suponga por ejemplo, una cuerda de guitarra o un cable de retención, de modo que vibre en un plano vertical. Denotado por $u(x, t)$ al desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x en el instante t .

Si los efectos de amortiguamiento, como la resistencia del aire, son despreciables, y si la amplitud del movimiento no es demasiado grande, entonces $u(x, t)$ satisface la ecuación en derivadas parciales (3.2) en el intervalo $0 \leq x \leq l$. En este caso, la constante c^2 es $\frac{H}{\rho}$, donde H es la componente horizontal de la tensión en la cuerda, y ρ es la masa de la cuerda por unidad de longitud.

La ecuación (3.3) se denomina **ecuación de Laplace** y es la más famosa de las ecuaciones diferenciales no ordinarias. Dicha ecuación surge en el estudio de fenómenos tan diversas como el flujo de calor régimen permanente, vibración de membranas y potenciales eléctricos y gravitacionales. Esa es la razón por la que se conoce también como la **ecuación de potencial**.

Además de las ecuaciones diferenciales (3.1), (3.2) o (3.3), se exige también, con frecuencia, que la función u satisfaga condiciones iniciales y a la frontera. Tales condiciones están determinadas por los mismos problemas físicos o biológicos, se les elige de modo que garanticen la existencia de una solución única de la ecuación.

Como modelo para la ecuación de calor (3.1), se considera una delgada barra de metal de longitud l y cuyos extremos están aislados. Se denota por $u(x, t)$ la temperatura de la barra en el punto x en el instante t . Para determinar la temperatura de la barra par todo tiempo t es necesario conocer a) la distribución inicial de la temperatura en la barra, y b) lo que ocurre en los extremos de ésta. ¿Se les mantiene a temperatura constante, por ejemplo, a 0°C , o se encuentran aislados, de modo que no permitan el paso de calor? (esta ultima condición implica que $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.) Así pues, un problema bien planteado para procesos de difusión es la ecuación de calor (3.1) junto con la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < l$ y las condiciones a la frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$, o bien $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Como modelo para la ecuación de onda, considere una cuerda flexible de longitud l , cuyos extremos se hallan fijos, y la cual es puesta en movimiento en un plano vertical. Para determinar la posición $u(x, t)$ de la cuerda par atodo tiempo t es necesario conocer a) la posición inicial de la cuerda, y b) la velocidad inicial de

la cuerda. Se sobreentiende también que $u(0, t) = u(l, t) = 0$. así pues, un problema bien planteado para la propagación de ondas es la ecuación (3.2) junto con las condiciones iniciales $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, y las condiciones a la frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

La ecuación en derivadas parciales (3.3) no incluye el tiempo t , de modo que no se espera tener “condiciones iniciales” en este caso. En los problemas que surgen en las aplicaciones se tienen los valores de u , o bien los de su derivada normal, en la frontera de una región dada R , y se busca determinar $u(x, y)$ en el interior de R . El problema de encontrar una solución de la ecuación de Laplace, que toma valores prefijados en la frontera, se conoce como **problema de Dirichlet**, mientras que el problema de hallar una solución de la ecuación de Laplace, cuya derivada normal toma valores prefijados a la frontera, se denomina **problema de Neumann**.

3.3.1. La ecuación de calor; separación de variables

Considere el problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l; \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3.4)$$

El objetivo es encontrar la solución $u(x, t)$ de (3.4). Para ello, es útil recordar cómo se resolvió el problema de valor inicial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0; \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \quad (3.5)$$

Primero se señaló que la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \quad (3.6)$$

es lineal, es decir, que cualquier combinación lineal de soluciones de (3.6) es también una solución de (3.6). Después se encontró la solución $y(t)$ de (3.5) tomando una combinación lineal apropiada $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ de dos soluciones linealmente independientes $y_1(t)$ y $y_2(t)$ de (3.6). Ahora bien, se puede verificar fácilmente que cualquier combinación lineal $c_1 u_1(x, t) + \dots + c_n u_n(x, t)$ de soluciones $u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)$ de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

es también una solución de (3.7). Además, si $u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)$ satisfacen las condiciones a la frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$, entonces la combinación lineal $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ satisface también las condiciones de frontera. Esto sugiere la si-

guiente “estrategia” para resolver el problema de valores a la frontera (3.4):

- a) Encontrar tantas soluciones $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots$ como sea posible al problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3.8)$$

- b) Hallar la solución $u(x, t)$ de (3.4) tomando una combinación lineal apropiada de funciones $u_n(x, t)$, para $n = 1, 2, \dots$

- a) Dado que, hasta el momento, no se sabe cómo resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales, es necesario reducir el problema de resolver (3.8) al de resolver una o más ecuaciones diferenciales ordinarias. Lo anterior se logra tomando $u(x, T) = X(x)T(t)$ (de aquí el nombre de separación de variables). Calculando

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT' \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

se ve que $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de la ecuación

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \left(u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

si

$$XT' = \alpha^2 X''T. \quad (3.9)$$

Al dividir entre $\alpha^2 XT$ ambos lados de (3.9), se obtiene

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}. \quad (3.10)$$

Ahora bien, se observa que el primer miembro de (3.10) es una función sólo de x , mientras que el segundo miembro es una función de t únicamente. Eso implica que

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \text{y} \quad \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda \quad (3.11)$$

para alguna constante λ . (La única manera de que una función de x sea igual a una de t es que ambas sean iguales a una constante. Para comprobar, haga $f(x) = g(t)$ y fije t_0 . Entonces $f(x) = g(t_0)$ para toda x , de modo que $f(x) = \text{constante} = c_1$, lo cual implica de inmediato que $g(t)$ también es igual a c_1 .) Además, las condiciones de frontera

$$0 = u(0, t) = X(0)T(t), \quad \text{y} \\ 0 = u(l, t) = X(l)T(t)$$

implican que $X(0) = 0$ y $X(l) = 0$ (de otro modo, u sería igual a cero). Así pues, $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de (3.8) si

$$X'' + \lambda X = 0 : X(0) = 0, X(l) = 0 \quad (3.12)$$

y

$$T' + \lambda \alpha^2 T = 0. \quad (3.13)$$

En este momento, la constante λ es arbitraria. Sin embargo, se conoce que el problema de valores en la frontera (3.12) tiene una solución no trivial $X(x)$ solamente si $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, $n = 1, 2, \dots$; y en tal caso $X(x) = X_n(x) = \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right)$.

La ecuación (3.13) implica a su vez que $T(t) = T_n(t) = e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}}$.

(En realidad, se deberían multiplicar tanto $X_n(x)$ y $T_n(t)$ por constantes; sin embargo, dichas constantes se omiten aquí debido a que un poco más adelante se tomarán combinaciones lineales de las funciones $X_n(x)T_n(t)$.) Por lo tanto,

$$u_n(x, t) = \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}}$$

es una solución no trivial de (3.8) para todo entero positivo n .

b) Suponga que $f(x)$ es una combinación lineal finita de funciones $\text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right)$, es

$$\text{decir } f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right).$$

Entonces, $u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}}$, es la solución buscada de (3.4), ya que es una combinación lineal de soluciones de (3.8) y satisface la condición inicial

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^N c_n \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) = f(x), \quad 0 < x < l.$$

Sin embargo, la mayoría de las funciones $\text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right)$, para $n = 1, 2, \dots$, en el intervalo $0 < x < l$. Esto lleva a plantearse la siguiente pregunta, ¿Es posible escribir una función cualquiera $f(x)$ como una combinación lineal infinita de funciones $\text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right)$, para $n = 1, 2, \dots$, en el intervalo $0 < x < l$? Dicho de otro modo, dada una función arbitraria f , ¿pueden encontrarse constantes c_1, c_2, \dots , tales que

$$f(x) = c_1 \text{sen} \left(\frac{x\pi}{l} \right) + c_2 \text{sen} \left(\frac{x2\pi}{l} \right) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right); \quad 0 < x < l?$$

La respuesta a esta pregunta es sí; se tiene que si se elige

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) dx,$$

entonces la **serie de Fourier** $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right)$ converge a $f(x)$ si f es continua en el punto x . De modo que

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) dx \right] \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}},$$

siendo esta la solución que se buscaba.

Ejemplo 3.3.1: Ecuación de calor

Se calienta una barra delgada de aluminio ($\alpha^2 = 0,86 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$) de 10 cm de largo a una temperatura uniforme de 100C. En el instante $t = 0$, se colocan los extremos de la barra en baño de hielo a 0C, con lo que mantiene su temperatura a dicho nivel. No se permite la disipación de calor a través de la superficie lateral de la barra. Hallar una expresión para la temperatura en cualquier punto de la barra y para todo tiempo futuro t .

Solución

Se denota por $u(x, t)$ la temperatura de la barra en el punto x en el instante t . Esta función satisface el problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,86 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \begin{cases} u(x, 0) = 100, & 0 < x < 10 \\ u(0, t) = u(10, t) = 0 \end{cases}.$$

La solución es $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{10} \right) e^{-0,86n^2\pi^2 \frac{t}{100}}$, donde

$$c_n = \frac{1}{5} \int_0^{10} 100 \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{10} \right) dx = \frac{200}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

Note que, $c_n = 0$ si n es par, y $c_n = \frac{400}{n\pi}$ si n es impar. Por lo tanto, la solución en serie de Fourier es

$$u(x, t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1) \frac{x\pi}{10}}{2n+1} e^{-0,86(2n+1)^2\pi^2 \frac{t}{100}}.$$



Ejemplo 3.3.2: Ecuación de calor

Considerar una barra delgada de metal de longitud l y conductividad termo-métrica α^2 , cuyos extremos se encuentran aislados de tal forma, que no hay flujo de calor a través de ellos. Sea $f(x)$ la distribución de temperaturas en la barra para todo tiempo futuro t .

Solución

Se denota $u(x, t)$ la temperatura de la barra en el punto x en el instante t . Esta función satisface el problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), & 0 < x < l \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \end{cases}.$$

Este problema se resolverá en dos pasos. Primero, se encontrará una infinidad de soluciones $u_n(x, T) = X_n(x)T_n(t)$ del problema de valores a la frontera $u_t = \alpha^2 u_{xx}$; y $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$, posteriormente se hallarán constantes c_0, c_1, c_2, \dots , tales que $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x, t)$ satisfagan la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$.

Primer paso: Sea $u(x, t) = X(x)T(t)$. Calculando $\frac{\partial u}{\partial t} = XT'$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$ se ve que $u(x, t)$ es una solución de $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ si

$$XT' = \alpha^2 X''T, \quad \text{o bien} \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}. \quad (3.14)$$

Como se mostró en la sección 3.3, la ecuación (3.14) implica que $X'' + \lambda X = 0$ y $T' + \lambda \alpha^2 T = 0$ para alguna constante λ . Además, las condiciones a la frontera $0 = u_x(0, t) = X'(0)T(t)$ y $0 = u_x(l, t) = X'(l)T(t)$ implican que $X'(0) = 0$ y $X'(l) = 0$. Por lo tanto, $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de $u_t = \alpha^2 u_{xx}$; y $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$, si

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \quad (3.15)$$

y

$$T' + \lambda \alpha^2 T = 0. \quad (3.16)$$

En este momento, la constante λ es arbitraria. Sin embargo, el problema de valores a la frontera (3.15) tiene una solución no trivial $X(x)$, solamente si $\lambda = n^2 \frac{\pi^2}{l^2}$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, y en tal caso $X(x) = X_n(x) = \cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right)$.

La ecuación (3.16) implica entonces que $T(t) = e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}}$. Por lo tanto,

$$u_n(x, t) = \cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}}$$

es una solución de $u_t = \alpha^2 u_{xx}$; y $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$, para todo entero no negativo n .

Segundo paso, observe que la combinación lineal

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}}$$

es formalmente una solución de $u_t = \alpha^2 u_{xx}$; y $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$, para cualquier elección de constantes c_0, c_1, c_2, \dots . Su valor inicial es

$$u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right).$$

De modo que, para satisfacer la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se deben elegir constantes c_0, c_1, c_2, \dots tales que

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Dicho de otro modo, es necesario desarrollar f en una serie de Fourier en el intervalo $0 \leq x \leq l$. Por lo tanto, se concluye que

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right) dx.$$

En consecuencia,

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(x) \cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right) dx \right] \cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}}$$

es la solución buscada.



Observación 3.3.1

Observe que a partir de

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right) dx \right] \cos\left(\frac{nx\pi}{l}\right) e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 \frac{t}{l^2}}$$

la temperatura de la barra tiende finalmente a la temperatura de régimen permanente

$$\frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx.$$

Esta temperatura de régimen permanente puede ser interpretada como el “promedio” de la distribución inicial de temperaturas en la barra.

3.3.2. La ecuación de onda

Considere ahora el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

el cual caracteriza la propagación de ondas en diferentes medios y a las vibraciones mecánicas de una cuerda flexible. También este problema puede resolverse por el método de separación de variables. Concretamente se hará lo siguiente: a) encontrar soluciones $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ del problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (3.17)$$

y b) hallar la solución $u_t(x, t)$, tomando una combinación lineal adecuada de las funciones $u_n(x, t)$.

a) Sea $u(x, t) = X(x)T(t)$. Al calcular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT'' \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$$

se ve que $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ si $XT'' = c^2 X''T$, o bien si

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}. \quad (3.18)$$

Observe, además, que el primer miembro de (3.18) es sólo función de t , mientras que el segundo término es función de x únicamente. Esto implica que

$$\frac{T''}{c^2T} = -\lambda = \frac{X''}{X}$$

para una constante λ . Además, las condiciones de frontera $0 = u(0, t) = X(0)T(t)$, y $0 = u(l, t) = X(l)T(t)$ implican que $X(0) = 0$ y $X(l) = 0$. Por lo tanto, $u(x, t) = X(x)T(t)$ es una solución de (3.17) si

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X(0) = X(l) = 0 \quad \text{y} \quad (3.19)$$

$$T'' + \lambda c^2 T = 0. \quad (3.20)$$

En este momento, la constante λ es arbitraria. Sin embargo, el problema de valores a la frontera (3.19) tiene una solución no trivial $X(x)$ solamente si $\lambda = \lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{l^2}$, y en tal caso

$$X(x) = X_n(x) = \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right).$$

La ecuación (3.20) implica entonces que

$$T(t) = T_n(t) = a_n \cos \left(\frac{nct\pi}{l} \right) + b_n \text{sen} \left(\frac{nct\pi}{l} \right).$$

Por lo tanto, $u_n(x, t) = \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) \left[a_n \cos \left(\frac{nct\pi}{l} \right) + b_n \text{sen} \left(\frac{nct\pi}{l} \right) \right]$ es una solución no trivial de (3.17) para todo entero positivo n , y para cualquier par de constantes a_n, b_n .

b) La combinación lineal

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) \left[a_n \cos \left(\frac{nct\pi}{l} \right) + b_n \text{sen} \left(\frac{nct\pi}{l} \right) \right]$$

satisface formalmente el problema de valores a la frontera (3.17) y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) \quad \text{y} \quad u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{l} b_n \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right).$$

Así pues, para satisfacer las condiciones iniciales $u(x, 0) = f(x)$ y $u_t(x, 0) = g(x)$, es necesario elegir las constantes a_n y b_n , de modo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{l} b_n \text{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right)$$

en el intervalo $0 < x < l$. dicho de otro modo, es necesario desarrollar las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en series de Fourier en el intervalo $0 < x < l$. Por lo que se concluye que

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^l g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) dx.$$

Para simplificar se analizará a continuación solamente el caso en el que $g(x)$ es igual a cero; es decir, la cuerda se suelta con velocidad inicial igual a cero. En tal caso, el desplazamiento $u(x, t)$ de la cuerda en cualquier momento $t > 0$ está dado por la fórmula

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{nct\pi}{l} \right); \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) dx. \quad (3.21)$$

Existe una interpretación física para varios de los términos en (3.21). Cada uno de éstos representa un modo particular con el cual vibra la cuerda. El primer término ($n = 1$) representa el primer modo de vibración con el cual oscila la cuerda alrededor de la posición de equilibrio con una frecuencia de

$$w_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi c}{l} = \frac{c}{2l} \text{ ciclos por segundo.}$$

La frecuencia más baja es conocida como la frecuencia fundamental, o primera armónica, de la vibración de la cuerda. De manera similar, el modo n tiene una frecuencia de

$$w_n = \frac{1}{2\pi} \frac{nc\pi}{l} = nw_1 \text{ ciclos por segundo,}$$

y se llama armónica n de la vibración de la cuerda.

En el caso de la cuerda vibrante, todas las frecuencias armónicas son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental w_1 . así que, en ese caso se produce sonido musical. Por supuesto que, si la tensión en la cuerda no es lo suficientemente grande, entonces el sonido que surge es de una frecuencia tan baja que no se encuentra en el intervalo audible. Conforme aumenta la tensión en la cuerda, se incrementa la frecuencia, dando como resultado una nota musical que puede ser percibida por el oído humano.

Justificación de la solución. No es posible demostrar directamente, como en el caso de la ecuación de calor, que la función $u(x, t)$ definida por (3.21) es una solución de la ecuación de onda. De hecho, ni siquiera es posible demostrar directamente que la serie infinita (3.21) tiene derivadas parciales con respecto a t y x . Por ejemplo, realizando un cálculo formal, se obtiene que

$$u_t = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc\pi}{l} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{nx\pi}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{nct\pi}{l} \right)$$

y debido a la presencia del factor n , puede ser que la serie no converja. Sin embargo, hay otra manera de establecer la validez de la solución (3.21). Al mismo tiempo, se obtendrá una mejor comprensión de la estructura de $u(x, t)$. Observe primero que

$$\sin\left(\frac{nx\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{nct\pi}{l}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) (x - ct) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) (x + ct) \right]$$

Sea además F la extensión periódica de f en el intervalo $-l < x < l$, es decir,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < l \\ -f(-x), & -l < x < 0 \end{cases} \quad \text{y } (F(x + 2l) = F(x)).$$

se puede verificar que la serie de Fourier de F es

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{nx\pi}{l}\right), \quad c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{l}\right) dx.$$

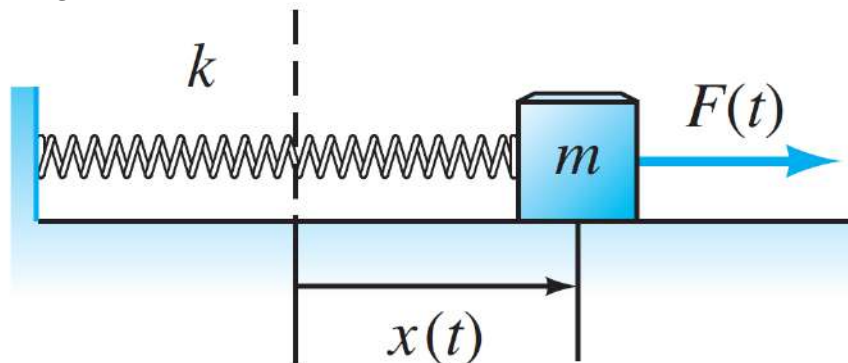
Por lo tanto, es posible escribir $u(x, t)$ en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [F(x - ct) + F(x + ct)] \quad (3.22)$$

y en este punto resulta fácil mostrar que $u(x, t)$ satisface la ecuación de onda si $f(x)$ tiene dos derivadas continuas.

3.4. Movimiento no amortiguado

Figura 23. Sistema masa-resorte con una fuerza externa



Fuente: Elaboración propia

Considere primero el movimiento no amortiguado de una masa m en un resorte con constante de Hooke k bajo la influencia de una fuerza externa periódica $F(t)$, como se indica en la Figura 23. Su desplazamiento $x(t)$ desde su posición de equilibrio

satisface la conocida ecuación

$$mx'' + kx = F(t). \quad (3.23)$$

La solución general de la ecuación (3.23) es de la forma

$$x(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + x_p(t), \quad (3.24)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del sistema, y $x_p(t)$ es una solución particular de la ecuación (3.23). Los valores c_1 y c_2 se determinan por las condiciones iniciales. Aquí se desea utilizar la serie de Fourier para encontrar una solución periódica particular de la ecuación (3.23). Ésta se representa por $x_{sp}(t)$, y se conoce como solución periódica estacionaria. Para simplificar, se considera que $F(t)$ es una función impar con periodo $2L$, de tal manera que su serie de Fourier tiene la forma

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{nt\pi}{L}\right). \quad (3.25)$$

Si $\frac{n\pi}{L}$ no es igual a ω_0 para cualquier entero positivo n , puede determinarse una solución periódica en estado permanente de la forma

$$x_{sp}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{nt\pi}{L}\right) \quad (3.26)$$

sustituyendo las series de las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.23) para encontrar los coeficientes de (3.26). El ejemplo 3.4.1 muestra este procedimiento.

Ejemplo 3.4.1: Movimiento no amortiguado

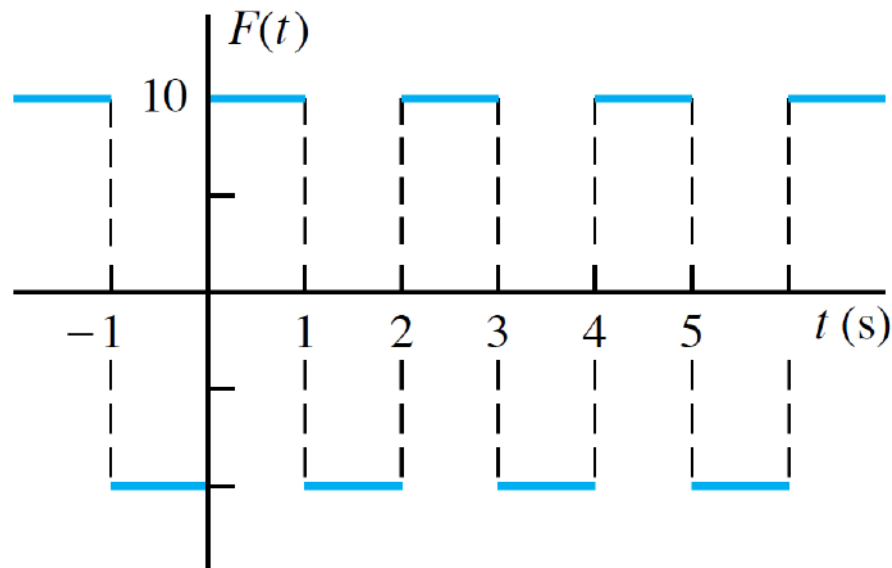
Suponga que $m = 2\text{kg}$, $k = 32\frac{\text{N}}{\text{m}}$ y que $F(t)$ es una fuerza periódica impar con periodo de 2 s dada en un periodo como

$$F(t) = \begin{cases} +10\text{N} & \text{si } 0 < t < 1 \\ -10\text{N} & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}. \quad (3.27)$$

Encontrar el movimiento periódico estacionario $x_{sp}(t)$.

Solución

la gráfica de la función de fuerza periódica $F(t)$ se muestra en la Figura 24. Primero, se necesita calcular los coeficientes a_n y b_n en la expansión de Fourier de $F(t)$. Dado que la función $F(t)$ es impar, solo tendremos términos seno en la serie de Fourier.

Figura 24. Función de fuerza periódica $F(t)$ 

Fuente: Elaboración propia

La fórmula general para los coeficientes en la serie de Fourier para una función periódica $F(t)$ en un período T es la siguiente:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

Dado que $T = 2$ s en este caso, podemos simplificar estas fórmulas a:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 F(t) \cos(n\pi t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 F(t) \operatorname{sen}(n\pi t) dt$$

Sustituyendo la definición de $F(t)$ dada en el intervalo $0 < t < 2$, podemos calcular los coeficientes a_n y b_n . Primero, comencemos con a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 F(t) \cos(n\pi t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 10 \cos(n\pi t) dt - \int_1^2 10 \cos(n\pi t) dt \right)$$

Ahora, evaluemos estas integrales por separado:

Para la primera integral:

$$\begin{aligned}\int_0^1 10 \cos(n\pi t) dt &= \frac{10}{n\pi} [\operatorname{sen}(n\pi t)]_0^1 \\ &= \frac{10}{n\pi} (\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(0))\end{aligned}$$

Dado que $\operatorname{sen}(0) = 0$ y $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para n impar, esta integral es cero para n impar. Para n par, obtendríamos un valor distinto de cero, pero en este caso, solo estamos interesados en los términos seno.

Ahora, evaluemos la segunda integral:

$$\begin{aligned}\int_1^2 10 \cos(n\pi t) dt &= \frac{10}{n\pi} [\operatorname{sen}(n\pi t)]_1^2 \\ &= \frac{10}{n\pi} (\operatorname{sen}(2n\pi) - \operatorname{sen}(n\pi))\end{aligned}$$

Dado que $\operatorname{sen}(2n\pi) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para todos los valores de n , esta integral también es cero para todos los valores de n .

Por lo tanto, hemos demostrado que todos los coeficientes a_n son cero para n impar.

Ahora, calculemos los coeficientes b_n :

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 F(t) \operatorname{sen}(n\pi t) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 10 \operatorname{sen}(n\pi t) dt - \int_1^2 10 \operatorname{sen}(n\pi t) dt \right)\end{aligned}$$

Nuevamente, evaluemos estas integrales por separado:

Para la primera integral:

$$\begin{aligned}\int_0^1 10 \operatorname{sen}(n\pi t) dt &= -\frac{10}{n\pi} [\cos(n\pi t)]_0^1 \\ &= -\frac{10}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0))\end{aligned}$$

Dado que $\cos(0) = 1$ y $\cos(n\pi) = (-1)^n$ (es decir, $\cos(n\pi) = -1$ para n impar y $\cos(n\pi) = 1$ para n par), podemos escribir:

$$\int_0^1 10 \operatorname{sen}(n\pi t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{20}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ahora, evaluemos la segunda integral:

$$\begin{aligned} \int_1^2 10 \operatorname{sen}(n\pi t) dt &= -\frac{10}{n\pi} [\cos(n\pi t)]_1^2 \\ &= -\frac{10}{n\pi} (\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)) \end{aligned}$$

Al igual que antes, $\cos(2n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, por lo que podemos escribir:

$$\int_1^2 10 \operatorname{sen}(n\pi t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{20}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Hemos calculado los coeficientes b_n para n tanto par como impar.

Ahora, podemos escribir la serie de Fourier para $F(t)$ utilizando estos coeficientes b_n :

$$F(t) = \frac{40}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\operatorname{sen}(nt\pi)}{n} \quad (3.28)$$

note que sólo contiene términos correspondientes a n impar. Cuando se sustituye esta serie y

$$x_{sp}(t) = \sum_{n \text{ impar}} b_n \operatorname{sen}(nt\pi), \quad (3.29)$$

una solución de prueba de esta forma que sólo contiene términos impares en la ecuación (3.23) con $m = 2$ y $k = 32$, se obtiene

$$\sum_{n \text{ impar}} b_n (-2n^2\pi^2 + 32) \operatorname{sen}(nt\pi) = \frac{40}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\operatorname{sen}(nt\pi)}{n}.$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes, el resultado es

$$b_n = \frac{20}{n\pi(16 - n^2\pi^2)} \text{ para } n \text{ impar.}$$

Por tanto

$$x_{sp}(t) = \frac{20}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\operatorname{sen}(nt\pi)}{n(16 - n^2\pi^2)}. \quad (3.30)$$

El hecho de que cada término de la ecuación (3.30) es simétrico alrededor de $t = \frac{1}{2}$, sugiere que $x_{sp}(t)$ es máxima cuando $t = \frac{1}{2}$. Considerando lo anterior, se encuentra que la amplitud del movimiento periódico estacionario es

$$x_{sp}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{20}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n(16 - n^2\pi^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Los primeros 100 términos llegan al valor correcto con cuatro cifras decimales $x\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1,0634\text{m}$

■

3.5. Resonancia pura

Si existe un término $B_N \operatorname{sen}\left(\frac{Nt\pi}{L}\right)$ diferente de cero en la solución de la serie de Fourier de la función de fuerza $F(t)$ en la ecuación (3.23) para la cual $\frac{N\pi}{L} = \omega_0$, entonces este término causa **resonancia pura**. La razón es que la ecuación

$$mx'' + kx = B_N \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

tiene la solución de resonancia

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t)$$

si $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. En este caso la solución correspondiente a la ecuación (3.26) es entonces

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t) + \sum_{n \neq N} \frac{B_N}{m(\omega_0^2 - n^2 \frac{\pi^2}{L^2})} \operatorname{sen} \frac{nt\pi}{L}. \quad (3.31)$$

Ejemplo 3.5.1: Resonancia pura

Suponga que $m = 2\text{kg}$, $k = 32\frac{N}{m}$ como en el ejemplo 3.4.1. Determinar cuándo ocurrirá resonancia pura si $F(t)$ es la función periódica impar definida en un periodo como

$$\begin{aligned} \text{a) } F(t) &= \begin{cases} +10 & \text{si } 0 < t < \pi \\ -10 & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases} \\ \text{b) } F(t) &= 10t, \quad -\pi < t < \pi. \end{aligned}$$

Solución

a) La frecuencia natural es $\omega_0 = 4$, y la serie de Fourier de $F(t)$ es

$$F(t) = \frac{40}{\pi} \left(\text{sen}(t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5t) + \dots \right).$$

Debido a que la serie no contiene término $\text{sen}(4t)$, no se presenta resonancia.

b) En este caso la serie de Fourier es

$$F(t) = 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nt).$$

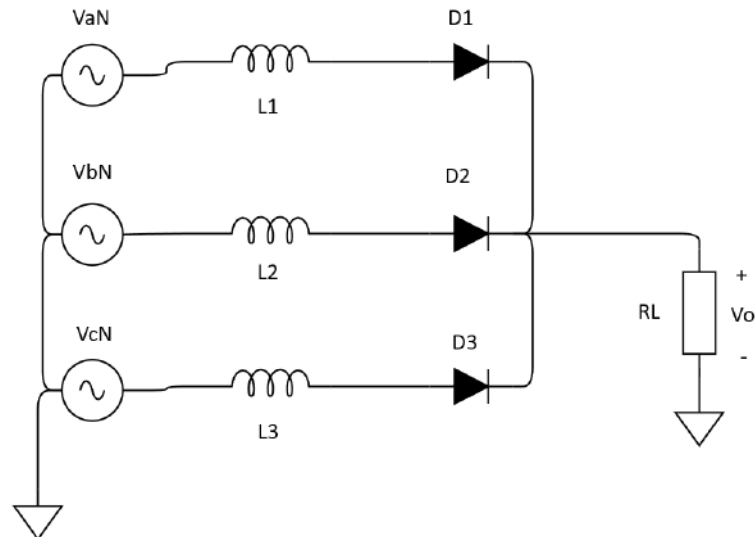
Aquí sí se presenta resonancia pura debido a la presencia del término con factor $\text{sen}(4t)$.

■

3.6. Rectificador trifásico de media onda no controlado

En la Figura 25 se muestra el circuito del rectificador trifásico de media onda no controlado. En la Figura 25 se presenta la forma de onda construida mediante el análisis

Figura 25. Circuito rectificador de media onda no controlado

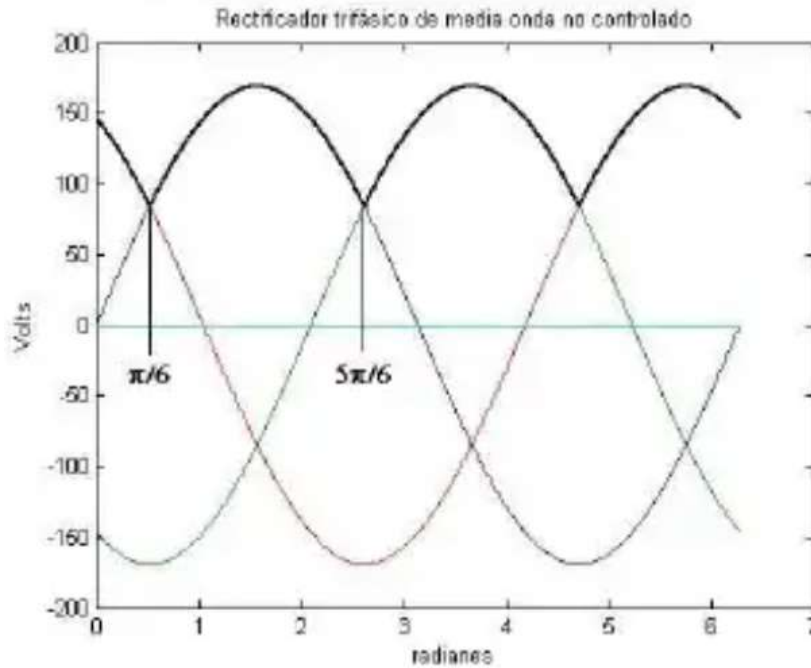


Fuente: Elaboración propia

de las series de Fourier, considerando una amplitud del voltaje pico sinusoidal de 163 volts, con $n = 50$ armónicos. Para construir la forma de onda del rectificador trifásico de media onda no controlado, se aplican las fórmulas de la serie de Fourier

$$V_0(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(3n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)] \quad (3.32)$$

Figura 26. Circuito rectificador de media onda no controlado



Fuente: Elaboración propia

Donde,

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(\omega t) d\omega t \\
 a_n &= \int_0^T f(\omega t) \cos(3n\omega t) d\omega t \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(\omega t) \sin(3n\omega t) d\omega t, \text{ para} \\
 f(\omega t) &= V_p \sin(\omega t) \text{ cuando } \frac{\pi}{6} \leq \omega t \leq \frac{5\pi}{6}.
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

La forma de onda de la señal de salida se vuelve repetitiva en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$; observe que la forma de onda del voltaje de salida es de una frecuencia tres veces mayor que la frecuencia de la señal de entrada, ya que el voltaje de entrada tiene periodo de 2π y la señal de salida tiene un periodo $\frac{2\pi}{3}$. En base a las fórmulas anteriores y considerandolos límites correspondientes, se calculan los valores respectivos.

Cálculo del coeficiente a_0 , aplicando los valores correspondientes a la ecuación

(3.33) para calcular a_0 , se tiene que,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} V_p \operatorname{sen}(wt) dwt = \frac{3V_p}{\pi} \left[-\cos(wt) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{3V_p}{\pi} \left[-\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{3V_p}{\pi} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= \frac{3\sqrt{3}V_p}{\pi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a_0 = \frac{3\sqrt{3}V_p}{\pi} \quad (3.34)$$

Cálculo del coeficiente a_n para todo n de la ecuación (3.33), se aplican los parámetros correspondientes para calcular la serie de Fourier de a_n .

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} V_p \operatorname{sen}(wt) \cos(nwt) dwt = \frac{3V_p}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \operatorname{sen}(wt) \cos(3nwt) dwt$$

Aplicando la fórmula,

$$\int \operatorname{sen}(px) \cos(qx) dx = -\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)}.$$

Donde $p = 1$, $q = 3$, $x = wt$ por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3V_p}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \operatorname{sen}(wt) \cos(3nwt) dwt \\ &= \frac{3V_p}{\pi} \left(-\frac{\cos((1-3n)(wt))}{2(1-3n)} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{\cos((1+3n)(wt))}{2(1+3n)} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \right) \\ &= \frac{3V_p}{\pi} \left(-\frac{\cos\left((1-3n)\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}{2(1-3n)} + \frac{\cos\left((1-3n)\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2(1-3n)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos\left((1+3n)\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}{2(1+3n)} + \frac{\cos\left((1+3n)\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2(1+3n)} \right) \\ &= \frac{3V_p}{\pi} \left(\frac{-\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{15n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3n\pi}{6}\right)}{2(1-3n)} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3V_p}{\pi} \left(\frac{-\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{15n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3n\pi}{6}\right)}{2(1+3n)} \right) \\
& = \frac{3V_p}{2\pi} \left(\frac{(1+3n) \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{15n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3n\pi}{6}\right) \right)}{(1-3n)(1+3n)} + \right. \\
& \quad \left. \frac{(1-3n) \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{15n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3n\pi}{6}\right) \right)}{(1-3n)(1+3n)} \right) \\
& = \frac{3V_p}{2\pi(1-9n^2)} \left[(1+3n) \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{15n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3n\pi}{6}\right) \right) + \right. \\
& \quad \left. (1-3n) \left(-\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{15n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3n\pi}{6}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
a_n & = \frac{3V_p}{2\pi(1-9n^2)} \left[-\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{15n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3n\pi}{6}\right) \right. \\
& \quad - 3n \cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{15n\pi}{6}\right) + 3n \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3n\pi}{6}\right) \\
& \quad - \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{15n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3n\pi}{6}\right) \\
& \quad \left. + 3n \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{15n\pi}{6}\right) - 3n \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3n\pi}{6}\right) \right] \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la siguiente identidad trigonométrica

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \pm \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \tag{3.36}$$

se prosigue a desarrollar cada uno de los términos de a_n de la ecuación (3.35), obteniendo los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
-\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{15n\pi}{6}\right) & = -\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{15n\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{15n\pi}{6}\right) \\
& = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{5n\pi}{2}\right). \\
\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3n\pi}{6}\right) & = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{3n\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{6}\right) \\
& = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-3n \cos \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{15n\pi}{6} \right) &= -3n \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{15n\pi}{6} \right) - 3n \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{15n\pi}{6} \right) \\
&= \frac{3n\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) - \frac{3n}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right). \\
3n \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{3n\pi}{6} \right) &= 3n \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{3n\pi}{6} \right) + 3n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3n\pi}{6} \right) \\
&= \frac{3n\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{3n}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right). \\
-\cos \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{15n\pi}{6} \right) &= -\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{15n\pi}{6} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{15n\pi}{6} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right). \\
\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{3n\pi}{6} \right) &= \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{3n\pi}{6} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3n\pi}{6} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right). \\
3n \cos \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{15n\pi}{6} \right) &= 3n \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{15n\pi}{6} \right) - 3n \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{15n\pi}{6} \right) \\
&= -\frac{3n\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) - \frac{3n}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right). \\
-3n \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{3n\pi}{6} \right) &= -3n \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{3n\pi}{6} \right) + 3n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{3n\pi}{6} \right) \\
&= -\frac{3n\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{3n}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right).
\end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{3V_p}{2\pi(1-9n^2)} \left[\sqrt{3} \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 3n \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. 3n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \\
&= \frac{3\sqrt{3}V_p}{2\pi(1-9n^2)} \left[\cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \sqrt{3}n \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{3}n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Cambiando los dos últimos términos de posición para aplicar la identidad correspondiente

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{3\sqrt{3}V_p}{2\pi(1-9n^2)} \left[\left(\cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{3}n \left(\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) \right) \right] \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Aplicando en la ecuación (3.37) las fórmulas (3.38) y (3.39)

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \quad (3.38)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{A-B}{2} \right) \quad (3.39)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3\sqrt{3}V_p}{2\pi(1-9n^2)} \left[2 \cos \left(\frac{5n\pi + n\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{5n\pi - n\pi}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. 2\sqrt{3}n \cos \left(\frac{\frac{n\pi}{2} + \frac{5n\pi}{2}}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{n\pi}{2} - \frac{5n\pi}{2}}{2} \right) \right] \\ &= \frac{3\sqrt{3}V_p}{\pi(1-9n^2)} \left[\cos \left(\frac{3n\pi}{2} \right) \cos(n\pi) + \sqrt{3}n \cos \left(\frac{3n\pi}{2} \right) \operatorname{sen}(-n\pi) \right] \end{aligned}$$

Como $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y $\operatorname{sen}(-n\pi) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ entonces el coeficiente a_n es

$$a_n = \frac{3\sqrt{3}V_p(-1)^n}{\pi(1-9n^2)} \cos \left(\frac{3n\pi}{2} \right) \quad (3.40)$$

Ahora, se procede al cálculo de b_n para todo n , aplicando la ecuación (3.33) para calcular b_n mediante series de Fourier. Observe que al igual que en el caso de a_n , la forma de onda del voltaje de salida del rectificador tiene como periodo el triple de la frecuencia de la señal que se analiza. Sustituyendo los valores correspondientes se tiene que

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} V_p \operatorname{sen}(wt) \operatorname{sen}(3nwt) dt = \frac{3V_p}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \operatorname{sen}(wt) \operatorname{sen}(3nwt) dt.$$

Aplicando la fórmula

$$\int \operatorname{sen}(px) \operatorname{sen}(qx) dx = \frac{\operatorname{sen}(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\operatorname{sen}(p+q)x}{2(p+q)} \quad (3.41)$$

Como $p = 1, q = 3n, x = wt$, entonces

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{3V_p}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \text{sen}(wt) \text{sen}(3nwt) dwt = \frac{3V_p}{\pi} \left[\frac{\text{sen}((1-3n)(wt))}{2(1-3n)} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\text{sen}((1+3n)(wt))}{2(1+3n)} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \right] \\
 &= \frac{3V_p}{\pi} \left[\frac{\text{sen}((1-3n)(\frac{\pi}{6}))}{2(1-3n)} - \frac{\text{sen}((1-3n)(\frac{5\pi}{6}))}{2(1-3n)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\text{sen}((1+3n)(\frac{\pi}{6}))}{2(1+3n)} + \frac{\text{sen}((1+3n)(\frac{5\pi}{6}))}{2(1+3n)} \right] \\
 &= \frac{3V_p}{\pi} \left(\frac{\text{sen}(\frac{5\pi}{6} - \frac{15n\pi}{6}) - \text{sen}(\frac{\pi}{6} - \frac{3n\pi}{6})}{2(1-3n)} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\text{sen}(\frac{5\pi}{6} + \frac{15n\pi}{6}) + \text{sen}(\frac{\pi}{6} + \frac{3n\pi}{6})}{2(1+3n)} \right) \\
 &= \frac{3V_p}{2\pi(1-9n^2)} \left((1+3n) \left(\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5n\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{n\pi}{2}\right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1-3n) \left(\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5n\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}\right) \right) \right) \\
 b_n &= \frac{3V_p}{2\pi(1-9n^2)} \left(\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5n\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{n\pi}{2}\right) \right. \\
 &\quad + 3n \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5n\pi}{2}\right) - 3n \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{n\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5n\pi}{2}\right) \\
 &\quad \left. + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}\right) + 3n \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5n\pi}{2}\right) - 3n \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}\right) \right) \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Aplicando la identidad trigonométrica (3.43) en la ecuación (3.42)

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen} A \cos B \pm \cos A \text{sen} B \quad (3.43)$$

Desarrollando cada uno de los términos de b_n se obtiene

$$\begin{aligned}
 \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5n\pi}{2}\right) &= \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \text{sen}\left(\frac{5n\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}\left(\frac{5n\pi}{2}\right). \\
 -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{n\pi}{2}\right) &= -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3n \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5n\pi}{2} \right) &= 3n \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) - 3n \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{3n\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + \frac{3n}{2} \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right). \\
-3n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{n\pi}{2} \right) &= -3n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + 3n \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{3n\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{3n}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right). \\
-\operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5n\pi}{2} \right) &= -\operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) - \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right). \\
\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2} \right) &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right). \\
3n \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5n\pi}{2} \right) &= 3n \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + 3n \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) \\
&= -\frac{3n\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + \frac{3n}{2} \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right). \\
-3n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2} \right) &= -3n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 3n \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \\
&= -\frac{3n\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \frac{3n}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right).
\end{aligned}$$

Reduciendo los términos semejantes se tiene,

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{3V_p}{2\pi(1-9n^2)} &\left[\sqrt{3} \operatorname{sen} \left(\frac{5n\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right. \\
&\left. + 3n \cos \left(\frac{5n\pi}{2} \right) - 3n \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Luego, aplicando las siguientes identidades trigonométricas,

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A - \cos B = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{B-A}{2} \right)$$

Sustituyendo, se obtiene

$$b_n = \frac{3V}{2\pi(1-9n^2)} \left[2\sqrt{3} \operatorname{sen} \left(\frac{3n\pi}{2} \right) \cos(n\pi) + 6n \operatorname{sen} \left(\frac{3n\pi}{2} \right) \operatorname{sen}(-n\pi) \right]$$

Como $\text{sen}(n\pi) = \text{sen}(-n\pi) = 0$ y $\text{cos}(n\pi) = (-1)^n$, entonces el coeficiente b_n esta determinado como

$$b_n = \frac{3\sqrt{3}V_p(-1)^n}{\pi(1-9n^2)} \text{sen}\left(\frac{3n\pi}{2}\right).$$

Una vez obtenidos los coeficientes, se proceda a dar la serie de Fourier que permitirá graficar la forma de onda de salida del sistema rectificador trifásico de media onda no controlado, entonces sustituyendo los valores obtenemos

$$V_0(\omega t) = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}V_p(-1)^n}{\pi(1-9n^2)} \left[\cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \cos(3n\omega t) + \frac{3\sqrt{3}V_p(-1)^n}{\pi(1-9n^2)} \text{sen}(3n\omega t) \right]$$

3.7. Cálculo de la temperatura de la tierra

Un problema sencillo pero muy interesante es el de calcular la temperatura de la Tierra a una profundidad x a partir de la temperatura de la superficie. Describamos la temperatura de la superficie terrestre como una función f periódica en el tiempo t y de período 1 (un año). La temperatura $u(t, x)$ en el tiempo $t \geq 0$ y profundidad $x \geq 0$ es también periódica en t , y es natural asumir que $|u| \leq \|f\|_{\infty}$. Bajo estas circunstancias, $u(t, x)$ puede ser expandida mediante una serie de Fourier para cada x fijo, $0 \leq x < \infty$, como sigue:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) e^{i2\pi n t}, \quad (3.45)$$

con coeficientes de Fourier

$$c_n(x) = \int_0^1 u(t, x) e^{-i2\pi n t} dt. \quad (3.46)$$

Sabemos que la función u satisface la ecuación diferencial parcial conocida como la Ecuación del Calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (3.47)$$

por lo tanto,

$$c_n''(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{-i2\pi n t} dt = 2 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i2\pi n t} dt = 4\pi i n c_n \quad (3.48)$$

En otras palabras, los coeficientes c_n satisfacen la ecuación:

$$c_n''(x) = [(2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}(1 \pm i)]^2 c_n. \quad (3.49)$$

tomando el signo positivo o negativo de acuerdo a si $n > 0$ ó $n < 0$. Por otra parte, sabemos que $c_n(0) = \int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt} dt = \hat{f}(n)$. Resolviendo la ecuación, obtenemos que

$$c_n(x) = \hat{f}(n)e^{[-(2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}(1 \pm i)]x} \quad (3.50)$$

y por lo tanto resulta finalmente

$$u(t, x) = \sum_n \hat{f}(n)e^{-(2\pi|n|)^{\frac{1}{2}}x}. \quad (3.51)$$

Supongamos, por ejemplo, que la temperatura de la superficie viene dada por una función sinusoidal simple $f(t) = \text{sen}(2\pi t)$, (lo cual significa que la temperatura anual media $\hat{f}(0) = f$ es cero). En este caso, la función vendrá dada por:

$$u(t, x) = \exp(-\sqrt{2\pi x}) \text{sen}(2\pi t - \sqrt{2\pi x}). \quad (3.52)$$

Esta fórmula nos dice que la temperatura a la profundidad $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ queda afectada por el factor $e^{-\pi}$ y está completamente fuera de fase con respecto a las estaciones.

3.8. El problema isoperimétrico

En este apartado se da una hermosa y elegante solución al que demostró ser uno de los más complejos problemas de la geometría plana: el famoso problema isoperimétrico.

Teorema 3.8.1: Problema isoperimétrico

Si \mathcal{C} es una curva cerrada simple de clase \mathcal{C}^∞ (funciones que son continuas y tienen una derivada continua (primer derivada) en todo su dominio) y de longitud 1, entonces el área A encerrada por \mathcal{C} satisface la desigualdad $A \leq \frac{1}{4\pi}$. La igualdad se satisface si y sólo si \mathcal{C} es una circunferencia. En consecuencia, entre todas las curvas cerradas simples de longitud 1 la que encierra mayor área es la circunferencia.

Demostración

Supongamos que la curva \mathcal{C} está parametrizada en la forma $(x(t), y(t))$, donde el parámetro t representa la longitud de arco. En virtud del teorema de Stokes

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\partial\mathcal{C}} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x \dot{y} - y \dot{x}) dt \\
 &= \frac{1}{2} ((\hat{x}, \hat{y})_{l_2} - (\hat{y}, \hat{x})_{l_2}) \quad (\text{Parseval}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} ((\hat{x})^{\bar{\hat{y}}} - \hat{y}^{\bar{\hat{x}}})(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in\pi(\bar{\hat{x}}\hat{y} - \hat{x}\bar{\hat{y}})(n) \quad \text{En virtud del lema 3.8.1} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} in\pi 2i \text{Im}(\overline{\hat{x}(n)}\hat{y}(n)) = -2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \text{Im}(\overline{\hat{x}(n)}\hat{y}(n)).
 \end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que la curva \mathcal{C} tiene perímetro 1, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \|\hat{x}\|_{l_2} + \|\hat{y}\|_{l_2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2 \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 4\pi^2 n^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2) = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2).
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{4\pi} - A \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[n^2 (|\hat{x}|^2 + |\hat{y}|^2) + 2n \text{Im}(\overline{\hat{x}(n)}\hat{y}(n)) \right].$$

Escribamos $\hat{x} = \alpha + i\beta, \hat{y} = \gamma + i\delta$, entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{4\pi} - A \right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 2n(\alpha\delta - \beta\gamma) \\
 &= \sum_{n \neq 0} [(n\alpha + \delta)^2 + (n\beta - \gamma)^2 + (n^2 - 1)(\delta^2 + \gamma^2)] \geq 0.
 \end{aligned}$$

Luego $A \leq \frac{1}{4\pi}$, que es precisamente el área encerrada por una circunferencia de longitud 1. Supongamos ahora que se satisface la igualdad $A = \frac{1}{4\pi}$ y demostremos que la curva \mathcal{C} es una circunferencia. En efecto, si $A = \frac{1}{4\pi}$, entonces

$$\sum_{n \neq 0} [(n\alpha + \delta)^2 + (n\beta - \gamma)^2 + (n^2 - 1)(\delta^2 + \gamma^2)] = 0.$$

Esta última relación implica que si $|n| \geq 2$, entonces $\delta = \gamma = \alpha = \beta = 0$, y sí $|n| = 1$, entonces $\alpha(\pm 1) = \pm\delta(\pm 1)$ y $\beta(\pm 1) = \pm\gamma(\pm 1)$. Por otra parte, $\alpha(1) = \text{Re}(\hat{x}(1)) = \int_0^1 x(t) \cos(2\pi t) dt = \alpha(-1)$, similarmente $\beta(1) = \text{Im}(\hat{x}(1)) = \int_0^1 x(t) \sin(2\pi t) dt = -\beta(-1)$. Análogamente, $\gamma(1) = \gamma(-1)$ y $\delta(1) = -\delta(-1)$.

Desarrollando las funciones $x(t)$ y $y(t)$ en series de Fourier, obtenemos entonces que

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) e^{2in\pi t} = \hat{x}(0) + 2\alpha(1) \cos(2t\pi) - 2\beta(1) \sin(2t\pi) \quad (3.53)$$

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{y}(n) e^{2in\pi t} = \hat{y}(0) + 2\beta(1) \cos(2t\pi) + 2\alpha(1) \sin(2t\pi). \quad (3.54)$$

Luego, de las ecuaciones (3.53) y (3.54) se deduce que

$$(x(t) - x(0))^2 + (y(t) - y(0))^2 = 4(\alpha(1)^2 + \beta(1)^2).$$

En otras palabras la curva \mathcal{C} es una circunferencia. ■

Lema 3.8.1

Si $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$, entonces $\hat{f}'(n) = \frac{1}{2in\pi} \hat{f}(n)$.

Demostración

$\hat{f}'(n) = \int_0^1 f'(x) e^{-2\pi inx} dx$. Integrando por partes obtenemos que

$$\hat{f}'(n) = e^{-2\pi inx} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) e^{-2\pi inx} (-2\pi in) dx = 2\pi in \hat{f}(n)$$
■



epoch

**Dirección de Bibliotecas y
Recursos del Aprendizaje**

**UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y
DOCUMENTAL**

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 03/ 01/ 2024

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: Marco Vinicio Parra Chávez
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemático
f. Analista de Biblioteca responsable: Ing. Rafael Inty Salto Hidalgo

1995-DBRA-UPT-2023