



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

JUSTIFICACIÓN TEÓRICA DEL MODELADO MATEMÁTICO
CINEMÁTICO DE UN ROBOT MANIPULADOR DE CUATRO
GRADOS DE LIBERTAD

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTOR: FERNANDA ANALHY CÁCERES NUÑEZ

DIRECTOR: Ing. MARÍA JOSÉ MENDOZA SALAZAR MSc.

Riobamba – Ecuador

2023

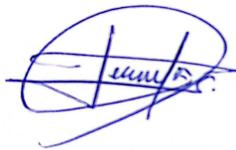
©2023, Fernanda Analhy Cáceres Nuñez

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Fernanda Analhy Cáceres Nuñez, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular. El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 21 de diciembre de 2023

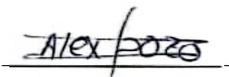
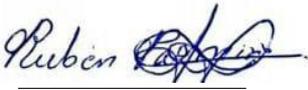


Fernanda Analhy Cáceres Nuñez

060611157-3

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular: Tipo: Proyecto de Investigación. **JUSTIFICACIÓN TEÓRICA DEL MODELADO MATEMÁTICO CINEMÁTICO DE UN ROBOT MANIPULADOR DE CUATRO GRADOS DE LIBERTAD**, realizado por: **FERNANDA ANALHY CÁCERES NUÑEZ**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

| | FIRMA | FECHA |
|--|--|--------------|
| Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo PRESIDENTE DEL TRIBUNAL |  | 2023-12-21 |
| Ing. María José Mendoza Salazar DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR |  | 2023-12-21 |
| Dr. Rubén Antonio Pazmiño Maji ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR |  | 2023-12-21 |

DEDICATORIA

Este esfuerzo quiero dedicarle a Adán, Heidi y Alex.

También a la Fernanda de años pasados y futuros porque siempre puede hacer todo lo que se propone.

Fernanda

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a Dios por darme todo lo que necesité para llegar hasta aquí, a mis padres Hugo y Marianela por siempre guiarme hacia el camino correcto, a Kelly, Yuli, Matias y Francisco por ser las luces de mi vida y finalmente a Estefania y Eliza por enseñarme que la amistad verdadera si existe.

Fernanda

ÍNDICE DE CONTENIDOS

| | |
|--|-----------|
| RESUMEN | ix |
| ABSTRACT | x |
| INTRODUCCIÓN | 1 |
| | |
| CAPÍTULO I | |
| | |
| 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN | 5 |
| 1.1. Planteamiento del problema | 5 |
| 1.2. Objetivos | 5 |
| 1.2.1. <i>Objetivo general</i> | 5 |
| 1.2.2. <i>Objetivos específicos</i> | 6 |
| 1.3. Justificación | 6 |
| 1.4. Hipótesis o pregunta de investigación | 7 |
| 1.4.1. <i>Hipótesis</i> | 7 |
| 1.4.2. <i>Pregunta de investigación</i> | 7 |
| | |
| CAPÍTULO II | |
| | |
| 2. MARCO TEÓRICO | 8 |
| 2.1. Referencias Teóricas | 8 |
| 2.1.1. <i>Sistemas robóticos</i> | 9 |
| 2.1.2. <i>Conceptos básicos</i> | 12 |
| 2.1.3. <i>Modelo Geométrico</i> | 13 |
| 2.1.4. <i>Modelo Cinemático</i> | 14 |
| 2.1.5. <i>Singularidades</i> | 17 |
| | |
| CAPÍTULO III | |
| | |
| 3. MARCO METODOLÓGICO | 18 |
| 3.1. Descripción del enfoque, alcance y diseño de la investigación | 18 |

CAPÍTULO IV

| | | |
|---------------|---|-----------|
| 4. | MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS | 20 |
| 4.1. | Resultado | 20 |
| 4.1.1. | <i>Estructura del documento referencial guía</i> | 21 |

CAPÍTULO V

| | | |
|-------------|---|-----------|
| 5. | CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES | 23 |
| 5.1. | Conclusiones | 23 |
| 5.2. | Recomendaciones | 24 |

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

RESUMEN

En el contexto de aplicación de la matemática, el modelado de sistemas físicos es un tema de interés y un desafío persistente tanto para los aprendices como para los docentes, por lo tanto el objetivo de la presente investigación fue describir de forma detallada la justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad. La metodología del presente trabajo fue desarrollada bajo un enfoque cualitativo, utilizando un diseño de investigación documental. Debido a que se recolectó información sobre el problema a tratar a través de fuentes bibliográficas verídicas como lo son artículos científicos y libros. Además se detalló las características más importantes de la investigación tales como definiciones y la obtención analítica de las ecuaciones. A través de estos aspectos metodológicos se logra la cristalización de un documento referencial sobre el modelado matemático cinemático, cuyo resultado fundamental queda plasmado en tres capítulos: el primero, la descripción del sistema donde se especifica los componentes y estructura del robot quedando predeterminada una configuración de un robot manipulador de cuatro grados de libertad con articulaciones rotacionales; el segundo, el modelo geométrico plantea las ecuaciones de cada sistema de referencia con respecto a sus articulaciones; el tercero, modelo cinemático que describe analíticamente la trayectoria espacial del robot como una función del tiempo y en particular por las relaciones entre la posición y orientación del extremo final del robot con los valores angulares de las articulaciones. Este material servirá como instrumento alternativo para la enseñanza y aprendizaje de una aplicación de la matemática. Se concluye que a través de este documento referencial se pueda contribuir al desarrollo de trabajos en esta área y a la contextualización matemática de los mismos.

Palabras clave: <MODELADO GEOMÉTRICO>, <MODELADO CINEMÁTICO>, <ROBOT MANIPULADOR>, <GRADOS DE LIBERTAD>, <JACOBIANA>.

0203-DBRA-UPT-2024



ABSTRACT

In the context of mathematical application, the modeling of physical systems is an interest topic as well as a challenge for both, students and teachers; thus, the aim of the current research was to describe in detail the theoretical justification of the mathematical kinematic modeling of a robot which manipulates four degrees of freedom. The methodology of the current research had a qualitative approach and used a documental design, since the information about the problem to be studied was gathered from reliable bibliographic sources such as scientific papers and books. In addition, the most important characteristics of the research like definitions and the analytical obtention of equations were detailed. Through the use of these methodological aspects, it was possible to obtain a referential document on the kinematic and mathematical model, its main result evidences three chapters: The first one has to do with the description of the system which specifies the components and structure of the robot, predefining a configuration for a four degree of freedom robot with rotational joints; in the second one, the geometric model proposes the equations of each referential system; regarding its joints, the third one has to do with the cinematic model which analytically describes the spatial trajectory of the robot as a time function and particularly the relationship existing between the position and orientation of the end of the robot with the angular values of the joints. This material will be used as an alternative instrument for the teaching and learning of a mathematical application; thus, it is concluded that by means of this referential document, it is possible to contribute to the development of work in this area and to their mathematical contextualization.

Keywords: <GEOMETRIC MODELING>, <KINEMATIC MODELING>, <MANIPULATOR ROBOT>, <DEGREES OF FREEDOM>, <JACOBIAN>.



Lic. Paul Ronaldo Armas Pesantes Mgs.

C.C. 0603289877

INTRODUCCIÓN

El conocer, entender y aplicar la matemática brinda la posibilidad de desarrollar la habilidad de razonamiento lógico y de resolución de problemas de la vida real. El modelado matemático proporciona un marco formal para comprender y explicar sistemas físicos complejos del mundo real. Al representar sistemas mediante ecuaciones matemáticas, se pueden identificar relaciones y patrones subyacentes que de otro modo podrían ser difíciles de percibir; facilitando la investigación científica y el desarrollo tecnológico.

La construcción de modelos matemáticos es un proceso crucial que comienza con la identificación clara de un fenómeno o sistema a estudiar, seguido por la formulación matemática de relaciones entre variables clave. Esta formulación da lugar a la construcción de ecuaciones o algoritmos los cuales son validados, ajustados y utilizados para simular y analizar el comportamiento del sistema.

Un sistema físico se comporta conforme el un conjunto de condiciones presentes, es decir que existen varias posibilidades de actuación, el predecir este comportamiento ayuda mucho a la toma de decisiones ya sea de recursos o de acciones a efectuar. Con la ayuda del modelado y la simulación se puede plantear sistemas para predecir el comportamiento de los mismos. Esto resulta de gran ayuda dado que, una vez que se ha validado el modelo matemático propuesto se puede implementar el sistema real y comprobar su funcionamiento, o bien se lo puede simular para estimar la salida del sistema ante una determinada entrada, sin tener que ir al sistema físico a obtener su respuesta real, también es posible utilizar el modelo para diseñar estrategias de control del sistema (**Mendoza, 2022, pág. 6**)

Es importante tener en cuenta que solo se pueden construir modelos fiables, que se aproximan a la perfección, debido a que siempre se mantiene un margen de error al plantearlos, la exactitud del modelo matemático respecto al sistema físico casi nunca es alcanzada y depende en gran medida de la complejidad de las ecuaciones que se utilizan para describirlo. Un mismo sistema físico puede ser representado por varios modelos matemáticos. Esta aproximación será mejor en la medida que se hagan menos simplificaciones, o lo que es lo mismo, se considere un mayor número de variables involucradas en el sistema físico, lo cual conlleva ineludiblemente a una mayor complejidad de las ecuaciones del modelo matemático en cuestión (**Torrealba et al., 2006, pág. 122**).

En la robótica el modelado matemático es fundamental debido a su capacidad para representar precisamente los sistemas mecánicos, eléctricos y de control que componen a los robots. Estos modelos matemáticos permiten simular y predecir el comportamiento de los robots bajo ciertas condiciones, lo que facilita el diseño eficiente, la optimización de sus movimientos y la planificación de tareas. Al revisar el estado del arte se puede encontrar trabajos donde se introducen el uso de varias metodologías, técnicas y herramientas para establecer los modelos y optimizar el desempeño de los robots, de manera particular, los robots manipuladores. Por lo general, los sistemas de ecuaciones diferenciales, si están bien formulados, dan resultados bastante precisos, pero requieren de mucho trabajo computacional ya que sus expresiones tienen un alto contenido de no linealidad. Es por ello, que en aplicaciones robóticas, es de especial interés la eficiencia computacional a efectos de hacer simulación y control de la dinámica del mecanismo. Esto ha llevado a invertir grandes esfuerzos en el desarrollo de algoritmos que permitan implementar dichas acciones, manejando tiempos de procesamiento consistentes con los esperados del mecanismo en cuestiones de tiempo real. Sin embargo, el presente trabajo no está orientado hacia la implementación práctica de los modelos matemáticos obtenidos.

En la actualidad se está trabajando mayormente en el desarrollo de metodologías alternas a las clásicas para enfrentar el problema del modelaje de robots, así como en la búsqueda de soluciones que permitan implementar las metodologías clásicas de manera más expedita; sin embargo, ya no se trata sobre estas metodologías propiamente, y a esa dirección es la que apunta esta investigación. El presente trabajo está concebido como un instrumento referencial para ser usado en cursos de Modelado de robots manipuladores, o aplicaciones de Geometría y Álgebra Lineal. Al momento, existe poco material bibliográfico de apoyo donde se muestre de manera detallada, clara y sencilla los fundamentos de la obtención del modelado matemático de sistemas robóticos, sobre todo para la impartición de asignaturas relacionadas con el área. En este sentido, la intención de este trabajo es contribuir a llenar este espacio que muchas veces es dejado a un lado por los docentes e investigadores del área. En otras palabras, con miras a sentar una referencia documental para investigaciones futuras, en este trabajo se describe la justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad.

Según **(Reza, 2010, pág 59)**, el modelado matemático cinemático es crucial y esencial para la construcción del robot, en este caso, del manipulador de cuatro grados de libertad, puesto que, describe la relación geométrica entre los distintos eslabones y articulaciones del robot, permitiendo calcular la posición y orientación del extremo del manipulador en función de las posiciones de las

articulaciones.

Para el cumplimiento de los objetivos se llevará a cabo la documentación necesaria y relevante que se debe conocer para el modelado matemático a desarrollarse en base a los requerimientos del sistema. Tomando en cuenta la cinemática directa e inversa, velocidad cinemática, velocidad en el extremo terminal, la matriz jacobiana y sus singularidades. Una vez hallada las singularidades del sistema se plantea determinar como será el movimiento del mismo, los máximos y mínimos alcances en base a la descripción de los resultados de cálculos del modelado matemático cinemático obtenido usando la metodología de Denavit Hartenberg.

El documento referencial obtenido fue construido con una metodología de enfoque cualitativo ya que se busca profundizar en el planteamiento del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad, con un diseño de investigación documental. Bajo las bibliografías de **(Carrasco, 2019)**, **(López, 2008)** y **(Ruiz Otalora et al., 2022)** se plantea el modelado Geométrico, Cinemático y Dinámico, este último consta de simulaciones y aplicaciones directas a la Física, por lo que no se ha visto óptimo la inclusión a la presente guía de justificación teórica. Se consolidó a través de tres capítulos que describen de manera detallada la justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad, titulados de la siguiente manera: Capítulo I. Descripción del Sistema, donde se especifica en qué consiste el manipulador robótico: su estructura física y componentes, además de ciertas definiciones matemáticas que ayudan a su respectiva descripción; Capítulo II. Modelo Geométrico en el cual se visualiza el marco referencial del robot, sus componentes y las ecuaciones del sistema mediante la posición de sus variables y finalmente el Capítulo III. Modelo Cinemático, dividido en subtemas como Cinemática de posición directa e inversa en el cual se describe analíticamente la trayectoria del extremo final del manipulador en función de sus articulaciones y las variables de posición y orientación; Cinemática de velocidad directa e inversa que describe el movimiento del extremo final los cuales resultan de la composición de las velocidades lineales y angulares del robot.

Finalmente este trabajo se consolidó a través de cinco capítulos que se describen de la siguiente manera: el primer capítulo se inicia enmarcando el problema de investigación, se define el planteamiento del problema, se describe sus principales características para el desarrollo de la investigación, se plantea los objetivos general y específicos con la finalidad de tener una guía de cómo se llevó a cabo el estudio del tema planteado, se efectúa la justificación que fundamenta el

problema de investigación. En el segundo capítulo se expone los aspectos fundamentales del tema de estudio sustentados en bases bibliográficas de artículos, libros y tesis. En el tercer capítulo se describe el marco metodológico donde se especifica el enfoque, diseño, técnicas e instrumentos de investigación que se utilizaron. Luego, en el cuarto capítulo se expone el marco de análisis e interpretación de resultados en el que se presenta cómo se organizó el documento referencial que se propone. Finalmente en el quinto capítulo se muestra las conclusiones y recomendaciones de la investigación realizada.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

El problema principal al que se enfrentan estudiantes e investigadores para desarrollar trabajos aplicados a robots manipuladores es la poca información acerca de la obtención del modelo matemático; habitualmente hacen uso de modelos básicos y los adaptan a las características del sistema físico que van a desarrollar, sin embargo este modelo no es el que más se aproxima al sistema real y resulta que en su aplicación física es necesario efectuar correcciones de forma y de modelado.

El funcionamiento de los robots manipuladores de varios grados de libertad donde se requiere el análisis de su desempeño dentro del espacio articular no siempre cumple con las expectativas a las cuales se genera y visualiza su creación y simulación, sin embargo existe la selección correcta del sistema y las herramientas matemáticas las cuales nos permitirán describir y previsualizar su máximo y mínimo alcance.

Para solventar el poco material de apoyo que muestre de manera aplicada, clara y sencilla los fundamentos de la obtención del modelo matemático de sistemas robóticos, se pretende dejar como referencia didáctica para investigaciones futuras, este trabajo en el cual se describe de manera detallada mediante herramientas matemáticas, específicamente del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica, la obtención del modelado matemático cinemático directa e inversa de un robot manipulador de cuatro grados de libertad con cuatro articulaciones rotacionales, que permiten establecer un intervalo de ángulos sometidos a objeto de estudio dentro de las diversas metodologías disponibles para el presente trabajo.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Describir de forma detallada la justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de 4 grados de libertad, mediante la generación de una guía que servirá de apoyo para investigaciones futuras en esta rama.

1.2.2. Objetivos específicos

1. Realizar una revisión bibliográfica de la estructura física de los robots manipuladores y de modelos matemáticos utilizados en estos robots.
2. Seleccionar la estructura física del robot manipulador de cuatro grados de libertad del cual se obtendrá el modelamiento matemático.
3. Desarrollar la justificación teórica del modelado matemático donde se especifique en qué consiste el manipulador robótico: su estructura física y componentes, Modelo Geométrico, Cinemático y finalmente el sistema de ecuaciones diferenciales que lo caracterizan.
4. Elaborar la guía que presenta la justificación teórica del modelo matemático.

1.3. Justificación

El presente trabajo de integración curricular surge porque existe la necesidad de realizar una investigación de tipo documental acerca del modelado de sistemas robóticos debido a que contamos con poca información lo que impide un crecimiento tecnológico y académico el cual atenta con la educación teórica y práctica de los estudiantes al no poder interactuar con sistemas físicos, por lo que se busca generará un documento guía acerca del modelado Matemático Cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad.

La carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo no dispone de documentos guía los cuales describan a detalle el análisis y obtención de la cinemática directa e inversa del robot en cuestión, por lo que se plantea la necesidad de crear una guía de estudio la cual es afín a asignaturas como Álgebra Lineal, Geometría y Métodos Numéricos vistas y estudiadas dentro del pénsum de estudios.

Esta guía se presenta el análisis cinemático directo e inverso de un robot manipulador de cuatro grados de libertad, con 4 articulaciones rotacionales. El modelado matemático y su análisis fue ajustado a la configuración de construcción y a su ubicación espacial específica.

El presente trabajo de integración curricular está dirigido hacia los estudiantes de la carrera de Matemática y afines para el estudio de casos similares e investigaciones dentro de esta rama.

1.4. Hipótesis o pregunta de investigación

1.4.1. Hipótesis

Se puede generar una guía de estudio acerca del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad.

1.4.2. Pregunta de investigación

Cómo se puede diseñar una guía didáctica adecuada la cual permita describir de manera matemática la obtención del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad?

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Referencias Teóricas

Dentro de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en la Carrera de Matemática no se ha podido encontrar documentos guías acerca del modelado de robots sin el uso de metodologías clásicas como programas que facilitan la obtención de ecuaciones sin un enfoque matemático descriptivo.

En (Carrasco, 2019, pág. 18) se manifiesta que la falta de técnicas de aprendizaje, metodologías didácticas y el desconocimiento de la tecnología actual son factores limitantes al momento de la investigación y aprendizaje acerca del modelado y funcionamiento de robots y esto es una realidad, ya que al momento de la recolección de información, es difícil encontrar los fundamentos matemáticos de muchas de las ecuaciones ya planteadas.

Esta problemática no significa que el modelado de robots se debe obtener mediante las metodologías clásicas, más bien lo que se desea plantear es el avance de los sistemas robóticos así como la necesidad de incrementar las nuevas tecnologías para su mejor funcionamiento, por lo que se deben utilizar nuevas metodologías, fundamentos matemáticos, diseños de control e implementación los cuales nos permitan aplicar distintas resoluciones dependiendo del estudio del robot manipulador.

Los robots manipuladores son herramientas diseñadas para realizar tareas de manipulación o manejo de objetos. Se encuentran fabricados con barras rígidas que están conectadas a través de distintas articulaciones que permiten el movimiento y la firmeza del brazo robótico. Cabe recalcar que poseen una estructura firme, compuesta por secuencias estructurales rígidas que denominamos eslabones.

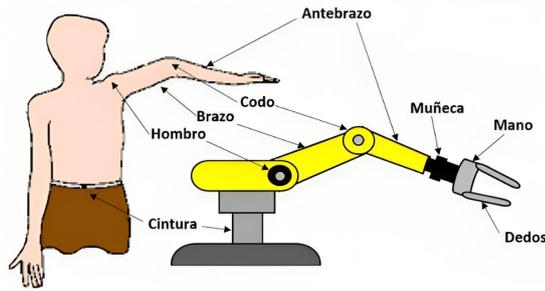


Figura 1-2 : Morfología Básica de un Robot Industrial

Fuente: (Carrasco, 2019).

Cuentan además con distintas articulaciones las cuales son prismáticas y rotacionales. El movimiento de cada articulación puede ser de desplazamiento y de giro. Cada uno de los movimientos independientes que pueden realizar las articulaciones con respecto a la anterior, se denomina grado de libertad (GDL). La estructura de este tipo de robots está compuesta por una serie de eslabones unidos por articulaciones, las cuales son de tipo lineal y se clasifican en: articulación prismática que trata de deslizamiento y traslación y articulación rotacional la cual un eslabón gira de acuerdo a un eje.

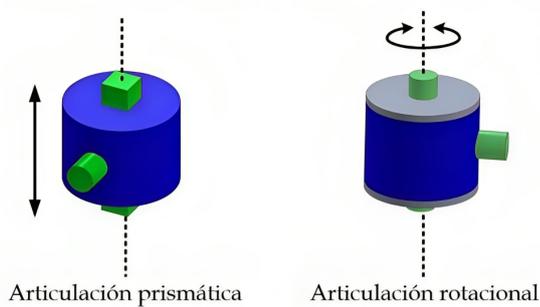


Figura 2-2 : Distintos tipos de articulaciones para robots.

Fuente: (Ordoñez et al., 2015).

2.1.1. Sistemas robóticos

Se puede pensar que un sistema físico robótico, se presenta como un conjunto de cuerpos rígidos conectados entre sí por cualquier tipo de sus articulaciones (pueden ser prismáticas o rotacionales) ya que, si se desea configurar cualquier otro tipo de articulación son siempre resultantes de las dos anteriores. Existen 72 configuraciones de manipuladores robóticos ya que cada articulación **(P)** o **(R)** y los ejes de dos articulaciones adyacentes pueden ser paralelos (\parallel), ortogonales (\perp) o perpendiculares (\perp) (Reza, 2010, pág. 8)

Existen una serie de sistemas de ejes principales que, por ser más utilizadas en la industria poseen denominaciones universalmente aceptadas. Estos sistemas físicos básicos son el robot cartesiano, cilíndrico, esférico, SCARA y angular.

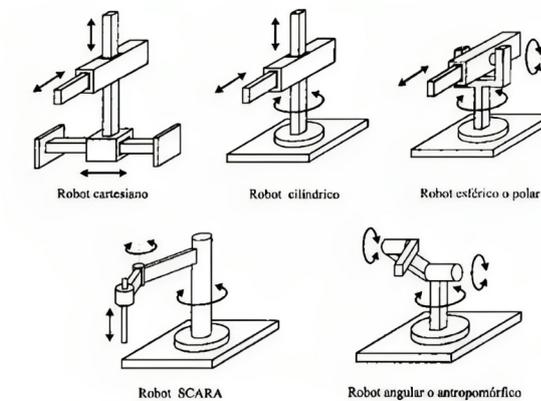


Figura 3-2 : Sistemas físicos para robots manipuladores

Fuente: (Mora, 2018).

La configuración de un robot se refiere a la posición y orientación relativa de sus componentes, como eslabones y articulaciones. Esta configuración determina cómo el robot puede moverse y posicionar sus partes móviles en el espacio. La siguiente tabla resume estas configuraciones y presenta sus ventajas y desventajas.

| Configuración | Descripción | Ventajas | Desventajas |
|---------------|---|--|--|
| Cartesiano | Utiliza coordenadas rectangulares para describir la posición en el espacio tridimensional. Común en sistemas con movimientos lineales, como robots cartesianos, (x, y, z) . | <ul style="list-style-type: none"> • Precisión en movimientos rectilíneos. • Simplicidad y facilidad de comprensión al momento del modelado. • Precisión en movimientos lineales. • Comúnmente utilizado en entornos industriales. | <ul style="list-style-type: none"> • Limitado en movimientos curvilíneos. • Requiere estructuras más complejas para realizar tareas que involucren movimientos curvilíneos o en entornos con espacio limitado. |

| | | | |
|------------|---|--|--|
| Cilíndrica | <p>Se basa en coordenadas cilíndricas, con un radio, un ángulo azimutal y una coordenada axial. Útil para sistemas con simetría cilíndrica, como manipuladores con brazos rotacionales, (α, ϕ, z).</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Eficiente para tareas con simetría cilíndrica. • Combina movimientos lineales y rotacionales. • Adecuado para manipuladores con brazos rotacionales. | <ul style="list-style-type: none"> • Menos preciso en movimientos lineales puros. • Puede experimentar singularidades en ciertas configuraciones que limitan su rango de movimiento. |
| Rotacional | <p>Puede utilizar coordenadas cilíndricas o cartesianas, destacando sistemas con rotación alrededor de un eje fijo. Adecuada para brazos robóticos con articulaciones rotacionales. (α, β, ρ).</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Ideal para manipulación de objetos. • Flexibilidad en movimientos rotacionales. • Adecuado para aplicaciones que requieren orientación específica, como soldadura o ensamblaje. • Movimiento de giro amplios y continuos. • Flexibilidad en la orientación del efector final. • Menos restricciones en el espacio de trabajo. | <ul style="list-style-type: none"> • Dificultad para movimientos lineales precisos. • Singularidades en ciertas configuraciones. |

| | | | |
|---------|---|--|---|
| Angular | <p>Emplea coordenadas esféricas, con un radio, un ángulo azimutal y un ángulo de elevación. Útil para sistemas que involucran movimientos angulares, como cámaras o sensores, (α, β, γ).</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Eficiente para tareas que necesiten rotación. • Ideal para tareas que involucran movimientos angulares, como seguimiento de objetos o posicionamiento de sensores. • Combina rotación y elevación. | <ul style="list-style-type: none"> • Puede ser menos intuitivo para ciertos usuarios. • Menos eficiente en movimientos lineales. • Puede experimentar singularidades en ciertas configuraciones. • Requiere técnicas adicionales para la planificación de trayectorias. |
|---------|---|--|---|

Tabla 1: Descripción, ventajas y desventajas de las distintas configuraciones de robots manipuladores.

Fuente: (Cáceres, F, 2023.)

El robot manipulador de cuatro grados de libertad motivo de estudio del presente trabajo es una representación de un sistema físico, que mediante la tabla anterior se ha seleccionado una configuración de cuatro articulaciones rotacionales debido a sus ventajas siendo la más óptima para brazos robóticos en espacios de trabajo para el movimiento de objetos, en comparación de los otros tipos de configuraciones. Los eslabones se caracterizan por encontrarse en un sistema de referencia tal como la posición de la base, que se encuentra fija en el plano superior horizontal por lo que la problemática se centra en el desconocimiento de la posición y orientación apta bajo las ventajas de esta configuración.

2.1.2. Conceptos básicos

Dada la problemática de cómo establecer los ejes de referencia para cada articulación presente en el robot se presenta la matriz de transformación homogénea.

Definición 2.1. Una matriz T es de transformación homogénea de dimensión 4×4 que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{bmatrix}$$

Donde, $R_{3 \times 3}$ que corresponde a una matriz de rotación; una submatriz $p_{3 \times 1}$ que corresponde al vector de traslación; una submatriz $f_{1 \times 3}$ que representa una transformación de perspectiva, y una submatriz $w_{1 \times 1}$ que representa un escalado global.

2.1.3. Modelo Geométrico

En (López, 2009, pág. 25) este sistema físico se puede simplificar al analizar sólo el movimiento en un plano en vez del movimiento en el espacio. Al tomar el sistema de coordenadas de referencia X_0, Y_0, Z_0 el efector final tendrá su posición definida por un vector del tipo (x, y, z) . Es importante mencionar que cuando el robot se encuentra en su espacio de trabajo el vector final será del tipo $(0, y, z)$ porque no habría desplazamiento en el eje X_0 perpendicular al plano.

De esta manera el efector final se cancelará y el sistema quedará en 3 grados de libertad, que es un sistema correcto, sin embargo para el presente trabajo bajo las referencias, se establece no cancelar el eje del efector final, el cual no reduce los grados de libertad del sistema, definiendo las ecuaciones de la siguiente manera:

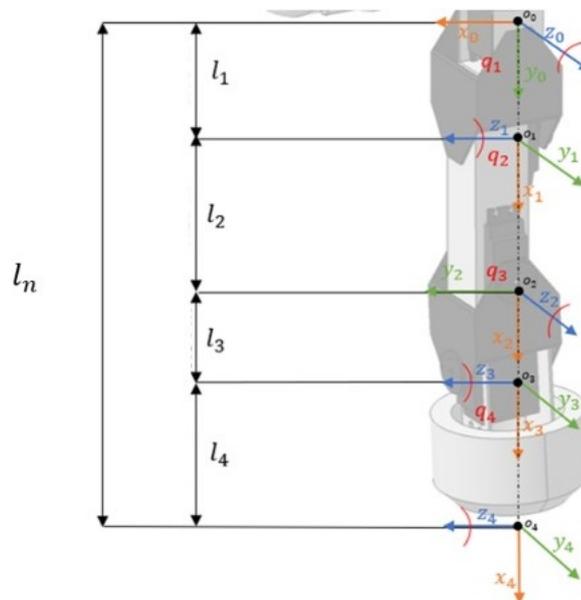


Figura 4-2 : Representación simbólica del brazo robótico de 4 GDL

Fuente: [Carrasco, 2019.]

Punto O_0 : $(0;0)$

Punto O_1 : $(l_1 \cos(q_1) ; l_1 \text{sen}(q_1))$

Punto O_2 : $(l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2); l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2))$

Punto O_3 : $(l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3); l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) + l_3 \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3))$

Punto O_4 : $(l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + l_4 \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4); l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) + l_3 \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3) + l_4 \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4))$

Generando las ecuaciones geométricas para un robot de 4 gdl rotacional:

1. Posición en el eje X:

$$x = (l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + l_4 \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)) \quad (2.1)$$

2. Posición en el eje Y:

$$y = l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) + l_3 \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3) + l_4 \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \quad (2.2)$$

3. Posición en el eje Z: Para conseguir la perpendicularidad con respecto a la superficie de trabajo se trabaja con una restricción más: $(90^\circ - q_1) + (180^\circ - q_2) + (180^\circ - q_3) + (90^\circ - q_4) = 360^\circ$.

$$z = f(q_1, q_2, q_3, q_4) \quad (2.3)$$

2.1.4. Modelo Cinemático

Como se establece en (López, 2008, pág 88), el diseño de un robot empieza con la cinemática del mismo, la cual trata del estudio analítico del movimiento de la descripción del sistema del robot con respecto a un eje de coordenadas de referencia fijo sin considerar las fuerzas externas que lo originan.

Los dos planteamientos más importantes de la cinemática del robot manipulador de cuatro grados de libertad es la obtención del modelo cinemático directo que consiste en la entrada de parámetros de los elementos y los desplazamientos en las articulaciones para conocer y verificar la posición y orientación final del sistema, y el modelo cinemático inverso que mediante la posición y orientación final se determina el desplazamiento de las articulaciones.

Cinemática directo de posición Previamente a la definición de matriz de transformación homogénea, se procede a colocar sistemas de coordenadas en cada una de las articulaciones. Esta

cinemática será de gran ayuda para poder expresar el movimiento del brazo robot de 4 GDL de tal manera que con los ángulos de las 4 articulaciones se pueda determinar la posición y orientación.

En **(Ruiz Ojalora et al., 2022 pág. 26)** permite encontrar una matriz de transformación A_0^4 que relaciona tanto la posición y orientación del extremo del robot con respecto a un sistema coordinado de referencia fijo, que por lo general es la base.

Esta relación se hace por medio de transformaciones homogéneas, en donde se asocian cada uno de los sistemas de coordenadas de los eslabones, a través de transformaciones, compuestas de traslaciones y giros básico con lo que el problema se reduce a encontrar las transformaciones necesarias para pasar desde el sistema de referencia hasta el extremo del robot.

$$A_0^4 = A_0^1 A_1^2 A_2^3 A_3^4 \quad (2.4)$$

Donde $A_0^1, A_1^2, A_2^3, A_3^4$ son las matrices de transformación de cada articulación.

Cinemática inversa de posición Para el presente trabajo bajo las referencias, se establece un sistema no lineal O_0^4 de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$O_0^4 = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 - l_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 \\ l_1 S_1 + l_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 \\ l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_3 S_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Donde F_x, F_y y F_z son funciones diferenciables dentro del intervalo de las posibles soluciones.

Bajo las referencias se plantea la solución del sistema mediante en método de Newton-Rhapson considerando la iteración:

$$\begin{bmatrix} q_{1+i} \\ q_{2+i} \\ q_{3+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} - [J(q_{1+i}, q_{2+i}, q_{3+i})]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Cinemática directa de velocidad Para realizar el estudio de la cinemática del manipulador, se continua con el cálculo de las velocidades en el extremo terminal lo cual resulta de la composición

de las velocidades lineales y angulares de los eslabones de la cadena cinemática.

$$\dot{X}_{(q)} = J_{(q)6 \times 6} * \ddot{q}_{6 \times 1} \quad (2.7)$$

Donde $\dot{X}_{(q)}$ es el vector estado de velocidad del efector final, dado por

$$\dot{X}_{(t)} = [v_x v_y v_z \omega_x \omega_y \omega_z]^T \quad (2.8)$$

Donde los tres primeros elementos representan la velocidad lineal del extremo terminal y los tres últimos elementos representan las velocidades angulares ($\omega_x \omega_y \omega_z$).

Se plantea la construcción de la **matriz jacobiana**, la cual bajo las referencias solamente se construyen mediante las derivadas de cada función y el cálculo empírico de sus ángulos, por lo que en este trabajo se plantea una resolución analítica a la obtención de la matriz jacobiana bajo las siguientes ecuaciones:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_i = (\vec{z}_0 \times \vec{t}_3^0 \cdot q_1) + (\vec{z}_1 \times \vec{t}_3^1 \cdot q_2) + (\vec{z}_2 \times \vec{t}_3^2 \cdot q_3) + (\vec{z}_3 \times \vec{t}_3^3 \cdot q_4) \quad (2.9)$$

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^4 \vec{w}_i = (\vec{z}_0 \cdot q_1) + (\vec{z}_1 \cdot q_2) + (\vec{z}_2 \cdot q_3) + (\vec{z}_3 \cdot q_4) \quad (2.10)$$

Cinemática inversa de velocidad En las principales bibliografías como lo son (Carrasco, 2019), (Ruiz Ojalora et al., 2022) y (Torrealba et al., 2006) se presenta la ecuación de la cinemática inversa, la cual es la siguiente:

$$\ddot{q}_{4 \times 1} = J_{(q)}^{-1} * \dot{X}_{(q)6 \times 1} \quad (2.11)$$

Sin embargo, no su resolución, por lo que se establece en este trabajo la existencia de la matriz pseudoinversa.

Definición 2.2. Existencia de la matriz pseudoinversa Sea $J_{(q)6 \times 4} \in M_{m \times n}$ tiene pseudoinversa por la izquierda si y solo si el rango de $J_{(q)6 \times 4} = n$ y se calcula:

$$J_{(q)4 \times 6}^+ = (J_{(q)4 \times 6}^t \cdot J_{(q)6 \times 4})^{-1} \cdot J_{(q)4 \times 6}^t \quad (2.12)$$

Una vez hallada la matriz pseudoinversa de dimensión 4×6 , de la ecuación 2.11, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\ddot{q}_{4 \times 1} = J_{(q)4 \times 6}^+ * \dot{X}_{(q)6 \times 1} \quad (2.13)$$

Dando paso a la obtención de los valores de las articulaciones mediante operaciones de matrices.

2.1.5. Singularidades

En **(Reza, 2010.)** y **(Ruiz Otalora et al., 2022)** mencionan que las singularidades son aquellas configuraciones que limitan el movimiento del robot manipulador debido a que corresponden a configuraciones desde/hacia las que el elemento terminal no puede trasladarse o rotar en alguna o algunas direcciones del espacio y, finalmente representan configuraciones en las que se requieren velocidades articulares no acotadas para obtener velocidades finitas del elemento terminal.

Con el procedimiento que **(Ruiz Otalora et al., 2022)** plantea, se determina que la configuración del sistema contribuye a la configuración juntamente con su funcionamiento y alcances. Finalmente, las singularidades representan configuraciones a partir de las cuales ciertas direcciones de movimiento pueden ser inalcanzables así como usualmente (más no siempre) corresponden a puntos en los límites del espacio de trabajo del manipulador, es decir, a puntos de máximo alcance del manipulador o también corresponden a puntos en el espacio de trabajo del manipulador que pueden ser inalcanzables bajo perturbaciones de los parámetros de los eslabones **(Reza, 2010, pág. 363)**.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción del enfoque, alcance y diseño de la investigación

El presente trabajo de titulación fue desarrollado bajo un enfoque cualitativo y un diseño de investigación documental, utilizando la perspectiva de **(Barbour, 2013, pág. 16)** la presente investigación pretende acercarse al fenómeno o sistema real, entender, describir y explicar el mismo analizando documentos o huellas similares de las experiencias o interacciones relacionadas con el modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad para una descripción detallada y su justificación teórica.

En base a este contexto se busca indagar en los aspectos esenciales del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad a partir de una recolección y análisis de información de libros, artículos científicos y tesis relacionados con el tema principal del presente trabajo.

Tomando como referencia lo que menciona **(Escudero y Cortez, 2018, pág. 20)** acerca de la investigación documental que es aquella estrategia que tienen como objetivo revisar y reflexionar sistemáticamente las realidades teóricas de diferentes fuentes y campos de la ciencia, examinando e interpretando sus datos, usando métodos e instrumentos que ayudan a lograr resultados que apoyen la creación científica. De esta manera la investigación documental guía el proceso de recopilación, análisis y selección acerca del tópico de modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad, con la finalidad de una utilización contextualizada del mismo.

Los aspectos mencionados en párrafos anteriores permitieron consolidar el documento referencial sobre la justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad que servirá como guía para quienes deseen conocer sobre el tema y la aplicación de la matemática en la robótica.

Los métodos y técnicas empleadas para alcanzar el propósito de la investigación se resumen en tres procesos: La revisión documental, el proceso de selección y análisis, y finalmente el desarrollo del documento referencial; los cuales se describen a continuación.

La revisión documental permite que se investigue, identifique, recopile y seleccione trabajos disponibles en repositorios académicos del internet, relevantes para la investigación sobre el modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad.

El proceso de selección y análisis de contenidos idóneos sobre el modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad contribuye a su justificación teórica.

El desarrollo del documento referencial como una guía o instrumento alternativo para la enseñanza y aprendizaje de una aplicación de la matemática contempla tres etapas para su contextualización:

- a) La etapa uno es la pre-escritura se lleva a cabo gracias a la selección de bibliografía conjuntamente con la lectura reflexiva en el que los libros de **(Ordoñez et al., 2015)**, **(Reza, 2010)**, **(Sciavico et al., 2009)** constituyen las bases para la justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot de cuatro grados de libertad.
- b) La segunda etapa que es la redacción con la escritura digital del documento guía, de los libros mencionados se conserva el orden de presentación de los contenidos como un instrumento para el aprendizaje primero muestran una descripción del sistema, luego se presenta el sistema geoméricamente, para finalmente plantear los modelos que se obtienen del sistema, esto permite establecer un orden a seguir para que cada temario sea consiguiente del anterior y facilite el entendimiento del documento.
- c) La tercera etapa es la de revisión del documento que consiste en una depuración final del mismo.

Las herramientas tecnológicas utilizadas para la investigación son:

- Internet como principal fuente de información destacando buscadores como Google Académico y el Repositorio de la ESPOCH.
- Ordenador como medio para la sistematización de la información y redacción del trabajo.
- Software LaTeX como aplicación para la transcripción del trabajo de titulación.

De esta manera se obtiene el documento referencial guía sobre la "Justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad" con el fin de aportar al aprendizaje e investigación de estudiantes y docentes.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Resultado

Establecido el tipo de investigación documental con enfoque cualitativo y diseño documental se genera como resultado un documento referencial guía de estudio titulado "Justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad" el cual ha sido realizado en base a las siguientes bibliografías: **(Carrasco, 2019)** y **(Reza, 2010)** con los que fue posible definir y establecer los sistemas físicos para la selección del robot objeto de estudio, así como las configuraciones del brazo robótico; **(López, 2008)** fue la bibliografía principal para el desarrollo del modelo Geométrico del sistema, a pesar de no encontrar información específica con la misma configuración seleccionada para este trabajo, detalla la configuración cartesiana que se toma como referencia para el espacio del eje extra; en **(Cuya Solari et al., 2012)**, **(Reza, 2010)**, **(Ruiz Otalora et al., 2022)** y **(Torrealba et al., 2006)** se contempla el planteamiento de la cinemática directa de posición, en su mayoría hacen uso del algoritmo de Dehavit Hartenberg para obtener los parámetros de cada una de las articulaciones rotacionales que a partir de estos parámetros se forman las matrices de transformación homogénea de cada una de las articulaciones, al mismo tiempo que de todo el sistema, la cual es fundamental para el planteamiento de las ecuaciones del efector final con respecto a la base. De igual forma se plantea para la cinemática inversa de posición solo se encuentra el planteamiento de una ecuación sin más detalle ya que se enfocan en realizar los cálculos mediante Software como Matlab u Octave, por lo que el aporte se evidencia en el desarrollo analítico donde la articulación del efector final se cancela al tomarlo como posición cero o inicial, quedando así el sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas que determinan el valor de las articulaciones y al obtener este sistema, se lo resuelve mediante el método de Newton-Rhapson detallado apropiadamente en el documento referencial.

Para el planteamiento de la cinemática de velocidad las bibliografías más relevantes fueron **(Ordoñez et al., 2015)**, **(Reza, 2010)**, **(Sciavico et al., 2009)** gracias a que se muestra la construcción de la matriz Jacobiana mediante dos métodos, el método analítico y el método diferencial; esto se adapta al manipulador de cuatro grados de libertad y se obtiene la cinemática inversa de velocidad que plantea hallar la matriz inversa de la Jacobiana para el cálculo de cada articulación.

El funcionamiento de este tipo de sistemas robóticos se puede predecir antes de realizar una simulación, gracias al cálculo de singularidades de la matriz del sistema para lo cual se ha tomado como referencia lo descrito en la bibliografía de (Reza, 2010) y (Ruiz Otalora et al., 2022) determinando así el funcionamiento y las limitaciones del robot manipulador de cuatro grados de libertad.

Todo esto se documenta para finalmente plasmarlo en un documento referencial guía acerca de la justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad.

4.1.1. Estructura del documento referencial guía

El documento referencial guía se estructura conforme la bibliografía base de estudio con la información recopilada y los intereses de la investigación de la siguiente manera:

1. Descripción del sistema

1.1. Componentes y estructura de un robot

1.1.1. Representación simbólica de los robots

1.1.2. Configuraciones básicas de robots manipuladores

1.1.3. Grados de libertad y espacio de trabajo

1.1.4. Sistemas robóticos

1.2. Conceptos básicos

2. Modelo Geométrico

3. Modelo Cinemático

3.1. Cinemática de Posición

3.1.1. Cinemática Directa de Posición

3.1.2. Cinemática Inversa de Posición

3.2. Cinemática de Velocidad

3.2.1. Cinemática Directa de Velocidad

3.2.2. Cinemática Inversa de Velocidad

3.3. Singularidades

Los tres capítulos se resumen a continuación:

Capítulo I. Descripción del sistema.- En este capítulo se contempla la descripción del sistema el cual hace referencia a los componentes y estructuras de un robot, su representación simbólica, sus grados de libertad y sistemas robóticos. Asimismo, se contempla conceptos básicos necesarios para poder describir el movimiento del robot, tal como las coordenadas homogéneas, matrices homogéneas, y la explicación de cómo se obtiene su modelado.

Capítulo II. Modelo Geométrico.- Este capítulo detalla la obtención del modelado geométrico del sistema físico del robot manipulador de cuatro grados de libertad con las respectivas herramientas en base a los conocimientos de la asignatura de Geometría.

Capítulo III. Modelo Cinemático.- El último capítulo contempla la obtención del modelado cinemático directo e inverso de posición en el cual hace mención al algoritmo de Denavit Hartenberg, así como el modelado directo e inverso de velocidad en el que se procede a hallar la matriz Jacobiana la cual hará referencia a la relación de las velocidades lineales y angulares, y finalmente con el cálculo de sus singularidades, y por ende, su óptimo funcionamiento.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

El modelado bajo las metodologías clásicas no permite a lectores e investigadores el entendimiento de la obtención de las ecuaciones que describen el sistema físico de un robot manipulador de cuatro grados de libertad por lo que se logró describir de forma detallada la justificación teórica del sistema físico ya mencionado, la cual servirá para estudiantes e investigadores.

Gracias a la revisión bibliográfica de fuentes confiables como libros, tesis y artículos se logra la elaboración del documento referencial guía para la justificación teórica del modelado matemático cinemático y la correcta selección del sistema físico donde se tomó en cuenta sus configuraciones de cuatro articulaciones rotacionales predeterminadas como son la ubicación de su base en el plano horizontal superior y la división de sus grados de libertad, se puede confirmar que ha sido satisfactorio el desarrollo debido al cumplimiento de los objetivos planteados.

Lo que se pretende es la obtención de un material de apoyo el cual pueda ser comprendido cómo se logra describir cualquier sistemas físico y de robots de manera matemática para saber su obtención y funcionamiento.

En la elaboración del documento referencial guía, se puede notar que en el Capítulo III existe más información ya que es el que describe el sistema físico y se comprueba su funcionamiento, sin embargo, el Capítulo II fue el que más tiempo se invirtió ya que al intentar describir posiciones mediante visualizaciones de una estructura que se establece por conveniente, no plantea un resultado general como lo que se busca en el docuemnto referencial.

Se espera que este documento referencial guía de estudio se use como inspiración para más trabajos de integración curricular para beneficio de los estudiantes de la Carrera de Matemática en la ESPOCH.

5.2. Recomendaciones

Como se menciona anteriormente, este documento referencial guía puede ayudar a la generación de más trabajos de integración curricular, se recomienda a los lectores estudiantes revisar los demás sistemas físicos que existen, ya que como menciona (**Sciavicco et al., 2009, pág. 89**) existen 72 configuraciones dadas para este tipo de robots.

El documento referencial guía contiene algunas definiciones que dentro del pñsum de estudios anteriores no se revisaron, se recomienda tanto al sector estudiantil como sector administrativo de la Carrera de Matemática complementar con más definiciones acerca de Álgebra Lineal ya que en Matemática aplicada es sumamente fundamental si lo que se desea es seguir encaminado por asignaturas afines.

BIBLIOGRAFÍA

ALVARADO, RODRIGO HERNANDEZ *Análisis dinámico y control de un robot para inspección de líneas de transmisión.* Disponible en: <https://cidesi.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1024/300/1/TM-RHA-2010.pdf>, 2010.

CARRASCO OLIVOS, Percy Jhordan. *Diseño e implementación de un prototipo robótico de 4GDL a partir de la aplicación de una guía metodológica propuesta.* 2019.

CUYA SOLARI, O.; et al. *Cinemática directa e inversa de nun robot 4DOF* Obtenido de IEEE UNAC: <http://es.scribd.com/doc/142121427/CINEMATICADIRECTA-E-INVERSA-DE-UN-ROBOT-DE-4-GRADOS-DELIBERTAD>.

FERNÁNDEZ, Adel; & MARRERO-OSORIO, Sergio A. *Modelos cinemático y dinámico de un robot de cuatro grados de libertad.* Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones, 2017, vol. 38, no 3, p. 56-75.

JUSTINICO, Oscar; et al. *Control gestual de robot de 4 GDL con sensor Leap Motion.* Memorias, 2015.

KELLY, Rafael; et al. . *Control de movimiento de robots manipuladores* 2003.

KREYSZIG, Erwin; et al. *Matemáticas avanzadas para ingeniería.* 2001.

LÓPEZ APOSTOLOVICH, Luis Felipe *Modelación y simulación dinámica de un brazo robótico de 4 grados de libertad para tareas sobre un plano horizontal.* 2008.

LUNA, Francesco García; RAMÍREZ; et al. *Diseño de librería con enfoque didáctico para el control de robots manipuladores en sistemas embebidos*. Pistas Educativas, 2019, vol. 41, no 134.

MACHADO MARTÍNEZ, Juan Eduardo. *Modelación y Control de un Robot Bípedo*. 2014.

MENDOZA SALAZAR, María José. *"Modelado, simulación y control de un robot manipulador móvil omnidireccional"* Tesis Máster en Ingeniería Matemática y Computación. Universidad Internacional de La Rioja - España. 2022.

MOHAMMED, Amin A.; & SUNAR, Mehmet. *Kinematics modeling of a 4-DOF robotic arm*. En 2015 International Conference on Control, Automation and Robotics. IEEE, 2015. p. 87-91.

MORA CARRIÓN, Sergio. *"Diseño y desarrollo de controles de robots mediante métodos numéricos basados en teoría de álgebra lineal. Aplicación a robots móviles."* Tesis Doctoral. Universitat Politècnica de València - España. 2018

ORTIZ-MATA, Jhonny; & LEÓN-BATALLA, Alberto. *Diseño e implementación de un robot manipulador de cinco grados de libertad para una estación de trabajo didáctica*. Universidad Ciencia y Tecnología, 2018, vol. 22, no 87, p. 6-6.

ORDOÑEZ, Martín Hernández, et al. *Robótica: Análisis, modelado, control e implementación*. OmniaScience, 2015.

RAMOS, Olga; & Buitrago, Germán. *Sistema teledirigido de un brazo robótico de 4 grados de libertad aplicando visión de máquina*. Rev.EIA.Esc.Ing.Antioq no.24. 2015

RAMOS, Carlos; & Galarza, Alberto. *Los alcances de una investigación*. CienciAmérica, 2020, vol. 9, no 3, p. 1-6.5

REZA N. JAZAR. *Theory of Applied Robotics: Kinematics, Dynamics, and Control.* Springer., 2010.

RUIZ OTALORA, Fabián Andrés; & QUINTERO NEIRA, Laura Alejandra *Diseño de un robot manipulador de 4 gdl, usando análisis cinemático y dinámico.* 2022.

SCIAVICCO, L.; et al. *Robotics: Modelling, planning and Control, ser. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing.* 2009.

S. Wiggins and M. Golubitsky, 1990. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.* Springer.

SPONG, Mark W.; et al. *Robot modeling and control.* John Wiley & Sons, 2020.

TORREALBA, R.; CLAVIJO, A.; DELGADO, M. Modelaje matemático y simulación de un robot manipulador de microprocesadores: Dos enfoques. *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela.* 2006, vol. 21, no 3, p. 121-139.

VORONIN, Boris F.; & ÁLVAREZ SÁNCHEZ, Jesús A. *Un método analítico de análisis cinemático de mecanismos articulados.* 2008.

ANEXOS

ANEXO A: GUÍA DE ESTUDIOS “JUSTIFICACIÓN TEÓRICA DEL MODELADO MATEMÁTICO CINEMÁTICO DE UN ROBOT MANIPULADOR DE CUATRO GRADOS DE LIBERTAD”

Guía de estudio
Facultad de Ciencias - Carrera de Matemática

**JUSTIFICACIÓN TEÓRICA DEL MODELADO MATEMÁTICO
CINEMÁTICO DE UN ROBOT MANIPULADOR DE CUATRO
GRADOS DE LIBERTAD**

REALIZADO POR:
FERNANDA ANALHY CÁCERES NUÑEZ

Tabla de Contenidos

| | |
|--|-----------|
| Prefacio | 4 |
| 1. Descripción del sistema | 5 |
| 1.1. Componentes y estructura de un robot | 5 |
| 1.1.1. Representación simbólica de los robots | 5 |
| 1.1.2. Configuraciones básicas de robots manipuladores | 7 |
| 1.1.3. Grados de libertad y espacio de trabajo | 8 |
| 1.1.4. Sistemas robóticos | 9 |
| 1.2. Conceptos básicos | 12 |
| 2. Modelo Geométrico | 16 |
| 3. Modelo Cinemático | 20 |
| 3.1. Cinemática de Posición | 21 |
| 3.1.1. Cinemática Directa de Posición | 21 |
| 3.1.2. Cinemática Inversa de Posición | 26 |

| | |
|--|----|
| 3.2. Cinemática de Velocidad | 29 |
| 3.2.1. Cinemática directa de Velocidad | 29 |
| 3.2.2. Cinemática Inversa de Velocidad | 39 |
| 3.3. Singularidades | 43 |

BIBLIOGRAFÍA

Prefacio

La siguiente guía de estudio está orientada a dar una idea más clara y concisa sobre el modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad, en el mismo se indica su forma, características, componentes así como también las ecuaciones matemáticas específicas para su resolución, dando la posibilidad de auto aprendizaje y que se ponga en práctica las materias afines a esta temática que se encuentran contempladas en la malla curricular de la carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).

Tiene la finalidad de facilitar el estudio del modelado cinemático matemático de un robot manipulador de manera clara, precisa y con la fundamentación matemática adecuada que servirá a los estudiantes y al sector Docente de la ESPOCH como principales beneficiarios, utilizando un lenguaje de fácil lectura e interpretación para su entendimiento con conceptos básicos sobre las estructuras utilizadas, dando como origen al proceso enseñanza-aprendizaje.

Su contenido es de tres módulos, que incluyen teoría y definiciones, destacando los aspectos matemáticos más importantes. Los módulos contienen los siguientes tratados.

1. Descripción del sistema: se revisa la estructura de los robots, tipos y algunos conceptos básicos necesarios para los diferentes modelados.
2. Obtención del modelo geométrico del robot manipulador de cuatro grados de libertad: se establece el modelado geométrico del manipulador robótico seleccionado.
3. Obtención del modelo cinemático directo e inverso para el robot manipulador de cuatro grados de libertad: se construye el modelado cinemático de los robots manipuladores.

Capítulo 1

Descripción del sistema

Los robots en su mayoría son utilizados en la industria, puesto que ayudan en trabajos repetitivos o de riesgo; uno de los robots de mayor usabilidad y operatividad son los manipuladores gracias a su capacidad para realizar tareas que resultarían complejas para los seres humanos.

Las prácticas de manipulación robótica que primero tuvieron éxito fue la transferencia de material, en los que el robot se limitaba a asistir a una prensa para descargar y transferir o apilar la pieza acabada.

En este primer capítulo se expone la configuración del manipulador, como se define cada una de sus partes, y algunos preliminares de asignación.

1.1. Componentes y estructura de un robot

1.1.1. Representación simbólica de los robots

Los brazos robóticos se construyen y diseñan con estructuras flexibles y se personalizan con articulaciones adaptables que pueden realizar una amplia gama de movimientos y funciones que simulan un brazo humano. Su principal característica es realizar funciones que aceleran actividades, tareas y funciones que requieren una actividad repetible y precisa en un entorno humano seguro.

Los robots manipuladores se componen de eslabones conectados por articulaciones en una cadena cinemática. En la figura 1.1 se puede observar la morfología del brazo robótico.

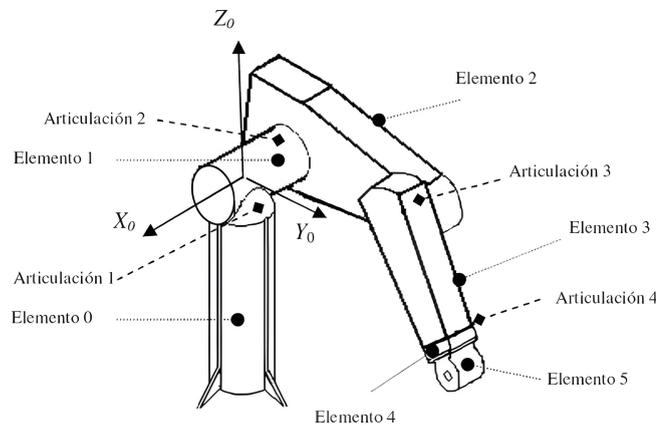


Figura 1.1: Morfología de un brazo robótico de 4 grados de libertad.

Fuente: [Torrealba, R., et al., 2006]

Nota 1. Las articulaciones suelen ser rotacionales (rotativas) o lineales (prismáticas).

Una articulación rotacional es como una bisagra y permite la rotación relativa entre dos eslabones. Una articulación prismática permite un movimiento lineal entre dos eslabones. Se utilizará la convención **(R)** para representar las articulaciones rotacionales y **(P)** para las prismáticas, su representación simbólica se muestra en la Figura 1.2

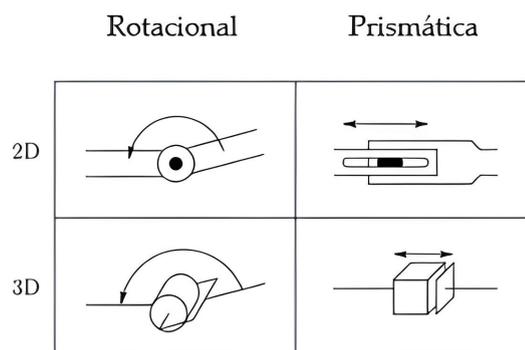


Figura 1.2: Representación simbólica de las articulaciones del robot

Fuente: [Reza, N. & Jazar, 2010]

Cada enlace representa la interconexión entre dos eslabones, sean l_i el eslabón y l_{i+1} el eslabón siguiente, el eje de rotación de un enlace rotacional es el eje z_i por el que se desliza una junta prismática si la articulación es la interconexión de los eslabones i e $i + 1$. Las variables de articulación, denotadas por θ_i para una articulación rotacional y d_i para las

prismáticas, representan el desplazamiento relativo entre eslabones adyacentes.

Definición 1. Un eslabón es un cuerpo rígido que compone un robot; también son llamados "brazos".

Puede tener un movimiento relativo con respecto a todos los demás eslabones. Desde el punto de vista cinemático, dos o más miembros conectados entre sí de forma que no puede producirse ningún movimiento relativo entre ellos se consideran un único eslabón.

Definición 2. Una articulación es una pieza que proporciona movimiento a todas las partes del robot, pudiendo expresarse mediante una sola coordenada.

Un eje de articulación se produce por la rotación relativa de eslabones conectados alrededor de una línea.

Una coordenada de articulación es aquella que describe la posición relativa de dos eslabones conectados. Es un ángulo para una articulación rotacional y una distancia para una articulación prismática.

Estas coordenadas de articulación se dividen en **activas** las cuales son controladas por un actuador, y las **pasivas** que son funciones de las coordenadas activas y de la geometría de los brazos del robot.

Definición 3. Las articulaciones de la cadena cinemática de un robot entre el antebrazo y el efector se denominan muñeca.

Definición 4. El efector final es la parte instalada en el extremo del manipulador, es equivalente a la mano humana, podría ser de tipo mecánico el cual manipula el objeto que sostiene antes de ser movido por el brazo del robot manipulador.

1.1.2. Configuraciones básicas de robots manipuladores

La estructura de un robot está compuesta por una serie de eslabones unidos por articulaciones de tipo rotacional o prismáticas, dichos movimientos quedan definidos por: Las coordenadas cartesianas (x, y, z) , coordenadas cilíndricas (α, ϕ, z) , coordenadas esféricas (α, β, ρ) y coordenadas angulares (α, β, γ) . En la figura 1.3 se presentan las cuatro configuraciones básicas con tres ejes de posicionamiento que pueden ser seleccionadas.

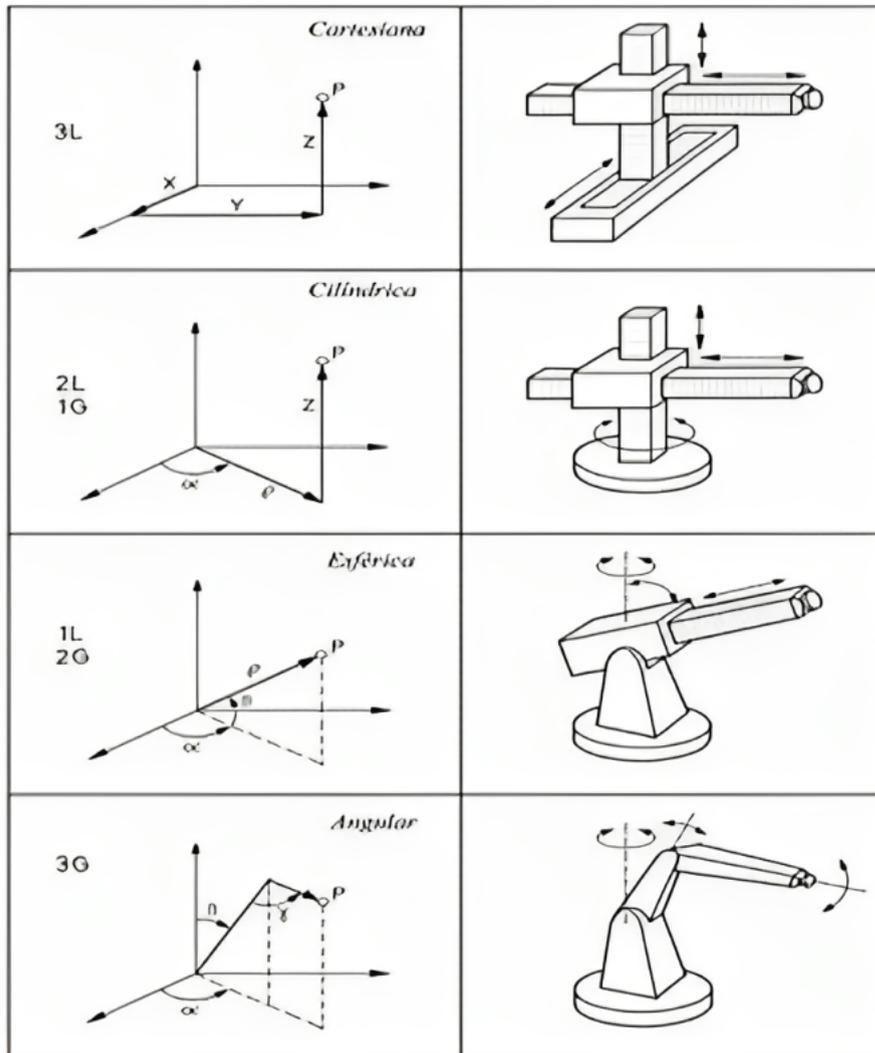


Figura 1.3: Configuraciones básicas de robots industriales con 3 ejes de posicionamiento

Fuente: [Carrasco, P. et al., 2019]

1.1.3. Grados de libertad y espacio de trabajo

El número de articulaciones determina los grados de libertad (GDL) del manipulador.

El espacio de trabajo de un manipulador es el volumen total conllevado por el efector final a medida que el manipulador ejecuta todos los movimientos posibles. El espacio de trabajo está limitado por la geometría del manipulador, así como las restricciones de las articulaciones.

El espacio de trabajo se divide en un espacio de trabajo accesible y un espacio de trabajo diestro. El **espacio de trabajo accesible** es el conjunto de puntos alcanzables por el manipulador, mientras que el **espacio de trabajo diestro** consiste de aquellos puntos que el manipulador puede alcanzar con una orientación arbitraria del efector final.

Nota 2. Es importante aclarar que las articulaciones deben trabajar hasta menos de los 360° .

Nota 3. Se debe tomar en consideración que las articulaciones prismáticas y rotacionales determinan los grados de libertad.

1.1.4. Sistemas robóticos

Generalmente, un robot se conecta mediante articulaciones **(P)** o **(R)** ya que, si se desea configurar cualquier otro tipo de articulación son siempre resultantes de las dos anteriores. Existen 72 configuraciones de manipuladores industriales porque cada articulación **(P)** o **(R)** y los ejes de dos articulaciones adyacentes pueden ser paralelos (\parallel), ortogonales (\perp) o perpendiculares (\perp).

Dos ejes de articulación ortogonales se cruzan en un ángulo recto, mientras que dos ejes de articulación perpendiculares están en ángulo recto con respecto a su normal. Dos ejes de articulación perpendiculares se vuelven paralelos si un eje gira 90° sobre la normal común. Dos ejes perpendiculares se vuelven ortogonales si la longitud de su normal común tiende a cero.

De los 72 manipuladores posibles, los importantes son: $R \parallel R \parallel P$ (SCARA), $R \perp R \perp R$ (angular), $R \perp R \perp P$ (esférica), $R \parallel P \perp P$ (cilíndrica), $P \perp P \perp P$ (cartesiana). Su representación gráfica se la puede observar en la figura 1.4

Robot SCARA es un tipo de robot que tiene un brazo flexible en el plano horizontal o XY, pero rígido en la dirección vertical o eje Z.

Tiene dos eslabones, dos juntas de revolución y una única junta prismática. Los eslabones y la base están conectados por las juntas de revolución orientadas en el mismo eje.

Robot angular es uno de los más utilizados en los procesos de fabricación. Se utilizan

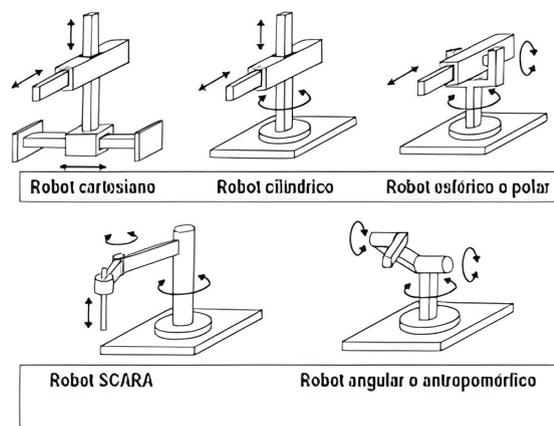


Figura 1.4: Sistemas robóticos más importantes

Fuente: [Acosta, A., 2022]

para realizar operaciones más complejas ya que el brazo del robot consta de al menos tres articulaciones de giro con un área de trabajo esférica.

Robot esférico también conocido como robot polar, utilizan el sistema de coordenadas polares tridimensionales α , θ y ϕ .

Robot cilíndrico tiene un rango de movimiento cilíndrico ya que consta de una articulación de revolución y dos articulaciones prismáticas.

En enlace de revolución está situada en la base del brazo y permite la rotación de los eslabones en torno al eje del robot.

Las dos articulaciones prismáticas se utilizan para ajustar el radio y la altura del área de trabajo cilíndrico del robot.

Robot cartesiano Está compuesto por tres articulaciones prismáticas. Por tanto, la herramienta se limita al movimiento lineal. El nombre de cartesiano se deriva del sistema de coordenadas cartesianas tridimensionales, que consta de los ejes X , Y y Z .

El espacio de trabajo representa la parte del entorno a la que puede acceder el efector final del manipulador. Su forma y volumen dependen de la estructura del manipulador y de la presencia de límites mecánicos en las articulaciones.

La estructura cartesiana ofrece una muy buena estabilidad mecánica. La precisión de posicionamiento de la muñeca es constante en todo el espacio de trabajo. Se trata del

volumen delimitado por una tubería paralela rectangular, tal como se representa en la figura 1.5. Frente a una gran precisión, la estructura tiene poca destreza, ya que todas las articulaciones son prismáticas. La dirección de aproximación para manipular un objeto es lateral. Por otro lado, si se desea aproximarse a un objeto desde arriba, el manipulador cartesiano puede realizarse mediante una estructura de pórtico, como se ilustra en la Figura 1.6. Esta estructura permite disponer de un espacio de trabajo de gran volumen y manipular objetos de grandes dimensiones y peso, además que como se trabaja de otra perspectiva permite cálculos inversos con respecto a sus posiciones.

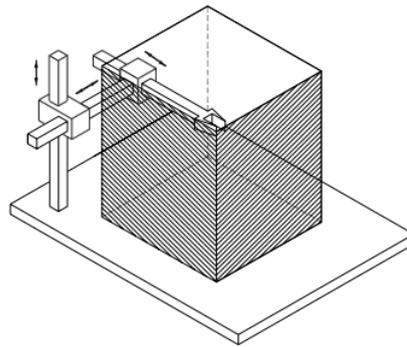


Figura 1.5: Manipulador cartesiano y su espacio de trabajo

Fuente: [Sciavico, L., 2011]

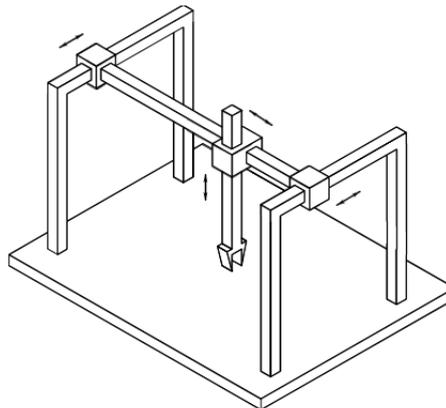


Figura 1.6: Manipulador del pórtico.

Fuente: [Sciavico, L., 2011]

1.2. Conceptos básicos

El Álgebra lineal es una rama fundamental ya que en casi en todas las etapas del modelado, es necesario realizar operaciones matriciales y vectoriales que involucren el movimiento de traslación y rotación de un cuerpo rígido en el espacio.

Generalmente en las bibliografías seleccionadas no se mostraron definiciones matemáticas, por lo que se resalta esta necesidad. A continuación se describen definiciones de matriz de transformación homogénea, cómo se construye para la configuración seleccionada y preliminares para el modelado geométrico y cinemático.

Definición 5. Una coordenada homogénea es una representación matemática de un punto en un espacio proyectivo.

Mientras que las coordenadas cartesianas tradicionales (x, y, z) se utilizan para describir puntos en un espacio euclidiano tridimensional, las coordenadas homogéneas añaden una dimensión adicional que permite la representación conjunta de traslación y rotación.

Ejemplo. Sea $\vec{p}(x, y, z)$ un vector en coordenadas cartesianas en un espacio tridimensional, se lo puede representar como coordenadas homogéneas de la siguiente manera:

$$\vec{p}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Donde x, y, z y $w \in \mathbb{R}$. La relación esencial en coordenadas homogéneas es que dos vectores proporcionan la misma ubicación en el espacio si difieren solo por un factor escalar no nulo. Para este caso $w \neq 0$

Definición 6. Una matriz T es de transformación homogénea de dimensión 4×4 que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro.

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{bmatrix}$$

Así pues, se puede considerar que una matriz homogénea se haya compuesta por cuatro submatrices de distinto tamaño: una submatriz $R_{3 \times 3}$ que corresponde a una matriz de rotación; una submatriz $p_{3 \times 1}$ que corresponde al vector de traslación; una submatriz $f_{1 \times 3}$ que representa una transformación de perspectiva, y una submatriz $w_{1 \times 1}$ que representa un escalado global.

Se considera la transformación de perspectiva nula y el escalado global unitario, la matriz homogénea T resultara de la siguiente forma:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Esta ecuación representa la orientación y posición de un sistema $0UVW$ rotado y trasladado con respecto al sistema de referencia $0XYZ$. Esta matriz sirve para conocer las coordenadas (px, py, pz) del vector \vec{p} en el sistema $0XYZ$ a partir de sus coordenadas (pu, pv, pw) en el sistema $0XYZ$:

$$\begin{bmatrix} px \\ py \\ pz \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} pu \\ pv \\ pw \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nota 4. La rotación de un marco de referencia sobre el eje x un ángulo θ se calcula con la matriz de rotación $R_{x,\theta}$ sobre el eje y con la matriz $R_{y,\theta}$ y finalmente en el eje z con $R_{z,\theta}$.

$$\begin{aligned} R_{x,\theta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \\ R_{y,\theta} &= \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} \\ R_{z,\theta} &= \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Una matriz de transformación homogénea se puede aplicar para:

1. Representar la posición y orientación de un sistema girado y trasladado $OUVW$ con respecto a un sistema fijo de referencia $oxyz$, que es lo mismo que representar una rotación y traslación realizada sobre un sistema de referencia.
2. Transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema $OUVW$, a su expresión en coordenadas del sistema de referencia $OXYZ$.
3. Rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema de referencia fijo $OXYZ$.

Cabe señalar que la multiplicación de $n \times n$ matrices de transformación homogéneas se denomina composición, que permite transformar las coordenadas de puntos en un marco de referencia, a lo largo del cual $n \times n$ se giran y desplazan entre sí.

Esto facilita la definición de objetos en el espacio utilizando coordenadas cartesianas. Sin embargo, definir la orientación de un objeto en el espacio es un poco más complicado, para lo cual se utiliza la notación de Euler, la notación de balanceo-cabeceo-guiñada o la notación de eje/ángulo.

En el análisis de un manipulador robótico se debe asignar un marco de referencia a cada eslabón que conforma su cadena cinemática en la figura 2.1. El primer marco representa la base del manipulador y el último su efector final.

Aunque los marcos pueden asignarse arbitrariamente es aconsejable seleccionar un convenio para la localización de los marcos, esto favorece el modelado del manipulador y la eficiencia computacional. La convención fundamental para la asignación de marcos de referencia es la de Denavit y Hartenberg (DH).

Para el modelado cinemático es necesario aplicar el convenio DH de forma tal que se describa el robot en función de los parámetros estáticos de los eslabones y las variables de cada articulación. Estas variables pueden ser de desplazamiento o de rotación. La modelación se divide en cinco partes:

1. **Modelo cinemático directo de posición:** determina la posición del efector final a partir de las variables de articulación.
2. **Modelo cinemático inverso de posición:** determina el valor de las variables de

articulación en función de la posición del efector final deseada. Su solución puede obtenerse mediante una relación matemática explícita o por medio de procedimientos numéricos iterativos.

Los métodos numéricos tienen el inconveniente de que su convergencia no siempre está garantizada.

3. **Modelo cinemático directo de velocidad:** determina la velocidad del efector final a partir de las velocidades de las variables de articulación. Para obtener este modelo se debe definir la matriz jacobiana del manipulador. Esta puede considerarse como la versión vectorial de la derivada ordinaria de una función escalar o mediante procedimiento analítico.
4. **Modelo cinemático inverso de velocidad:** Determina las velocidades de las variables de articulación a partir de la velocidad del efector final deseada. Este modelo es fácil de obtener si se calcula la inversa de la matriz jacobiana. En caso de que la matriz jacobiana sea no cuadrada, deberá utilizarse la denominada pseudoinvertida.

Capítulo 2

Modelo Geométrico

En la sección 1.1.4 se observó que existen 72 configuraciones de robots manipuladores. Para el presente trabajo se toma de referencia un robot manipulador de 4 grados de libertad con las siguientes configuraciones: 4 articulaciones rotacionales donde tres son de posición y una de orientación, que posee las siguientes características:

1. **Base:** Es la parte fija del robot que proporciona estabilidad y soporte al sistema. No tiene grados de libertad y actúa como punto de referencia para el resto del brazo.
2. **Articulación 1 (q_1):** Es la primera articulación del brazo y permite el movimiento de rotación en un eje vertical u horizontal. Esta articulación controla el movimiento de elevación o descenso del brazo.
3. **Articulación 2 (q_2):** Se encuentra en el extremo de la articulación q_1 y permite el movimiento rotacional en un plano horizontal. Esta articulación controla la rotación del brazo hacia los lados o hacia adelante y hacia atrás.
4. **Articulación 3 (q_3):** Se encuentra en el extremo de la articulación q_2 y permite el movimiento de rotación en un eje perpendicular al plano horizontal. Esta articulación controla la rotación del brazo en sentido vertical o de inclinación.
5. **Articulación 4 (q_4):** Es la última articulación en el extremo del brazo y permite el movimiento de rotación del efector final, como una pinza o una herramienta de

trabajo. Esta articulación controla la rotación del extremo del brazo para realizar tareas específicas.

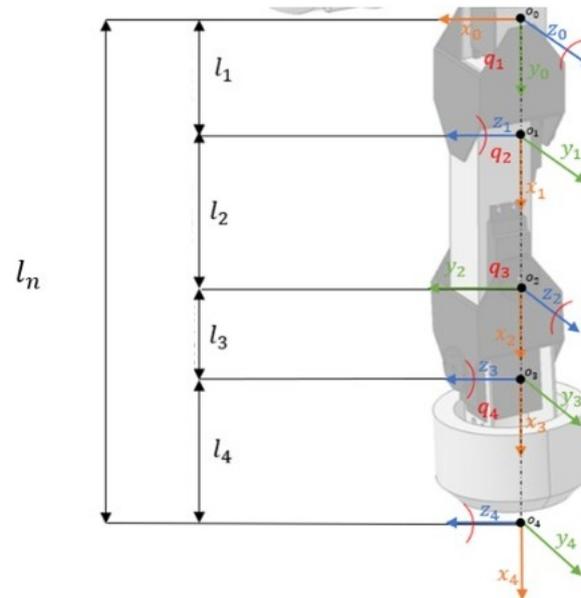


Figura 2.1: Representación simbólica del brazo robótico de 4 GDL

Fuente: [Carrasco, P. et al., 2019]

Definiendo la posición de los puntos 0, 1, 2, 3 y 4 en función de los ángulos q_n se obtiene:

Punto O_0 : $(0;0)$

Punto O_1 : $(l_1 \cos(q_1) ; l_1 \text{sen}(q_1))$

Punto O_2 : $(l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2); l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2))$

Punto O_3 : $(l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3); l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) + l_3 \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3))$

Punto O_4 : $(l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + l_4 \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4); l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) + l_3 \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3) + l_4 \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4))$

Las ecuaciones geométricas de un robot manipulador de 4 grados de libertad (gdl) rotacional describen la posición y orientación del extremo del robot (efector final) en función de las articulaciones.

En este tipo de robot, generalmente se utilizan coordenadas cartesianas (x, y, z) . Las ecuaciones geométricas pueden variar dependiendo de la configuración específica del robot y el sistema de coordenadas utilizado.

Nota 5. La orientación fija del extremo del robot que puede ser un valor constante ya que como se puede ver en 2.1 los ejes son ortonormales, es decir que son perpendiculares entre sí (ortogonales con ejes de 90°) y tienen una longitud unitaria (normales).

A continuación se muestra un ejemplo general de las ecuaciones geométricas para un robot de 4 gdl rotacional:

1. Posición en el eje X:

$$x = (l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_3 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + l_4 \cos(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)) \quad (2.1)$$

2. Posición en el eje Y:

$$y = (l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + l_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)) \quad (2.2)$$

3. Posición en el eje Z: Para conseguir la perpendicularidad con respecto a la superficie de trabajo se trabaja con una restricción más: $(90^\circ - q_1) + (180^\circ - q_2) + (180^\circ - q_3) + (90^\circ - q_4) = 360^\circ$.

$$z = f(q_1, q_2, q_3, q_4) \quad (2.3)$$

Nota 6. La función f describe la relación entre los ángulos de las articulaciones y la posición en el eje z . Esta función se obtiene mediante el análisis cinemático inverso del robot.

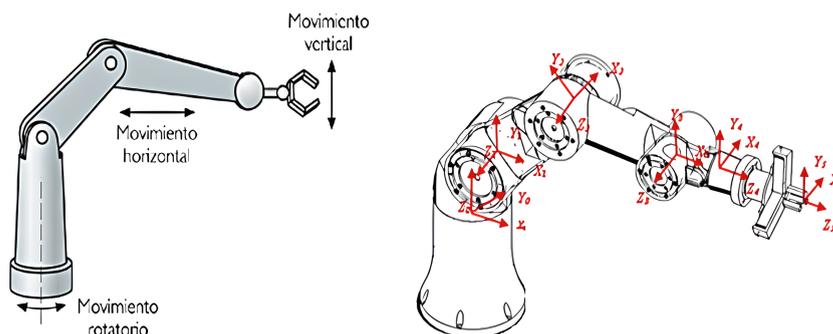


Figura 2.2: Movimientos del brazo articulado y ejes rotacionales en los sistemas de coordenadas

Las ecuaciones 2.1, 2.2, 2.3 expresan las coordenadas x, y, z del extremo del robot en términos de las articulaciones q_1, q_2, q_3, q_4 .

Cabe recalcar que este es un método no sistemático que se aplica a robots con pocos grados de libertad, que utiliza relaciones geométricas para obtener directamente la posición del extremo del robot en función de las variables articulares. La forma específica de las funciones x, y y z en 2.1, 2.2, 2.3 depende de la configuración geométrica del robot y de las relaciones cinemáticas que se verán en el próximo capítulo, establecidas entre los ángulos de las articulaciones y la posición del efector final del robot.

Capítulo 3

Modelo Cinemático

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia sin considerar las fuerzas que lo producen. Es decir, que se interesa por la descripción analítica de la trayectoria espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y orientación del extremo final del robot con los valores angulares de las articulaciones.

Dentro de la cinemática existen dos problemas fundamentales, que son la cinemática directa y la cinemática inversa.

El problema cinemático directo consiste en determinar la posición y orientación del efector final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas tomado como referencia, al conocer los valores angulares de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

En cambio, el problema cinemático inverso trata sobre la configuración que el robot debe de adoptar para alcanzar una determinada posición y orientación del efector final, como se muestra en la siguiente figura:

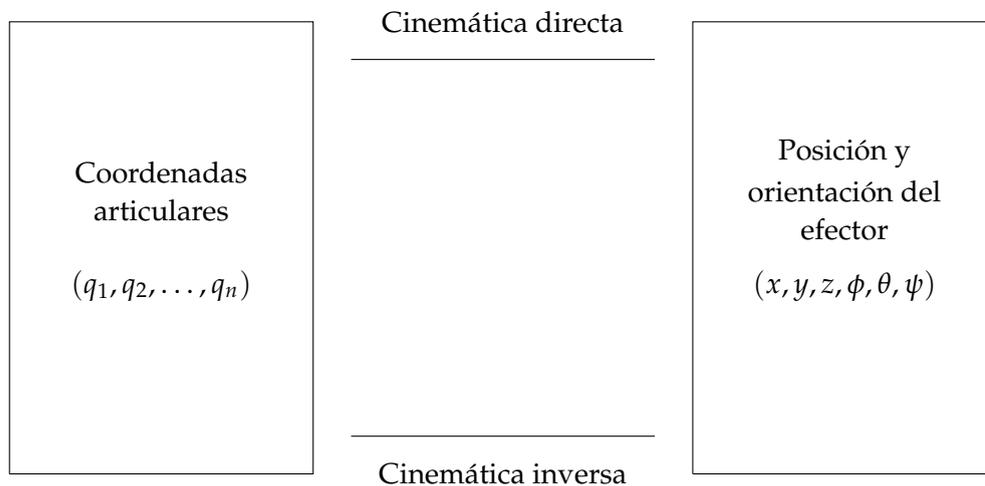


Figura 3.1: Diagrama de relación entre cinemática directa e inversa.

Fuente: [Cuya, S. et al., 2012]

Para el trabajo de la cinemática Denavit y Hartenberg [DENAVIT, 1995] propusieron un método sistemático para describir y representar la geometría espacial de los elementos de la cadena cinemática, y en el caso particular de un robot, con respecto a un sistema de referencia fijo. Este método hace uso de la matriz de transformación homogénea para describir la relación espacial entre dos elementos rígidos adyacentes, reduciendo el problema a hallar una matriz de transformación 4×4 que relacione la localización espacial del extremo del robot con respecto al sistema de coordenadas de su base.

3.1. Cinemática de Posición

3.1.1. Cinemática Directa de Posición

Con el modelo predefinido, se determinan las ecuaciones que describen la cinemática del manipulador, para ello se hace uso de las matrices de transformación homogéneas. Dichas matrices poseen la característica de poder reunir en sus expresiones los giros y movimientos espaciales.

Previamente a la definición de las matrices de transformación, se procede a colocar sistemas de coordenadas en cada una de las articulaciones. Esta cinemática será de gran ayuda para poder expresar el movimiento del brazo robot de 4 GDL de tal manera que con los ángulos de las 4 articulaciones se pueda determinar la posición y orientación.

Conocer la cinemática directa del modelo permite relacionar las coordenadas generalizadas con las coordenadas cartesianas en la punta del brazo usando como datos los movimientos realizados en cada uno de los pares cinemáticos. Para lograr realizar este cálculo se proponen dos métodos, los cuales son:

Resolución por métodos matriciales El problema cinemático directo se basa en la búsqueda de una matriz de transformación que relacione la posición y orientación del extremo del manipulador.

En general, un robot articular de n grados de libertad está formado por n eslabones unidos por n articulaciones, de manera que cada articulación-eslabón constituye un grado de libertad. A cada eslabón se le puede asociar con un sistema de referencia.

Representación Denavit Hartenberg Denavit-Hartenberg proponen un método matricial para describir y representar la geometría espacial de los elementos de la cadena cinemática abierta de un robot en particular, con respecto a un sistema de referencia fijo. Para ello, a cada articulación se le asigna un sistema de referencia local con un origen en el punto Q_i con sus ejes ortonormales X_i, Y_i, Z_i mostrado en la Figura 2.1.

Para la cinemática directa se plantea en términos de encontrar una matriz de transformación que relaciona el sistema de coordenadas ligado al cuerpo en movimiento respecto a un sistema de que se toma como referencia.

La representación de DH, se aplica a robots de cadena cinemática abierta y consiste en una serie de reglas para colocar los sistemas de referencia, tal como se describe a continuación:

- **Ángulo de articulación θ_i :** rotación requerida del eje x_{i-1} sobre z_{i-1} para quedar paralelo a x_i , se usa la regla de la mano derecha para conocer el sentido.
- **Traslación de articulación d_i :** Es la distancia medida desde el origen del sistema $i - 1$, a lo largo del eje z_{i-1} hasta la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i
- **Largo del eslabón a_i :** Es la distancia de separación entre los orígenes de los sistemas de referencia $i - 1$ e i medida a lo largo del eje x_i hasta la intersección con el eje z_{i-1} o la distancia más corta entre los ejes z_{i-1} y z_i , cuando estos no se interceptan.

- **Ángulo de torsión α_i :** Es el ángulo que separa a los ejes z_i y z_{i-1} medido respecto del x_i .

Algoritmo de DH

DH_1 : Numerar los eslabones desde 1 hasta n ($n=4GLD$). Se numerará como elemento 0 la base del robot.

DH_2 : Numerar cada articulación de 1 hasta 4.

DH_3 : Localizar los ejes de las articulaciones. Si ésta es rotacional, el eje será el propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

DH_4 : Para i de 0 a $n - 1$, situar el eje Z_i sobre el eje de la articulación $i + 1$.

DH_5 : Situar el origen del sistema base O_0 en cualquier punto del eje Z_0 (eje de la articulación 1). Los ejes X_0 e Y_0 se situarán de modo que formen un sistema en el sentido de las agujas del reloj con Z_0 .

DH_6 : Para i de 1 a $n - 1$, situar el sistema O_i en la intersección del eje Z_i con la línea normal común a Z_{i-1} y Z_i . Si ambos ejes se cortasen se situaría O_i en el punto de corte. Si fuesen paralelos se situaría en la articulación $i + 1$.

DH_7 : Situar X_i en la línea normal común al eje Z_{i-1} y Z_i . Si los ejes se cortan se sitúa perpendicular al plano formado por Z_{i-1} y Z_i . Situar X_i en la línea normal al eje Z_{i-1} , lo corta y apunta hacia afuera de él.

DH_8 : Situar Y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con X_i y Z_i .

DH_9 : Situar el sistema O_n en el extremo del robot de modo que Z_n coincida con la dirección de Z_{n-1} y X_n sea normal a Z_{n-1} y Z_n .

DH_{10} : Obtener q_i como el ángulo que hay que girar en torno a Z_{i-1} para que X_{i-1} y X_i queden paralelos.

DH_{11} : Obtener l_i como la distancia medida a lo largo de Z_{i-1} , que habría que desplazar O_{i-1} para que X_i y X_{i-1} queden en el mismo plano.

DH_{12} : Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de X_i (que ahora coincidiría con X_{i-1}) que habría que desplazar el nuevo O_{i-1} para que su origen coincidiese con O_i .

DH_{13} : Obtener α_i como el ángulo que habría que girar entorno a X_i (que ahora coincidirá con X_{i-1} para que el nuevo O_{i-1} sea igual a O_i)

A partir de las reglas mencionadas, se podrá determinar la siguiente matriz de transformación homogénea como ejemplo para las reglas de DH:

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\text{sen}(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \text{sen}(\alpha_i)\text{sen}(\theta_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \text{sen}(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\cos(\theta_i)\text{sen}(\alpha_i) & a_i\text{sen}(\theta_i) \\ 0 & \text{sen}(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Para obtener la cinemática directa del robot manipulador mostrado en la Figura 2.1, se realizó la respectiva asignación de los sistemas de referencia para cada uno de los eslabones. Partiendo de los parámetros de DH se asignó a la base del manipulador un sistema de coordenadas fijo a la base del manipulador como sistema cero, contando con todas sus articulaciones rotacionales, siendo q_1, q_2, q_3, q_4 las variables de cada articulación respectivamente. Se cumplió con el parámetro de que el eje Z de cada sistema sea perpendicular al plano en el que se realiza la rotación [Carrasco, P. et al., 2019].

Partiendo de esto, se calculó los parámetros de DH como se muestra en la Tabla 3.1.

| Articulación | θ_i | d_i | a_i | α_i |
|--------------|------------|-------|-------|-------------|
| 1 | q_1 | 0 | l_1 | 90° |
| 2 | q_2 | 0 | l_2 | -90° |
| 3 | q_3 | 0 | l_3 | 90° |
| 4 | q_4 | 0 | l_4 | 0° |

Tabla 3.1: Parámetros DH para el manipulador de cuatro grados de libertad

Luego, se hallan las matrices de transformación para cada articulación siguiendo el modelo de la ecuación 3.1 reemplazando cada uno de los valores descritos en la Tabla 3.1, para cada articulación obteniendo las matrices mostradas en las siguientes ecuaciones:

1. Primera articulación: q_1

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \text{sen}(q_1) & l_1 \cos(q_1) \\ \text{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & l_1 \text{sen}(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

2. Segunda articulación: q_2

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\text{sen}(q_2) & l_2 \cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & l_2 \text{sen}(q_2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3. Tercera articulación: q_3

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \text{sen}(q_3) & l_3 \cos(q_3) \\ \text{sen}(q_3) & 0 & -\cos(q_3) & l_3 \text{sen}(q_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

4. Cuarta articulación: q_4

$$A_3^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\text{sen}(q_4) & 0 & l_4 \cos(q_4) \\ \text{sen}(q_4) & \cos(q_4) & 0 & l_4 \text{sen}(q_4) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Luego de obtener las matrices de transformación de cada articulación, se obtiene el modelo cinemático directo multiplicando cada matriz homogénea para así poder obtener la del extremo terminal con respecto al sistema de referencia.

$$A_0^4 = A_0^1 A_1^2 A_2^3 A_3^4 \quad (3.6)$$

Dando como resultado:

$$A_0^4 =$$

$$\left[\begin{array}{ccc}
 -C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1S_2S_4 & S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2 & C_3S_1 + C_1C_2S_3 \\
 C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4 & -S_4(C_1S_3 + C_2S_3 + C_2C_3S_1) - C_4S_1S_2 & C_2S_1S_3 - C_1C_3 \\
 C_2S_4 + C_3C_4S_2 & C_2C_4 - C_3S_2S_4 & S_1S_3 \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{array}{c}
 l_1C_1 - l_4C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + l_2C_1C_2 - l_3S_1S_3 + l_3C_1C_2C_3 - l_4C_1S_2S_4 \\
 l_1S_1 + l_4C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + l_2C_2S_1 + l_3C_1S_3 + l_3C_2C_3S_1 - l_4S_1S_2S_4 \\
 l_2S_2 + l_3C_3S_2 + l_4C_2S_4 + l_4C_3C_4S_2 \\
 1
 \end{array} \right\} (3.7)$$

Los datos obtenidos se utilizan como anotación simplificada considerando que $\cos_{1 \leq i \leq 4} = C_{1 \leq i \leq 4}$ y $\sin_{1 \leq i \leq 4} = S_{1 \leq i \leq 4}$, donde $1 \leq i \leq 4$ es la articulación q_i . De la matriz anterior se obtiene el modelo cinemático directo de posición para el brazo robótico de 4 GDL, donde la posición del extremo terminal del robot manipulador la obtenemos extrayendo los 3 primeros elementos de la cuarta columna que representan la posición en el eje X, eje Y y eje Z obteniendo la siguiente ecuación:

$$\vec{O}_0^4 = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1C_1 - l_4C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + l_2C_1C_2 - l_3S_1S_3 + l_3C_1C_2C_3 - l_4C_1S_2S_4 \\
 l_1S_1 + l_4C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) + l_2C_2S_1 + l_3C_1S_3 + l_3C_2C_3S_1 - l_4S_1S_2S_4 \\
 l_2S_2 + l_3C_3S_2 + l_4C_2S_4 + l_4C_3C_4S_2 \end{bmatrix} (3.8)$$

Mientras que su orientación final con respecto a la base está dada por la matriz de rotación:

$$\vec{R}_0^4 = \begin{bmatrix} -C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1S_2S_4 & S_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) - C_1C_4S_2 & C_3S_1 + C_1C_2S_3 \\
 C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - S_1S_2S_4 & -S_4(C_1S_3 + C_2S_3 + C_2C_3S_1) - C_4S_1S_2 & C_2S_1S_3 - C_1C_3 \\
 C_2S_4 + C_3C_4S_2 & C_2C_4 - C_3S_2S_4 & S_1S_3 \end{bmatrix} (3.9)$$

3.1.2. Cinemática Inversa de Posición

El conocimiento de la cinemática inversa del brazo mecánico nos permite obtener, mediante el conocimiento de la posición y orientación deseadas para el efector final, el valor que deben de tener los ángulos entre los eslabones del mecanismo.

Para la cinemática inversa tendremos una restricción en la cuarta articulación donde $q_4 = 0$ para así poder tener una matriz de 3×1 con tres incógnitas q_1, q_2, q_3 , donde hallaremos los valores a partir del extremo terminal A_0^4 .

$$\vec{O}_0^4 = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 - l_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 \\ l_1 S_1 + l_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 \\ l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_3 S_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Ahora, se cuenta con un sistema no lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

En [Carrasco, P. et al., 2019], [Cuya, S. et al., 2012] y [Torrealba, R., et al., 2006] nos plantean las soluciones directas halladas bajo el software Matlab, sin embargo, como se desea plantear la justificación teórica del modelado matemático cinemático inverso de posición, se plantea la búsqueda de las soluciones del sistema 3.11.

Se considera la búsqueda de la solución de un sistema de ecuaciones no lineal de tipo

$$\begin{cases} l_1 C_1 - l_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 = 0 \\ l_1 S_1 + l_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 = 0 \\ l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_3 S_2 = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Donde F_x , F_y y F_z son funciones diferenciables dentro del intervalo de las posibles soluciones.

Para la obtención de las soluciones existe un método que se detalla a continuación

Método Newton-Rhapon

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el método Newton-Rhapon consiste en tomar un $(q_{1+i}, q_{2+i}, q_{3+i}) \in \mathbb{R}^n$, es decir, una aproximación inicial a la solución y considerar la iteración:

$$\begin{bmatrix} q_{1+i} \\ q_{2+i} \\ q_{3+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} - [J(q_{1+i}, q_{2+i}, q_{3+i})]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La función f para este caso es el sistema:

$$\begin{cases} l_1 C_1 - l_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 = 0 \\ l_1 S_1 + l_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 = 0 \\ l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_3 S_2 = 0 \end{cases}$$

que es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo que el conjunto de las aproximaciones se vería representada bajo una terna dentro de un entorno donde se encuentren las posiciones q_1 , q_2 y q_3 las cuales se aproximan entre los parámetros de Denavit Hartenberg dados en la tabla 3.1.

La matriz jacobiana de este sistema se obtiene de las primeras derivadas con respecto a cada articulación q_1 , q_2 , q_3 , obteniendo así el siguiente resultado:

$$J = \begin{bmatrix} l_1 l_4 (S_3 C_1^2 - S_3 S_1^2 + C_3 C_2 S_{(2.1)}) - l_2 C_2 S_1 - l_3 S_3 C_1 - l_3 C_2 C_3 S_1 \\ l_1 C_1 + l_4 (-S_3 S_1 + C_2 C_3 C_1) + l_2 C_2 C_1 - l_3 S_3 S_1 + l_3 C_2 C_3 C_1 \\ 0 \\ l_1 l_4 C_1^2 C_3 S_2 - l_2 C_1 S_2 - l_3 C_1 C_3 S_2 & l_1 l_4 C_1 (S_1 C_3 + C_1 S_3 C_2) - l_3 S_1 C_3 - l_3 C_1 S_3 C_2 \\ -l_4 S_1 C_3 S_2 - l_2 S_1 S_2 - l_3 S_1 C_3 S_2 & l_3 C_1 C_3 + l_4 (C_1 C_3 - S_1 S_3 C_2) - l_3 S_1 S_3 C_2 \\ l_2 C_2 + l_3 C_3 C_2 + l_4 C_3 C_2 & -l_3 S_2 S_3 - l_4 S_2 S_3 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Donde C_1^2 , S_1^2 y $S_{(2.1)}$ son las funciones $\cos^2(q_1)$, $\sin^2(q_1)$ y $\sin(2 \cdot q_1)$ respectivamente.

Nota 7. Si bien, de la ecuación 3.12 se puede operar hallando la inversa de la matriz $[J(q_{1+i}, q_{2+i}, q_{3+i})]^{-1}$ y realizando el producto con el vector columna de las funciones $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$ consiste en resolver el sistema de ecuaciones

$$[J(q_{1+i}, q_{2+i}, q_{3+i})]^{-1} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Donde J sería la matriz de coeficientes y F el vector de constantes.

Nota 8. Es importante que para dar las primeras aproximaciones hacer referencia a los parámetros DH vistos en la cinemática directa de posición.

3.2. Cinemática de Velocidad

El aporte de cada articulación depende de la posición del robot para cada instante de tiempo (t). Por tanto, para hallar el modelo cinemático de velocidad es necesario trabajar partiendo de los parámetros D-H.

3.2.1. Cinemática directa de Velocidad

Para realizar el estudio completo de la cinemática del manipulador planteado, se continua con el cálculo de las velocidades en el extremo terminal lo cual resulta de la composición de las velocidades lineales y angulares de los eslabones de la cadena cinemática multiplicando la velocidad en las articulaciones por el $J_{6 \times 6}$

$$\dot{X}_{(q)} = J_{(q)_{6 \times 6}} * \dot{q}_{6 \times 1} \quad (3.14)$$

Donde $\dot{X}_{(q)}$ es el vector estado de velocidad del efector final, dado por

$$\dot{X}_{(t)} = [\dot{v}_x \dot{v}_y \dot{v}_z \omega_x \omega_y \omega_z]^T \quad (3.15)$$

Cuyos tres primeros elementos representan la velocidad lineal del extremo terminal del robot manipulador a lo largo de los ejes cartesianos y los tres últimos elementos representan las velocidades angulares ($\omega_x \omega_y \omega_z$) alrededor de los ejes globales X, Y, y Z. Partiendo de esto, se dice que el vector de velocidad en las articulaciones esta dado por la siguiente ecuación:

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \dot{q}_4] \quad (3.16)$$

[Ruiz Otalora et al., 2022.]

Matriz Jacobiana

Se debe establecer las relaciones entre las velocidades en el espacio articular q_1, q_2, q_3, q_4 . Para calcular el jacobiano, previamente se calcula la cinemática directa mediante dos métodos presentados a continuación:

Método Analítico Se trata de considerar el efecto de la velocidad en cada articulación (en nuestro caso **rotacional**) sobre la velocidad lineal \vec{v} y angular $\vec{\omega}$ del extremo, o en general, de cualquier punto O_n de la cadena cinemática.

Este método es el menos descrito en la bibliografías principales como [Carrasco, P. et al., 2019], por lo que surge la necesidad de realizar el estudio de cada articulación bajo la figura 3.2.

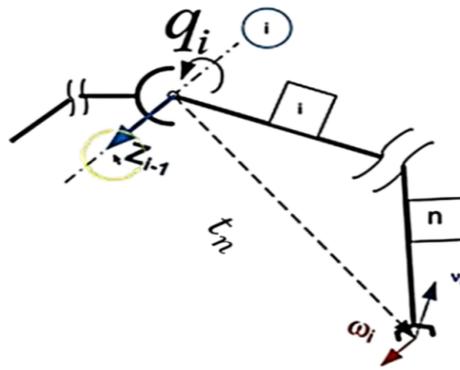


Figura 3.2: Representación de asignaciones de velocidad lineal \vec{v} y velocidad angular $\vec{\omega}$

Fuente: Elaboración propia

Realizado por: Cáceres, F., 2023.

Donde Z_{i-1} es el vector unitario asociado a O_{i-1} que se sitúa en el eje del movimiento de la articulación q_n basado en los parámetros DH; t_n es el vector que va desde el origen del sistema O_0 a O_1 hasta el sistema O_3 . En la siguiente figura se representa la deducción de las ecuaciones

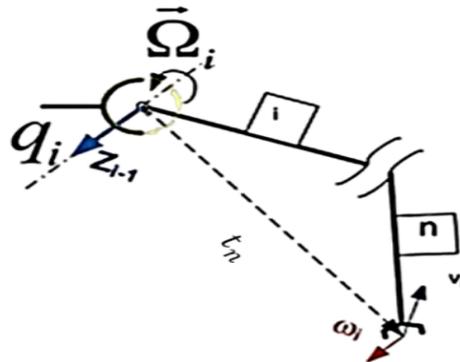


Figura 3.3: Representación de velocidad de rotación

Fuente: Elaboración propia

Realizado por: Cáceres, F., 2023.

Siendo $\vec{\Omega}_i$ la velocidad de rotación expresada como:

$$\vec{\Omega}_i = z_{i-1}^{\vec{}} \cdot q_i \quad (3.17)$$

Donde el módulo del vector Ω será q_i y la dirección $z_{i-1}^{\vec{}}$ del vector. Este vector origina en el extremo una velocidad lineal \vec{v}_i y de rotación (velocidad angular) \vec{w}_i que son representadas por:

$$\vec{v}_i = \vec{\Omega}_i \times t_n^{i-1} = z_{i-1}^{\vec{}} \cdot q_i \times t_n^{i-1} \quad (3.18)$$

$$\vec{w}_i = \vec{\Omega}_i = z_{i-1}^{\vec{}} \cdot q_i \quad (3.19)$$

Ahora, dada la deducción de las velocidades lineal y angular \vec{v}_i y \vec{w}_i respectivamente, procedemos a construir la matriz Jacobiana con las cuatro articulaciones q_4 rotacionales de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^4 \vec{v}_i = (\vec{z}_0 \times t_3^0 \cdot q_1) + (\vec{z}_1 \times t_3^1 \cdot q_2) + (\vec{z}_2 \times t_3^2 \cdot q_3) + (\vec{z}_3 \times t_3^3 \cdot q_4) \quad (3.20)$$

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^4 \vec{w}_i = (\vec{z}_0 \cdot q_1) + (\vec{z}_1 \cdot q_2) + (\vec{z}_2 \cdot q_3) + (\vec{z}_3 \cdot q_4) \quad (3.21)$$

Luego, se procede a hallar los vectores $\vec{z}_0, \vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3$ son vectores cuyos elementos se encuentran en la tercera columna de cada matriz de rotación hallados gracias a la construcción de la matriz de transformación homogénea y, sus componentes, y $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3, \vec{t}_4$ son vectores de posición cuyos elementos se encuentran en la cuarta columna de cada matriz de rotación entre el eslabón 0, 1, 2 y 3 con respecto a la referencia respectivamente. A continuación se halla cada uno de ellos:

- De la ecuación 1.2c se toma la columna 3 de la matriz de rotación ya que estamos partiendo de la base del robot, obteniendo:

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

- Sea la matriz A_0^1 de la cinemática directa

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se extrae los vectores de las columnas 3 y 4.

$$Z_1 = \begin{bmatrix} S_1 \\ -C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t_1 = \begin{bmatrix} l_1 C_1 \\ l_1 S_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

- A_0^2 se obtiene de la multiplicación de las matrices intermedias: $A_0^1 \times A_1^2$

$$A_0^2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & -C_1 S_2 & C_1(l_1 + l_2 C_2) \\ C_2 S_1 & C_1 & -S_1 S_2 & S_1(l_1 + l_2 C_2) \\ S_2 & 0 & C_2 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Se extrae los vectores de las columnas 3 y 4.

$$Z_2 = \begin{bmatrix} -C_1 S_2 \\ S_1 S_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad t_2 = \begin{bmatrix} C_1(l_1 + l_2 C_2) \\ S_1(l_1 + l_2 C_2) \\ l_2 S_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

- A_0^3 se obtiene de la multiplicación de las matrices intermedias: $A_0^1 \times A_1^2 \times A_2^3$

$$A_0^3 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 C_3 - S_1 S_2 & -C_1 S_2 & C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3 & l_1 C_1 + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 \\ C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1 & -S_1 S_2 & C_2 S_1 S_3 & l_1 S_1 + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 \\ C_3 S_2 & C_2 & S_2 S_3 & S_2(l_2 + l_3 C_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Se extrae los vectores de las columnas 3 y 4.

$$Z_3 = \begin{bmatrix} C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3 \\ C_2 S_1 S_3 \\ S_2 S_3 \end{bmatrix} \quad t_3 = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 \\ l_1 S_1 + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 \\ S_2(l_2 + l_3 C_3) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

- A_0^4 se obtiene de la multiplicación de las matrices intermedias: $A_0^1 \times A_1^2 \times A_2^3 \times A_3^4 A_0^4 =$

$$\begin{bmatrix} -C_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 S_2 S_4 & S_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) - C_1 C_4 S_2 & C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3 \\ C_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - S_1 S_2 S_4 & -S_4(C_1 S_3 + C_2 S_3 + C_2 C_3 S_1) - C_4 S_1 S_2 & C_2 S_1 S_3 - C_1 C_3 \\ C_2 S_4 + C_3 C_4 S_2 & C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4 & S_1 S_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{array}{c} l_1 C_1 - l_4 C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 - l_4 C_1 S_2 S_4 \\ l_1 S_1 + l_4 C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 - l_4 S_1 S_2 S_4 \\ l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2 \\ 1 \end{array} \right] \quad (3.29)$$

Se extrae el vector de la columna 4

$$t_4 = \begin{bmatrix} l_1 C_1 - l_4 C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 - l_4 C_1 S_2 S_4 \\ l_1 S_1 + l_4 C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 - l_4 S_1 S_2 S_4 \\ l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Después de haber hallado los vectores $\vec{z}_0, \vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3$ y $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3, \vec{t}_4$ los reemplazamos en la siguiente matriz:

$$J_0^A = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \times \vec{t}_3^0 & \vec{z}_1 \times \vec{t}_3^1 & \vec{z}_2 \times \vec{t}_3^2 & \vec{z}_3 \times \vec{t}_3^3 \\ \vec{z}_0 & \vec{z}_1 & \vec{z}_2 & \vec{z}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Se expresan explícitamente todos los elementos resultantes de la matriz jacobiana que depende de las posiciones articulares, particularmente de q_1, q_2, q_3, q_4 .

$$J_0^A = \begin{bmatrix} l_4 S_1 S_2 S_4 - l_4 C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - l_2 C_2 S_1 - l_3 C_1 S_3 - l_3 C_2 C_3 S_1 - l_1 S_1 \\ l_1 C_1 - l_4 C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 - l_4 C_1 S_2 S_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -C_1 (l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) & -(C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3) (l_3 + l_4 C_4) \\ -S_1 (l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) & (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3) (l_3 + l_4 C_4) \\ l_2 C_2 + l_3 C_2 C_3 - l_4 S_2 S_4 + l_4 C_2 C_3 C_4 & -S_2 S_3 (l_3 + l_4 C_4) \\ S_1 & -C_1 S_2 \\ -C_1 & -S_1 S_2 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 -l_4(C_1C_4S_2 - S_1S_3S_4 + C_1C_2C_3S_4) \\
 -l_4(C_4S_1S_2 + C_1S_3S_4 + C_2C_3S_1S_4) \\
 l_4(C_2C_4 - C_3S_2S_4) \\
 C_3S_1 + C_1C_2S_3 \\
 C_2S_1S_3 - C_1C_3 \\
 S_2S_3
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} -l_4(C_1C_4S_2 - S_1S_3S_4 + C_1C_2C_3S_4) \\ -l_4(C_4S_1S_2 + C_1S_3S_4 + C_2C_3S_1S_4) \\ l_4(C_2C_4 - C_3S_2S_4) \\ C_3S_1 + C_1C_2S_3 \\ C_2S_1S_3 - C_1C_3 \\ S_2S_3 \end{array}} \right\} \quad (3.32)$$

Método Diferencial Este método consiste en hallar las derivadas del modelo cinemático directo. Por supuesto este método fue el más común ya que resulta más sencillo hallar las primeras derivadas de cada ecuación.

Mediante la posición y orientación se obtiene seis variables $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ con respecto a las articulaciones q_1, q_2, q_3, q_4 se expresan de la siguiente manera:

$$x = f_x(q_1, q_2, q_3, q_4)$$

$$y = f_y(q_1, q_2, q_3, q_4)$$

$$z = f_z(q_1, q_2, q_3, q_4)$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4)$$

$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4)$$

$$\gamma = f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4)$$

Con lo que se obtienen las siguientes derivadas:

$$\begin{array}{lll}
 \dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_1} q_n & \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_1} q_n & \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_1} q_n \\
 \dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_1} q_n & \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_1} q_n & \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} q_n
 \end{array}$$

Con $q_n = 4$, se obtienen los siguientes resultados:

- Para q_1 :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} = \frac{\partial}{\partial q_1} (l_1C_1 - l_4C_4(S_1S_3 - C_1C_2C_3) + l_2C_1C_2 - l_3S_1S_3 + l_3C_1C_2C_3 - l_4C_1S_2S_4) = \\
 l_4S_1S_2S_4 - l_4C_4(C_1S_3 + C_2C_3S_1) - l_2C_2S_1 - l_3C_1S_3 - l_3C_2C_3S_1 - l_1S_1 \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial q_1}(l_1 S_1 + l_4 C_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 - l_4 S_1 S_2 S_4) =$$

$$l_1 C_1 - l_4 C_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 - l_4 C_1 S_2 S_4 \quad (3.34)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial}{\partial q_1}(l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) = 0 \quad (3.35)$$

• Para q_2 :

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial q_2}(l_1 C_1 - l_4 C_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 - l_4 C_1 S_2 S_4 =$$

$$-C_1(l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) \quad (3.36)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial q_2}(l_1 S_1 + l_4 C_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 - l_4 S_1 S_2 S_4) =$$

$$-S_1(l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) \quad (3.37)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial}{\partial q_2}(l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) = l_2 C_2 + l_3 C_2 C_3 - l_4 S_2 S_4 + l_4 C_2 C_3 C_4 \quad (3.38)$$

• Para q_3

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial q_3}(l_1 C_1 - l_4 C_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 - l_4 C_1 S_2 S_4) =$$

$$-(C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3)(l_3 + l_4 C_4) \quad (3.39)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial q_3}(l_1 S_1 + l_4 C_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 - l_4 S_1 S_2 S_4) =$$

$$(C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)(l_3 + l_4 C_4) \quad (3.40)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial}{\partial q_3}(l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) = -S_2 S_3(l_3 + l_4 C_4) \quad (3.41)$$

• Para q_4

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial q_4}(l_1 C_1 - l_4 C_4(S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 - l_4 C_1 S_2 S_4) =$$

$$-l_4(C_1 C_4 S_2 - S_1 S_3 S_4 + C_1 C_2 C_3 S_4) \quad (3.42)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial q_4}(l_1 S_1 + l_4 C_4(C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) + l_2 C_2 S_1 + l_3 C_1 S_3 + l_3 C_2 C_3 S_1 - l_4 S_1 S_2 S_4) =$$

$$-l_4(C_4 S_1 S_2 + C_1 S_3 S_4 + C_2 C_3 S_1 S_4) \quad (3.43)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial}{\partial q_4}(l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) = l_4(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \quad (3.44)$$

Como se puede observar mediante el método analítico, se obtienen la matriz Jacobiana de 6×4 sin embargo, en el presente método solamente se obtiene una matriz de 3×4 . Esto sucede debido a que solo arrancamos de la posición del robot, más no de su orientación con lo que se procede a utilizar una herramienta muy importante dentro de Robótica.

Definición 7. Los **ángulos de Euler** son tres ángulos que describen la orientación de un objeto en el espacio tridimensional, generalmente representados como rotaciones alrededor de los ejes $x, y, y z$.

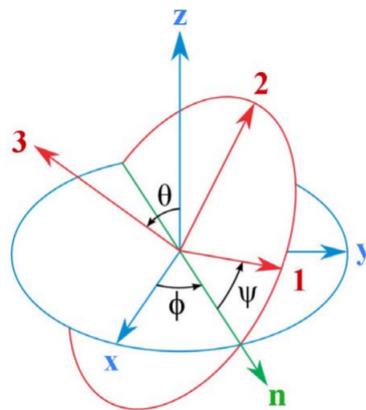


Figura 3.4: Representación de los ángulos de Euler en el espacio.

Fuente: [Armesto, A., 2020]

Los ángulos α, β, γ representan el movimiento rotacional (para este trabajo) de cada una de las articulaciones.

Es importante aclarar que como el robot tiene cuatro grados de libertad, no es lo más recomendable resolver estos ángulos de manera geométrica, sin embargo en las ecuaciones 3.22, 3.23, 3.25 y 3.27 específicamente los vectores $\vec{z}_0, \vec{z}_1, \vec{z}_2$ y \vec{z}_3 representan los movimientos rotacionales, por lo cual se expresa de la siguiente manera:

- Para q_1 :

$$\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

- Para q_2 :

$$\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} S_1 \\ -C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

- Para q_3 :

$$\vec{z}_2 = \begin{bmatrix} -C_1 S_2 \\ S_1 S_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

- Para q_4

$$\vec{z}_3 = \begin{bmatrix} C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3 \\ C_2 S_1 S_3 \\ S_2 S_3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Para, finalmente construir la matriz con las respectivas derivadas halladas en las ecuaciones 3.33, 3.34, 3.35 con 3.22 para la primera columna; 3.36, 3.37, 3.38 con 3.23 para la segunda columna; 3.39, 3.40, 3.41 con 3.25 para la tercera columna y finalmente 3.42, 3.43, 3.44 con 3.27 para la cuarta columna, obteniendo de la misma manera la Jacobiana:

$$J_0^4 = \begin{bmatrix} l_4 S_1 S_2 S_4 - l_4 C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - l_2 C_2 S_1 - l_3 C_1 S_3 - l_3 C_2 C_3 S_1 - l_1 S_1 \\ l_1 C_1 - l_4 C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 - l_4 C_1 S_2 S_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} -C_1(l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) & -(C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3)(l_3 + l_4 C_4) \\ -S_1(l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) & (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)(l_3 + l_4 C_4) \\ l_2 C_2 + l_3 C_2 C_3 - l_4 S_2 S_4 + l_4 C_2 C_3 C_4 & -S_2 S_3(l_3 + l_4 C_4) \\ S_1 & -C_1 S_2 \\ -C_1 & -S_1 S_2 \\ 0 & C_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -l_4(C_1C_4S_2 - S_1S_3S_4 + C_1C_2C_3S_4) \\
 -l_4(C_4S_1S_2 + C_1S_3S_4 + C_2C_3S_1S_4) \\
 \quad l_4(C_2C_4 - C_3S_2S_4) \\
 \quad \quad C_3S_1 + C_1C_2S_3 \\
 \quad \quad \quad C_2S_1S_3 - C_1C_3 \\
 \quad \quad \quad \quad S_2S_3
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right] \quad (3.49)$$

3.2.2. Cinemática Inversa de Velocidad

La cinemática inversa de posición en [Carrasco, P. et al., 2019], [Ruiz Otalora et al., 2022.] y [Torrealba, R., et al., 2006] solamente se plantea la ecuación 3.50, lo que se busca ahora es detallar cómo, de las velocidades lineales y angulares ya halladas en la ecuación 3.49 se puede calcular el valor de las articulaciones que deseen alcanzar las velocidades.

De la ecuación

$$\dot{X}_{(q)} = J_{(q)6 \times 4} * \dot{q}_{4 \times 1} \quad (3.50)$$

Donde $\vec{X}_{(q)}$ es el vector estado de velocidad del efector final, dado por

$$\vec{X}_{(q)} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

especifica la velocidad del efector final que resultará cuando las articulaciones se muevan con velocidad $\vec{X}_{(q)}$. Partiendo de esto, se dice que el vector de velocidad en los eslabones esta dado por la ecuación:

$$\vec{q}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

El problema inverso de velocidad es el problema de encontrar las velocidades articulares $\vec{q}_{4 \times 1}$ que producen la velocidad deseada del efector final. Cuando el Jacobiano es una matriz cuadrada de $(n \times n)$ y no singular, este problema se puede resolver mediante

$$\vec{q}_{4 \times 1} = J_{(q)}^{-1} * \vec{X}_{(q)6 \times 1} \quad (3.51)$$

Para manipuladores que no tienen exactamente seis eslabones, el Jacobiano no puede ser invertido. En este caso habrá una solución a la ecuación 3.51 si y sólo si $\vec{X}_{(q)6 \times 1}$ se encuentra en el espacio del rango del Jacobiano.

La matriz de este sistema, es una matriz Jacobiaba $J_{(q)}_{6 \times 4}$, por lo que es una matriz no cuadrada, por lo tanto, no invertible, entonces es importante aumentar el rango de la matriz 3.49

Definición 8. El rango de una matriz J es el número máximo de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. El rango fila y el rango columna siempre son iguales.

Nota 9. El número de columnas independientes de una matriz J de m filas y n columnas es igual a la dimensión del espacio columna de J

También la dimensión del espacio fila determina el rango. El rango de J será, por tanto, un número no negativo, menor o igual que el mínimo entre m y n .

$$J \in M_{m \times n} \rightarrow 0 \leq \text{rango}(J) \leq \min \{m, n\}$$

Para nuestro caso:

$$J_{(q)}_{6 \times 4} \in M_{m \times n} \rightarrow 0 \leq \text{rango}(J) \leq \min \{6, 4\}$$

Nota 10. Un vector $\vec{X}_{(q)}$ pertenece al rango de J si y solo si

$$\text{rango}J(q) = \text{rango}[J(q)|\vec{X}_{(q)}]$$

A partir de la ecuación 3.51 se puede resolver para $\vec{q}_{4 \times 1} \in \mathbb{R}^4$ una vez que el rango de la matriz aumentada $[J(q)|\vec{X}_{(q)}]$ sea el mismo que el rango del Jacobiano $J_{(q)}_{6 \times 4}$.

Este es un resultado estándar del álgebra lineal y existen muchos algoritmos, como la eliminación Gaussiana y método de determinantes, para resolver tales sistemas de ecuaciones lineales.

Eliminación Gaussiana Se calcula el rango a partir de eliminar todas las filas o columnas linealmente dependientes. Las transformaciones lineales que se aplican al sistema de ecuaciones no modifican el rango de la matriz original.

Definición 9. Una fila o columna v de la matriz $J(q)$ es combinación lineal de otras dos u_1 y u_2 si existen dos números λ y μ distintos de 0 tal que $v = \lambda u_1 + \mu u_2$

Definición 10. Decimos que n filas o columnas son linealmente dependientes una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las $n - 1$ filas o columnas.

Método de determinantes Se debe buscar la mayor submatriz y calcular su determinante. Si el determinante es distinto de 0, el rango será el mismo número de filas o columnas que tenga la submatriz.

Determinantes y reglas estándares Seleccionada ya la mayor submatriz, se calcula el determinante y se aplican las siguientes reglas lógicas para conocer su rango:

1. Si más de un elemento de la matriz original es distinto de 0, entonces el determinante será distinto de 0, por lo tanto, el rango de la matriz original será mínimo 1.
2. Si la dimensión de la submatriz es $n \times n$ y el determinante de la submatriz es distinto de 0, el rango de la matriz original será n .

Para nuestro caso, el rango de nuestra matriz es 4, ya que la submatriz puede ser de dimensión 4×4 , seleccionando de la ecuación 3.49 las posiciones $j_{1 \times 1}, j_{1 \times 2}, j_{1 \times 3}, j_{1 \times 4}, j_{2 \times 1}, j_{2 \times 2}, j_{2 \times 3}, j_{2 \times 4}, j_{3 \times 1}, j_{3 \times 2}, j_{3 \times 3}, j_{3 \times 4}$, y para la última fila, se puede escoger entre las filas 3, 4 o 5.

Con la submatriz establecida a conveniencia, se aplica las reglas estándares revisadas anteriormente y se verifica el rango de la matriz 3.49

El problema continua ya que se necesita hallar la inversa de una matriz no cuadrada 3.49, por lo que existe una herramienta del Álgebra lineal llamada **Matriz pseudoinversa**.

Existen varios tipos de matrices pseudoinversas, para este tipo de modelado se clasifican en: **matriz pseudoinversa por derecha** y **matriz pseudoinversa por izquierda** (que es la que se va a utilizar, gracias al rango de la matriz).

Definición 11. Dada una matriz $J_{(q)(m \times n)}$ con $m > n$, existe una matriz $J_{(q)(n \times m)}^+$ tal que:

$$J_{(q)(n \times m)}^+ \cdot J_{(q)(m \times n)} = I_{(n \times n)} \quad (3.52)$$

, se dice que $J_{(q)(n \times m)}^+$ es una pseudoinversa por la izquierda de $J_{(q)(m \times n)}$

Definición 12. Existencia de la matriz pseudoinversa Sea $J_{(q)6 \times 4} \in M_{m \times n}$ tiene pseudoinversa por la izquierda si y solo si el rango de $J_{(q)6 \times 4} = n$ y se calcula:

$$J_{(q)4 \times 6}^+ = (J_{(q)4 \times 6}^t \cdot J_{(q)6 \times 4})^{-1} \cdot J_{(q)4 \times 6}^t \quad (3.53)$$

Una vez hallada la matriz pseudoinversa de dimensión 4×6 , de la ecuación 3.51, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{q}_{4 \times 1} = J_{(q)4 \times 6}^+ * \vec{X}_{(q)6 \times 1} \quad (3.54)$$

Por propiedades de multiplicación de matrices, se tiene que el resultado de la ecuación 3.54 nos resulta el vector de las articulaciones, el cual ha sido calculado en base a las definiciones de la matriz pseudoinversa, ya que, al no tener una matriz jacobiana invertible, inmediatamente se plantea el problema de que deberíamos realizar algún tipo de eliminación de filas o columnas como lo propone [Carrasco, P. et al., 2019], sin embargo, se logró la deducción de la pseudoinversa bajo la intervención de definiciones matemáticas.

3.3. Singularidades

El Jacobiano $J_{(q)}_{6 \times 4}$ define una función

$$\tilde{\zeta} = J_{(q)}_{6 \times 4} \cdot q_{4 \times 1} \quad (3.55)$$

entre el vector $q_{4 \times 1}$ de velocidades articulares y el vector $\tilde{\zeta} = (v, w)$ de velocidades del efector final. Esto implica que todas las posible velocidades del efector final son combiaciones lineales de las columnas de la matriz Jacobiana

$$\tilde{\zeta} = \vec{J}_1 \cdot q_1 + \vec{J}_2 \cdot q_2 + \vec{J}_3 \cdot q_3 + \vec{J}_4 \cdot q_4 \quad (3.56)$$

con $\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3, \vec{J}_4$ columnas del Jacobiano $J_{(q)}_{6 \times 4}$. Desglozando para la función $\tilde{\zeta}$ se tiene:

$$\tilde{\zeta} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 \cdot \vec{J}_3 \cdot \vec{J}_4 * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

lo que implica que al hacer el producto, obtengo los siguientes vectores:

$$\vec{v} = \vec{J}_{v1} \cdot q_1 + \vec{J}_{v2} \cdot q_2 + \vec{J}_{v3} \cdot q_3 + \vec{J}_{v4} \cdot q_4$$

para la velocidad lineal y

$$\vec{w} = \vec{J}_{w1} \cdot q_1 + \vec{J}_{w2} \cdot q_2 + \vec{J}_{w3} \cdot q_3 + \vec{J}_{w4} \cdot q_4$$

para la velocidad angular. Los vectores \vec{v} y \vec{w} se compone de una suma de vectores, de dirección dada por \vec{J}_v y \vec{J}_w

Sean las columnas de la matriz Jacobiana 3.49:

$$\vec{J}_1 = \begin{bmatrix} l_4 S_1 S_2 S_4 - l_4 C_4 (C_1 S_3 + C_2 C_3 S_1) - l_2 C_2 S_1 - l_3 C_1 S_3 - l_3 C_2 C_3 S_1 - l_1 S_1 \\ l_1 C_1 - l_4 C_4 (S_1 S_3 - C_1 C_2 C_3) + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 - l_4 C_1 S_2 S_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{J}_2 = \begin{bmatrix} l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2 \\ -S_1(l_2 S_2 + l_3 C_3 S_2 + l_4 C_2 S_4 + l_4 C_3 C_4 S_2) \\ l_2 C_2 + l_3 C_2 C_3 - l_4 S_2 S_4 + l_4 C_2 C_3 C_4 \\ S_1 \\ -C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{J}_3 = \begin{bmatrix} -(C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3)(l_3 + l_4 C_4) \\ (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3)(l_3 + l_4 C_4) \\ -S_2 S_3(l_3 + l_4 C_4) \\ -C_1 S_2 \\ -S_1 S_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{J}_4 = \begin{bmatrix} l_4(C_1 C_4 S_2 - S_1 S_3 S_4 + C_1 C_2 C_3 S_4) \\ -l_4(C_4 S_1 S_2 + C_1 S_3 S_4 + C_2 C_3 S_1 S_4) \\ l_4(C_2 C_4 - C_3 S_2 S_4) \\ C_3 S_1 + C_1 C_2 S_3 \\ C_2 S_1 S_3 - C_1 C_3 \\ S_2 S_3 \end{bmatrix}$$

representan la dirección del vector velocidad (lineal y angular) del extremo, originado por el giro de la articulación q_1, \dots, q_4

Como se revisó anteriormente, el rango de la matriz Jacobiana es $\text{rango} J_{(q)_{6 \times 4}} = 4$, eso nos quiere decir que es el número de columnas linealmente independientes en la matriz. Ahora, para la matriz $J_{(q)_{6 \times 4}} \in M_{m \times n}$ entonces, $0 \leq \text{rango}(J) \leq \min \{6, 4\}$

Nota 11. El rango de una matriz no es necesariamente constante. En efecto, el rango de la matriz Jacobiana del manipulador dependerá de la configuración $q_{4 \times 1}^{\vec{}}$

Las configuraciones para las cuales el rango de la matriz $J_{(q)_{6 \times 4}}$ es menor que su máximo valor se llaman **singularidades** o configuraciones singulares.

Es importante identificar las configuraciones singulares ya que:

- Las singularidades representan configuraciones a partir de las cuales ciertas direcciones de movimiento pueden ser inalcanzables.
- En las singularidades, velocidades acotadas del efector final pueden corresponder a velocidades articulares desacotadas.
- En las singularidades, fuerzas y torques acotados en las articulaciones pueden corresponder a torques desacotados del efector final.
- Las singularidades usualmente (más no siempre) corresponden a puntos en los límites del espacio de trabajo del manipulador, es decir, a puntos de máximo alcance del manipulador.
- Las singularidades corresponden a puntos en el espacio de trabajo del manipulador que pueden ser inalcanzables bajo pequeñas perturbaciones de los parámetros de los eslabones, como longitud, offset, etc.
- Cerca de las singularidades no existirá una única solución al problema de cinemática inversa. En esos casos puede no haber solución o puede haber infinito número de soluciones.

Para el cálculo de las singularidades, se optó por hallar un $J_{(q)6 \times 4}$ reducido de 3×3 donde se hizo una serie de combinaciones lineales teniendo así los siguientes resultados donde cada una tiene un rango de 3 e inversa 3×3 a excepción de la combinación de la fila 3, 4 y 5.

$$J_R = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 C_2 S_1 - l_3 C_1 S_3 - l_3 C_2 C_3 S_1 & -C_1 S_2 (l_2 + l_3 C_3) \\ l_1 C_1 + l_2 C_1 C_2 - l_3 S_1 S_3 + l_3 C_1 C_2 C_3 & -S_1 S_2 (l_2 + l_3 C_3) \\ 0 & C_2 (l_2 + l_3 C_3) \\ 0 & S_1 \\ 0 & -C_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -l_3(C_3S_1 + C_1C_2S_3) \\ l_3(C_1C_3 - C_2S_1S_3) \\ -l_3S_2S_3 \\ -C_1S_2 \\ -S_1S_2 \\ C_2 \end{array} \quad (3.57)$$

Posición donde se encuentra cada uno de los elementos para una mayor visualización.

$$J = \begin{bmatrix} J(1,1) & J(1,2) & J(1,3) \\ J(2,1) & J(2,2) & J(2,3) \\ J(3,1) & J(3,2) & J(3,3) \\ J(4,1) & J(4,2) & J(4,3) \\ J(5,1) & J(5,2) & J(5,3) \\ J(6,1) & J(6,2) & J(6,3) \end{bmatrix}$$

- Combinación de fila 1, 2 y 3.
- Combinación de fila 2, 3 y 4.
- Combinación de fila 1, 2 y 4.
- Combinación de fila 2, 3 y 5.
- Combinación de fila 1, 2 y 5.
- Combinación de fila 2, 3 y 6.
- Combinación de fila 1, 3 y 4.
- Combinación de fila 2, 4 y 5.
- Combinación de fila 1, 3 y 5.
- Combinación de fila 2, 4 y 6.
- Combinación de fila 1, 3 y 6.
- Combinación de fila 3, 4 y 5.
- Combinación de fila 1, 4 y 5.

- Combinación de fila 3, 4 y 6.
- Combinación de fila 1, 4 y 6.
- Combinación de fila 3, 5 y 6.
- Combinación de fila 1, 5 y 6
- Combinación de fila 4, 5 y 6.

También se realizó el mismo procedimiento para hallar J_{R_2} reducido de 2×2 entre las filas 2 a 5 y columnas 2 y 3, teniendo las siguientes combinaciones basadas en la ecuación 3.57:

$$J_{R_2} = \begin{bmatrix} -S_1 S_2 (l_2 + l_3 C_3) & l_3 (C_1 C_3 - C_2 S_1 S_3) \\ C_2 (l_2 + l_3 C_3) & -l_3 S_2 S_3 \\ S_1 & -C_1 S_2 \\ -C_1 & -S_1 S_2 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

- Fila 2 y columna 2.
- Fila 3 y columna 2
- Fila 4 y columna 2
- Fila 5 y columna 2
- Fila 2 y columna 3
- Fila 3 y columna 3
- Fila 4 y columna 3
- Fila 5 y columna 3

Se halla el determinante de esta matriz y se obtiene que cuando q_1 y q_2 sean igual a 0, el determinante será 0. Con este proceso, se puede garantizar que las matrices son cuadradas y que son linealmente independientes cada una.

BIBLIOGRAFÍA

ACOSTA TORRES, Antonio David. *Exploración del software abierto RoboDK.* 2022.

ARMESTO ÁNGEL, Leopoldo. *Sistemas robotizados. Ángulos de Euler.* 2020.

CARRASCO, O. & PERCY, J. *Diseño e implementación de un prototipo robótico de 4GDL a partir de la aplicación de una guía metodológica propuesta.* 2019.

CUYA, Solari; et al. *Cinemática directa e inversa de nun robot 4DOF*
Obtenido de IEEE UNAC: [http://es.scribd.com/doc/142121427/
CINEMATICADIRECTA-E-INVERSA-DE-UN-ROBOT-DE-4-GRADOS-DELIBERTAD](http://es.scribd.com/doc/142121427/CINEMATICADIRECTA-E-INVERSA-DE-UN-ROBOT-DE-4-GRADOS-DELIBERTAD).

FERNÁNDEZ, Adel; et al. *Modelos cinemático y dinámico de un robot de cuatro grados de libertad.* *Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones*, 2017, vol. 38, no 3, p. 56-75.

JUSTINICO, Oscar; et al. *Control gestual de robot de 4 GDL con sensor Leap Motion.* *Memorias*, 2015.

KELLY, Rafael; et al. *Control de movimiento de robots manipuladores* 2003.

HERNÁNDEZ, R. *Análisis Dinámico y control de un robot para inspección de líneas de transmisión* [Tesis para obtener el título de Maestro en Ciencias y Tecnología en la

especialidad de Mecatrónica]. Centro de Ingeniería y desarrollo industrial. (2010).

MACHADO, J. *Modelación y Control de un Robot Bípedo* [Tesis de Maestría para la obtención del grado de Maestro en Ciencias con especialidad en Matemáticas Aplicadas]. Centro de Investigación en Matemáticas A.C. (2014).

MENDOZA, M; et al. 2023 *Modeling, Simulation and Control of An Omnidirectional Mobile Manipulator Robot*. [International Journal of Intelligent Systems and Applications in Engineering], 11(5s), 229 – 237. (2023). Retrieved from <https://ijisae.org/index.php/IJISAE/article/view/2770>

MORA, S. *Diseño y desarrollo de controles de robots mediante métodos numéricos basados en teoría de álgebra lineal. Aplicación a robots móviles*. [Trabajo fin de grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales]. Universidad Politécnica de Valencia. (2018).

REZA, N. & JAZAR *Theory of applied robotics: kinematics, dynamics, and control*. Springer. (2010).

RIVERA, G., & BERNARDO, R. *Control de posición y seguimiento de trayectorias de un manipulador móvil de 3 grados de libertad* [Proyecto previo a la obtención del título de Ingeniero en Electrónica y Control] Escuela Politécnica Nacional. (2016).

RUIZ OTALORA, Fabián Andrés; & QUINTERO NEIRA, Laura Alejandra *Diseño de un robot manipulador de 4 gdl, usando análisis cinemático y dinámico*. 2022.

SCIAVICCO, L; et al *Robotics: Modelling, planning and Control, ser. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing*. (2011).

TORREALBA, R.; CLAVIJO, A.; DELGADO, M. Modelaje matemático y simulación de un robot manipulador de microprocesadores: Dos enfoques. *Revista de la Facultad de*

Ingeniería Universidad Central de Venezuela. 2006, vol. 21, no 3, p. 121-139.

VORONIN, B. & ÁLVAREZ, J. *Un método analítico de análisis cinemático de Mecanismos articulados.* (2008).





ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
CERTIFICADO DE CUMPLIMIENTO DE LA GUÍA PARA
NORMALIZACIÓN DE TRABAJOS DE FIN DE GRADO

Fecha de entrega: 26/ 03 / 2024

| |
|--|
| INFORMACIÓN DEL AUTOR |
| Nombres – Apellidos: Fernanda Analhy Cáceres Nuñez |
| INFORMACIÓN INSTITUCIONAL |
| Facultad: Ciencias |
| Carrera: Matemática |
| Título a optar: Matemática |
|  Ing. María José Mendoza Salazar Director del Trabajo de Integración Curricular |
|  Dr. Rubén Antonio Pazmiño Maji Asesor del Trabajo de Integración Curricular |