



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

**UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL APRENDIZAJE
DE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS A TRAVÉS
DEL MÉTODO DE VAN HIELE.**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR:

ANDY OMAR LÓPEZ SALCAN

Riobamba – Ecuador

2024



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

**UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL APRENDIZAJE
DE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS A TRAVÉS
DEL MÉTODO DE VAN HIELE**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: ANDY OMAR LÓPEZ SALCAN

DIRECTOR: MSC. RAMÓN ANTONIO ABANCÍN OSPINA

Riobamba – Ecuador

2024

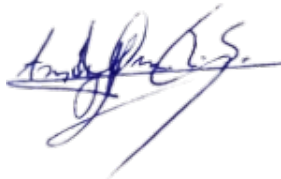
©2024, Andy Omar López Salcan

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, **ANDY OMAR LÓPEZ SALCAN**, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 17 de mayo de 2024


A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Andy Omar López Salcan', with a horizontal line drawn through it.

Andy Omar López Salcan

060468065-2

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; tipo: Proyecto de Investigación, **UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL APRENDIZAJE DE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS A TRAVÉS DEL MÉTODO DE VAN HIELE**, realizado por el señor: **ANDY OMAR LÓPEZ SALCAN**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Dra. Martha Ximena Dávalos Villegas PRESIDENTE DEL TRIBUNAL		2024-05-17
Ms.C. Ramón Antonio Abancín Ospina DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2024-05-17
Dr. Carlos Eduardo Cova Salaya ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2024-05-17

DEDICATORIA

A lo largo de mi vida, he enfrentado diversos desafíos sin imaginar que el destino y la divina providencia me aguardaban una sorpresa: el convertirme en MATEMÁTICO. Esta palabra, breve pero profunda, encapsula una montaña rusa de emociones: alegrías, frustraciones, tristezas y, sobre todo, la superación de mis propios temores.

Quiero dedicar este trabajo de titulación a mi padre, Ruperto, a mi madre, Narcisa, a mis hermanas Belén y Karla, y a mis sobrinos Keila y Matías. Agradezco su apoyo incondicional, sus sabios consejos y rindo un homenaje especial a mi abuelita Ángela, que descansa en paz. Gracias por inculcarme valores como el respeto, la paciencia, el perdón, la responsabilidad, la humildad y, sobre todo, el valor de la unión familiar.

Expreso mi sincero agradecimiento a mis amigos, aquellos que, sin ser familia, me brindaron su apoyo. Gracias por estar presentes en los momentos de alegría y tristeza, momentos que quedarán grabados en mi memoria.

Luego de haber escalado un peldaño más de mi vida académica, es momento de seguir creciendo con la motivación de la frase: "Trabaja en tus planes con silencio e inteligencia, porque el enemigo podría estar espiando".

Andy López

AGRADECIMIENTO

Mi respeto para aquel ser supremo, como es Dios y la Virgen Santísima del Cisne por haber guiado en la camino, y derramar sus bendiciones en toda mi familia.

Agradezco a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO por abrirme las puertas del conocimiento. Reconozco la labor del personal docente y administrativo por su accesibilidad en todas las gestiones.

Quiero extender un sincero agradecimiento a mis amigos que me acompañaron en este maravilloso camino del conocimiento como son Dorian, Caro, Anabel, Alex, Marcelo e Isaac. Gracias por tolerar mis locuras y escuchar mis grandes frustraciones en la vida. La frase icónica "solo venciendo vencerás" ha sido un faro en mi camino.

Un cordial agradecimiento a mi director de trabajo de integración curricular el MSC. Ramón Abancín, quien asumió el desafío de guiarme en la presente investigación, gracias por la paciencia y los consejos brindados. Sobre todo, el tiempo brindado para cumplir con mi objetivo trazado, además mi gratitud con el profe Eduardo Pozo.

Andy López

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	ix
ÍNDICE DE ANEXOS	x
RESUMEN	xi
ABSTRACT	xii
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	4
1.1. Planteamiento del problema	4
1.1.1. <i>Objetivos</i>	4
1.1.1.1. <i>Objetivo general</i>	4
1.1.1.2. <i>Objetivos específicos</i>	5
1.1.2. <i>Justificación</i>	5

CAPÍTULO II

2. MARCO TEORICO	7
2.0.1. <i>Método de Van Hiele</i>	7
2.1. Conceptos teóricos	9
2.1.1. <i>Triángulo</i>	10
2.1.2. <i>Los tipos de triángulos:</i>	10
2.1.3. <i>Congruencia de triángulos</i>	10
2.1.4. <i>Semejanza de triángulos</i>	11
2.1.5. <i>Aspectos elementales de geometría plana</i>	11

CAPÍTULO III

3.	MARCO METODOLÓGICO	12
3.1.	Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnicas e instrumentos de investigación empleadas	12

CAPÍTULO IV

4.	MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	15
4.0.1.	<i>Discusión</i>	18

CAPÍTULO V

5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	20
5.1.	CONCLUSIONES	20
5.2.	RECOMENDACIONES	20

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 2-1: Pierre María Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof	7
Ilustración 2-2: Triángulo	10

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO A: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL APRENDIZAJE DE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS A TRAVÉS DEL MÉTODO DE VAN HIELE

RESUMEN

Las demostraciones cumplen un rol importante en geometría, fomentan el pensamiento crítico y la habilidad para construir argumentos sólidos; su formalidad, en ocasiones, presenta desafíos para algunos estudiantes. Por tal motivo, es importante su aprendizaje, ya que esto conllevará al entendimiento y desarrollo de otras ramas de la matemática. El propósito de este trabajo de investigación fue elaborar un documento referencial para estudiantes que cursan los primeros semestres de la carrera de matemática en la ESPOCH. La metodología empleada fue de enfoque cualitativo con alcance descriptivo y de tipo documental. Esto permitió la recopilación de información más relevante en diversas fuentes bibliográficas, como por ejemplo, páginas web, artículos, libros, entre otros, para el entendimiento de los diversos conceptos teóricos en congruencia y semejanza de triángulos y la aplicación del método de Van Hiele a las demostraciones. Como resultado, se obtuvo un documento referencial donde se proporcionan las cinco fases para el aprendizaje en las demostraciones, tales como: visualización, análisis, abstracción, deducción formal y rigor. Además, se proporcionaron varios problemas de congruencia y semejanza de triángulos, en los cuales se aplicó las cinco fases propuestas para el aprendizaje. En conclusión, este documento referencial servirá como un material alternativo y complementario para el aprendizaje de las demostraciones en geometría, apoyado con la resolución de problemas, esto fomentará al desarrollo de habilidades cognitivas en los estudiantes.

Palabras clave: <MÉTODO DE VAN HIELE>, <NIVELES>, <FASES>, <GEOMETRÍA>, <TRIÁNGULOS>, <CONGRUENCIA>, <SEMEJANZA>, <DEMOSTRACIÓN>.

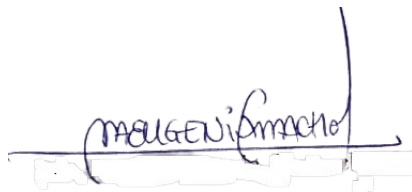
0576-DBRA-UTP-2024



ABSTRACT

Demonstrations play a significant role in geometry by fostering critical thinking and the ability to construct solid arguments; however, their formality can occasionally pose challenges for several students. Therefore, mastering demonstrations is essential, as it facilitates understanding and development of other branches of mathematics. The purpose of this research work was to create a reference document for students in the early semesters of the Mathematics Program at ESPOCH. The methodology used was a qualitative approach with a descriptive scope and a documentary nature, which allowed the collection of the most relevant information from various bibliographic sources, including web pages, articles, and books, among others. This information was vital for understanding the different theoretical concepts of triangle congruence and similarity and for applying Van Hiele's method for demonstrations. As a result, a comprehensive reference document was developed, detailing the five phases of learning demonstrations: visualization, analysis, abstraction, formal deduction, and rigor. Additionally, several problems related to triangle congruence and similarity were provided, in which the five phases proposed for learning were applied. In conclusion, this reference document serves as an alternative and complementary resource for learning geometric demonstrations, supported by problem-solving. Consequently, it will enhance the development of cognitive skills in students.

Keywords: <VAN HIELE'S METHOD>, <LEVELS>, <PHASES>, <GEOMETRY>, <TRIANGLES>, <CONGRUENCE>, <SIMILARITY>, <DEMONSTRATION>.



Lic. María Eugenia Camacho, M.Sc.

060160959-7

INTRODUCCIÓN

La historia de la geometría comenzó como la necesidad práctica de medir formas individuales, estudiar la relación espacial que existe entre ellas y las propiedades del espacio que las rodea; así, dieron el surgimiento de diversas disciplinas como, por ejemplo, el dibujo técnico o la propia arquitectura. Además, por su gran importancia es utilizada como complemento de muchas otras áreas como física, mecánica, astronomía, etc. En este sentido, tienen una importante utilidad desde tiempos remotos, desde su aplicación en situaciones cotidianas, así como, para estimular, ejercitar y desarrollar diversas habilidades de pensamiento y estrategias para la resolución de problemas.

A pesar de esta relevante presencia y utilidad en la vida cotidiana, es común encontrar que no todos los estudiantes que cursan los primeros semestres de una carrera de matemática, tengan las destrezas y habilidades necesarias para comprender los razonamientos lógicos y formales que poseen las demostraciones en geometría, por ende, tienen dificultades para su estudio formal. Además, es bien sabido que, la formalidad en matemática, presente en las demostraciones es fundamental porque es el medio de justificación para la ampliación de la frontera del conocimiento en matemática.

En base en lo planteado, anticipadamente el proceso de las demostraciones en geometría, especialmente en temas como la congruencia y semejanza de triángulos, a menudo plantea desafíos a los estudiantes debido a su demanda de razonamiento lógico y construcción de argumentos coherentes. Sobre todo la transición de comprender propiedades geométricas al paso de demostrarlas matemáticamente puede ser abrupta y confusa. Aquí es donde el método de Van Hiele cumple un rol importante y esencial al ofrecer una estructura progresiva el cual guía a los estudiantes a través de cinco niveles de pensamiento geométrico, partiendo de la comprensión visual hasta llegar al razonamiento deductivo riguroso.

Por tal motivo, esta progresión permite que los estudiantes superen las dificultades inherentes a las demostraciones, desarrollando una comprensión profunda, habilidades lógicas y argumentativas necesarias para construir demostraciones sólidas.

Al respecto, en la literatura, se encuentran diferentes investigaciones que abordan esta problemática, por ejemplo Vargas (2012) realizó una propuesta sobre el modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Este artículo propone una visión sobre el modelo de Van Hiele

y su aplicación en la enseñanza de la geometría. Explora cómo este método guía el proceso de comprensión desde una perspectiva visual inicial hasta la construcción rigurosa de demostraciones matemáticas, estableciendo bases sólidas para el pensamiento geométrico auténtico. Además, analiza su adaptabilidad a distintas edades y niveles, permitiendo una enseñanza personalizada acorde al ritmo de desarrollo de cada estudiante. En última instancia, resalta que el uso efectivo del método no solo enriquece la enseñanza de la geometría, sino también potencia habilidades cognitivas esenciales para abordar desafíos matemáticos en la vida cotidiana.

Así mismo Rojas, (2020) ofrece una investigación relevante que aborda el uso del método Van Hiele y los niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de Huancavelica, Perú. El estudio se propuso evaluar la efectividad del enfoque holandés de Van Hiele en la mejora de los niveles de pensamiento geométrico en el sexto ciclo de educación básica ordinaria. Los resultados demostraron que la aplicación de este método contribuyó al progreso del pensamiento geométrico, abarcando la visualización, el análisis y la clasificación. Por ende, se concluyó que existió una diferencia significativa en los niveles de adquisición de pensamiento geométrico antes y después de la implementación del método de Van Hiele.

El propósito de este estudio fue elaborar un documento referencial, en donde se detalle la implementación del método del Van Hiele el cual ayudará en el aprendizaje en demostraciones en geometría. Esta propuesta metodológica innovadora contribuirá al desarrollo de habilidades en los estudiantes. Además, por sus valiosos aportes significativo fomentará en el desarrollo de destrezas y razonamiento geométricos para la resolución de problemas.

En fin, este proyecto de investigación se estructuró a través de cinco capítulos. En el primero, se aborda la problemática de investigación, donde se define el planteamiento del problema y se detallan sus características clave. También se establece el objetivo general, los objetivos específicos y la justificación del estudio.

En el segundo capítulo, se expuso aspectos esenciales del tema mediante el uso de fuentes bibliográficas como artículos, páginas web, libros, entre otros. El propósito de esta sección fue resaltar sobre la metodología de Van Hiele, además, dar a conocer de cómo fue estructurado el documento referencial. En el tercer capítulo se centra en el marco metodológico, especificando el enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos utilizados en la investigación.

Luego, en el cuarto capítulo se presenta el marco de análisis e interpretación de resultados, donde se introdujeron las cinco fases del método de Van Hiele para el aprendizaje de las demostraciones

geométricas, adicional a ello, se explica de cómo fue estructurado el documento referencial. Posteriormente, en el capítulo cinco donde se exponen las conclusiones y recomendaciones de la investigación realizada. Finalmente, se mencionaron diferentes fuentes bibliográficas relevantes las cuales fueron de gran ayuda en la elaboración del trabajo de investigación.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

En particular, algunos estudiantes de los primeros semestres de la carrera de matemática en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) se enfrentan a estas dificultades. Es decir, experimentan problemas al comprender y llevar a cabo demostraciones en el ámbito de la geometría plana, específicamente en el tema de congruencia y semejanza de triángulos.

En este contexto, se propuso la elaboración de un documento referencial que incorpora el método de Van Hiele como enfoque metodológico para el aprendizaje en geometría. Este documento presenta diversos problemas en los cuales se visualizará de manera detallada las demostraciones, relacionadas con la congruencia y semejanza de triángulos. Además de abordar las demostraciones clásicas presentes en los libros se buscó ofrecer pautas generales basadas en las ideas extraídas de las demostraciones de resultados conocidos, como teoremas, proposiciones y lemas. De esta manera, se contribuirá al desarrollo del razonamiento necesario para la resolución de futuros ejercicios o problemas de geometría.

1.1.1. *Objetivos*

1.1.1.1. *Objetivo general*

Realizar un estudio del tema de la congruencia y semejanza de triángulos a través de una revisión bibliográfica, para diseñar un documento de referencia cuidadosamente elaborado que incorpore el método de Van Hiele. Además, este trabajo tiene como finalidad enriquecer el proceso de razonamiento en las demostraciones de geometría plana, respaldado por la resolución de problemas, ofreciendo así un recurso alternativo y complementario de alta calidad para los estudiantes de la carrera de matemática en la ESPOCH.

1.1.1.2. *Objetivos específicos*

- Realizar un arqueo bibliográfico del método de Van Hiele y su implementación en demostraciones de congruencia y semejanza de triángulos, con el fin de analizar y resumir investigaciones relevantes.
- Identificar y seleccionar estudios relevantes que demuestren la eficacia y relevancia del método de Van Hiele, en la mejora del razonamiento geométrico y la comprensión de demostraciones en estudiantes.
- Analizar y comprender los niveles de pensamiento geométrico del método de Van Hiele aplicados a demostraciones de congruencia y semejanza de triángulos, buscando establecer una base conceptual sólida.
- Desarrollar una aplicación educativa basada en el método de Van Hiele para organizar conceptos geométricos, mejorando la comprensión de demostraciones en semejanza y congruencia de triángulos.
- Elaborar un documento referencial que combine el método de Van Hiele y la resolución de problemas, con el propósito de fortalecer la comprensión de demostraciones en congruencia y semejanza de triángulos. Además, este enfoque buscará impulsar el desarrollo de habilidades y pensamiento en el contexto de la geometría demostrativa.

1.1.2. *Justificación*

El método de Van Hiele desempeñó un papel esencial en el aprendizaje de la geometría, especialmente en lo referente a la congruencia y semejanza de triángulos. Su enfoque progresivo guía a los estudiantes a lo largo de niveles de pensamiento, desde la visualización hasta la demostración rigurosa, promoviendo así una comprensión profunda. Esta metodología fortalecerá la capacidad en los estudiantes para construir argumentos lógicos en demostraciones de congruencia y semejanza de triángulos, el cual mejorará el razonamiento matemático y habilidades de resolución de problemas.

El documento referencial resultante de la investigación actual se justifica por diversas razones, destacando principalmente la incorporación del método de Van Hiele. Para empezar, busca abordar y mitigar las dificultades inherentes al proceso de aprendizaje de la congruencia y semejanza de

triángulos a través de un documento autocontenido y didáctico. Este documento proporcionó un enfoque sistemático basado en el método de Van Hiele, con énfasis en las demostraciones de congruencia y semejanza de triángulos.

Luego, se propone como un recurso comprensible que unifica y detalla el tema, siendo especialmente beneficioso para quienes iniciaron en su estudio. Además, este material servirá como una herramienta valiosa para los estudiantes que, a pesar de haber abordado el tema previamente, aún enfrentan dificultades en su comprensión.

Por otra parte, el trabajo fortalecerá el desarrollo geométrico y abstracto de los estudiantes, fomentando un entendimiento más profundo y estructurado. Además, el documento presenta problemas concretos en demostraciones de congruencia y semejanza de triángulos, ofreciendo a los estudiantes la oportunidad de visualizar detalladamente cómo se llevaron a cabo las diferentes demostraciones.

Finalmente, como un valioso aporte a la carrera de matemática de la ESPOCH, se obtuvo un documento referencial que funcionará como material alternativo y complementario para el estudio de la geometría plana, en particular en el tema de congruencia y semejanza de triángulos. A través de la resolución de problemas, este documento no solo fortalecerá la comprensión conceptual, sino que también ampliará las perspectivas educativas. Además, la incorporación del método de Van Hiele, abrirá un abanico de oportunidades para familiarizar a los estudiantes con los elementos fundamentales de las demostraciones en geometría.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

La geometría al ser considerada una de las ramas importantes de la matemática, sus aportes valiosos y significativos a diferentes áreas como por ejemplo arquitectura, ingenierías, astronomía, entre otras. Lo que justifica la importancia y necesidad de dominar los conceptos involucrados en esta área. La metodología que facilita la comprensión de la geometría es el método de Van Hiele, el cual ayuda tanto a estudiantes como a profesores. En consecuencia, se propone la siguiente estructura, organizada conforme a los objetivos de la investigación y para alinearse de manera óptima con el propósito de este estudio.

2.0.1. *Método de Van Hiele*

De la diversa literatura existente sobre el método de Van Hiele. Para la redacción de esta sección y del primer capítulo del documento referencial se hizo la utilización de los siguiente autores: Barrera (2023) y Rojas (2020), esta información fue fundamental y relevante.



Figura Ilustración 2-1: Pierre María Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof

Realizado por: <https://images.app.goo.gl/1z1tqoD4fSaBWidT6>.

El método de Van Hiele fue desarrollado en los trabajos de la tesis doctoral presentado en

Holanda 1957 por los profesores, Pierre María Van Hiele (1920-1997) y Dina Van Hiele Geldof (1934-2018), el método se centra en un enfoque educativo, el cual facilita la comprensión de la geometría, para que lo estudiantes desarrollen habilidades cognitivas. Además, se clasifica en niveles de aprendizaje y fases de aprendizaje.

De acuerdo con (Barrera, 2023) El método de Van Hiele comprende los siguientes niveles de aprendizaje:

Nivel 1: **Visualización o reconocimiento.** En este se reconoce diversas formas y propiedades geométricas, pero no se profundiza en su explicación.

Nivel 2: **Análisis.** Luego de la visualización, se puede analizar y reconocer algunas propiedades con la que consta la figura geométrica, pero de forma empírica.

Nivel 3: **Ordenación, clasificación o abstracción.** En este nivel ya se puede establecer las relaciones y propiedades que posee la figura geométrica de manera formal.

Nivel 4: **Deducción forma.** En este nivel se comprende y se manipula las relaciones y propiedades de manera formal, además, se entiende que existen diversas formas para alcanzar los mismo resultados.

Nivel 5: **Rigor.** En este nivel se tiene la capacidad y habilidad para argumentar en los procesos de razonamiento. Estos deben ser claros y precisos ya que esto conllevara al entendimiento profundo en la geometría.

De igual manera, (Rojas, 2020) clasifican las fases de aprendizaje del método de Van Hiele de la siguiente manera:

Fase 1: **Información o indagación.** En esta fase se recopila información de diversas fuentes bibliográficas, con el fin de identificar los diferentes conceptos teóricos que se va utilizar en la explicación del tema.

Fase 2: **Orientación dirigida.** En esta fase el profesor plantea cuidadosamente problemas y actividades, con el propósito que los estudiantes descubran y manipulen los diferentes conceptos teóricos.

Fase 3: **Explicitación.** Con la manipulación de los conceptos teóricos, los estudiantes se deben comunicar a través de expresiones escritas o verbales de los resultados que se han obtenido.

Con el fin de intercambiar experiencias en clase, para que el profesor pueda dar indicaciones generales para abordar ciertas problemáticas con las que se hayan encontrado, Además, se ayudará a fomentar el vocabulario formal en matemática.

Fase 4: **Orientación libre.** El profesor para fomentar el aprendizaje y el desarrollo de habilidades en los estudiantes, debe proponer problemas y actividades de diversa dificultad, Así, los estudiantes aprenden a obtener sus propios resultados.

Fase 5 **Integración.** El profesor debe brindar recopilaciones de información, para que los estudiantes organicen los conceptos teóricos tratados. Las actividades propuestas por el profesor deben contener solamente los temas tratados, para fomentan el aprendizaje de nuevos conocimientos en matemática.

El uso de niveles y etapas de aprendizaje en el método Van Hiele se muestra como un componente esencial para optimizar el proceso de aprendizaje de las demostraciones en geometría. Las diversas fases permiten una adaptación precisa a las diferentes etapas de desarrollo cognitivo en los estudiantes, asegurando que el aprendizaje se adapte de una forma efectiva a sus necesidades individuales.

La adaptación de los niveles de desarrollo cognitivo no sólo mejora el aprendizaje, sino que también ayuda a identificar y abordar desafíos específicos que los estudiantes pueden encontrar en cada etapa. Además, al reconocer que los estudiantes atraviesan las diferentes etapas de maneras únicas, el método se adapta a diferentes ritmos y preferencias de aprendizaje, promoviendo un entorno de aprendizaje inclusivo, mejorando así el desarrollo intelectual de cada uno de los estudiantes para un pensamiento crítico.

2.1. Conceptos teóricos

Por otra parte para la redacción de esta sección, y para la organización de los capítulos dos y tres del documento referencial, se utilizó la información de los siguientes autores: Orihuela (2021), Lira (2006), y Galindo (2006). Dado que, las investigaciones realizadas por los autores fue de gran ayuda, ya que se utilizó para recopilar aspectos esenciales e importantes sobre el tema de congruencia y semejanza de triángulos, y así, organizar de una manera adecuada para los lectores.

2.1.1. Triángulo

Un triángulo es una figura geométrica plana formada por una poligonal cerrada de tres lados, o bien, la figura formada por tres rectas que se cortan. A los puntos de corte se les llama vértices. Los ángulos del triángulo se designan con letras mayúsculas del alfabeto A , B , y C y los lados opuestos con letras minúsculas del alfabeto a , b y c , respectivamente.

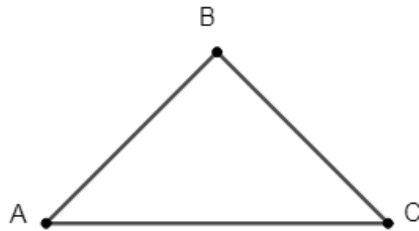


Figura Ilustración 2-2: Triángulo
Realizado por: Lopez, Andy, 2024.

2.1.2. Los tipos de triángulos:

a) Según los lados

Triángulo equilátero. Si la medida de los tres lados son iguales.

Triángulo isósceles. Si la medida de dos de sus lados son iguales y el tercero desigual.

Triángulo escaleno. Si la medida de los tres lados son desiguales.

b) Según los ángulos

Triángulo rectángulo. Si tiene un ángulo recto, es decir que posee un ángulo de 90° (grados).

Triángulo obtusángulo. Si tiene un ángulo obtuso mayor a 90° (grados) y menor 180° (grados).

Triángulo acutángulo. Si los tres ángulos son agudos es decir es menor de 90° (grados).

2.1.3. Congruencia de triángulos

Teorema: Dos triángulos son congruentes si cumplen con ciertas condiciones específicas.

- Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo incluido entre esos lados iguales.
- Dos triángulos son congruentes si todos sus lados son iguales en longitud.

c) Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado entre esos ángulos iguales.

2.1.4. *Semejanza de triángulos*

Teorema: Dos triángulos son semejantes si cumplen con ciertas condiciones específicas.

- a) Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos correspondientes de otro triángulo.
- b) Dos triángulos son semejantes si tienen un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado iguales a los de otro triángulo.
- c) Dos triángulos son semejantes si todos sus lados son proporcionales entre sí.

2.1.5. *Aspectos elementales de geometría plana*

Luego de haber indagado diversas bibliografías de manera selectiva, centrada en los elementos necesarios y esenciales para abordar el tema de investigación sobre demostraciones de congruencia y semejanza de triángulos con el método de Van Hiele, se seleccionaron los siguientes autores: Orihuela (2021), Lira (2006), Galindo (2006), Calvache (2002), Barrera (2019) y Jaramillo (2004) los diferentes aportes que brindan estos autores, facilitaron en la estructuración del capítulo cuatro del documento referencial. El propósito fue que el lector visualice la teoría empleada y la resolución de las demostraciones de manera detallada.

Cabe resaltar que para mayor comprensión de la información, ir al documento referencial que se encuentra en el ANEXO A.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

En el presente capítulo se presenta el procedimiento empleado para lograr cumplir los diferentes objetivos de la investigación. Además, se detallará su estructura, técnicas, y los diferentes instrumentos utilizados para la realización.

En la presente estudio se utilizó un enfoque metodológico cualitativo con alcance descriptivo, además su diseño es de tipo documental ya que se hizo la recopilación de información de diversas fuentes bibliográficas como por ejemplo: libros, revistas, artículos, tesis, además, material bibliográfico que se encuentra disponible en Internet. Posteriormente se organizó de una manera adecuada el documento, de tal modo que se comprenda el tema de congruencia y semejanza de triángulos con el uso adecuado del método de Van Hiele.

Con lo expuesto anteriormente, la investigación descriptiva cumple un rol importante en la presente investigación ya que se requirió un considerable conocimiento en la área que se estudió. Además, basada en la recopilación de diversa fuentes bibliográficas en geometría plana, para posteriormente responder las preguntas específicas (Toro, 2006). Por tan motivo en la presente investigación se hizo una recopilación de información relevante sobre congruencia y semejanza de triángulos. Además, el uso adecuado del método de Van Hiele, el cual ayuda a fortalecer el conocimiento en matemática. Resaltando investigaciones relevantes, en donde se hizo hincapié en rescatar las particularidades y aspectos importantes, con el propósito de guiar a los estudiantes a un aprendizaje significativo. Por tal motivo la información recolectada no necesariamente requirió datos numéricos, por el contrario, se hizo una indagación bibliográfica.

Según lo manifiesta Gómez (2006), el alcance descriptivo se centró en estructurar la información para contribuir en el conocimiento del tema a investigado, por ende es necesario una revisión bibliográfica selectiva de los temas a investigar, ya que esto ayudará describir las diferentes características o propiedades relevantes (pág. 70). Por tal motivo, el alcance descriptivo resultó fundamental para la presente investigación, ya que ayudó a seleccionar diferentes materiales bibliográficos. Esto, ayudó a detallar las diferentes características y propiedades más relevantes

en semejanza y congruencia de triángulos. La aplicación de método de aprendizaje de Van Hiele fue crucial en el trabajo constituyendo una estrategia alternativa para el aprendizaje de las demostraciones en geometría, de esta manera se elaboró un documento alternativo y complementario que ayudará a los estudiantes que optaron por la carrera de matemática.

La investigación documental según Muñoz (1998), “en este tipo de trabajo la recopilación de información y el análisis de los resultados tienen un grado de carácter documental muy alto (80 a 90 por ciento)” (pág. 93) . Por tal motivo, la investigación documental fue una herramienta valiosa para la recolección de información. Para el aprendizaje de las demostraciones geométricas, sumando a ello, la resolución de problemas en congruencia y semejanza de triángulos de diferente nivel, esto permitió la elaboración de un documento que motive a los estudiantes a comprender la importancia de las demostraciones en geometría.

Seguido a ello, la estructura del documento referencial, el cual contempla una estrategia para el aprendizaje de las demostraciones en geometría, con énfasis en el tema de congruencia y semejanza de triángulos. Así, se implementó el método de Van Hiele, a la resolución de los problemas de diferente índole, por ende la investigación se realizó con los siguientes procesos:

a) Revisión bibliográfico: se realizó un indagación y selección de material de geometría plana, con énfasis en congruencia y semejanza de triángulos. Además, se revisó la aplicación del método de Van Hiele hacia las demostraciones. El material que se encontró en bibliotecas físicas y electrónicas, fue utilizado para garantizar la investigación.

b) Selección de material bibliográfico: se revisó la diferentes fuentes bibliográficas, sobre congruencia y semejanza de triángulos, también, el método de Van Hiele, para posteriormente seleccionar las más idóneas y relevantes.

c) Elaboración y estructuración del documento referencial, con énfasis congruencia y semejanza de triángulos con la aplicación del método del Van Hiele: se elaboró un documento alternativo y complementario en demostraciones geométricas, en donde se detalle el uso adecuado del método de Van Hiele para el aprendizaje de las demostraciones en geometría, el cual ayudará a contribuir al desarrollo de habilidades cognitivas en los estudiantes de la ESPOCH.

Finalmente, para la ejecución del trabajo de investigación se hizo la utilización de los diversos instrumentos como son:

- 1) Computador, por el gran desarrollo tecnológico que se enfrenta la humanidad es primordial poseer un computador ya que, nos garantiza realizar diversas actividades como, generar documentos, navegación sitios web, accesibilidad de la información en cualquier momento, entre otras. Por lo cual este instrumento electrónico cumplió un rol primordial en la ejecución del trabajo e investigación.
- 2) Internet, debido al desarrollo de la comunicación a nivel mundial, se convirtió en una herramienta esencial para la ejecución de la investigación, pues este instrumento nos garantizó el acceso a diferente información relevante y actualizada.
- 3) Motores de búsqueda de información, el acceso a la información permitió la búsqueda de diferentes recursos tales como, artículos científicos, libros electrónicos, revistas electrónicas, entre otros. Fuentes que garantizaron la fiabilidad de la investigación.
- 4) Herramienta de escritura \LaTeX , su utilización fue debido a que nos garantizó que nuestro trabajo tenga una formalidad para la comunidad matemática, Además, las múltiples herramientas que ofrece facilita su escritura, el acceso con o sin internet contribuye la escritura de diversos trabajos de diferente índole.
- 5) Software GeoGebra, su gran aporte fue importante ya que ayudó a graficar diversas figuras geométricas, con el propósito que el lector pueda visualizar las diferentes características y propiedades y así facilitar a la comprensión de la geometría plana.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En principio, se realizó una indagación bibliográfica, sobre los diferentes temas que abarca la investigación, este proceso se desarrolló a través de diferentes motores de búsqueda como es Google y Big los cuales nos ofrecieron la información relevante y actualizada. Posteriormente se llevó adelante la clasificación del material bibliográfico, el cual contenía información relevante sobre, la aplicación de método de Van Hiele en la geometría.

Una vez finalizado el proceso de selección de la bibliografía, se hizo una lectura crítica de tal manera que sirvió para la comprensión de teoremas, postulados, criterios. Sobre todo, la implementación de el método de Van Hiele en las demostraciones geométricas.

Posteriormente, se organizó todas las ideas de la investigación en un documento borrador, en donde se analizó como influye cada uno de los niveles del método de Van Hiele en el aprendizaje de las demostraciones geométricas. Por tal motivo, se clasificó en los siguientes niveles, con el objetivo de aplicar en la resolución de problemas relacionado a congruencia y semejanza de triángulos.

Tomando la idea de Barrera, (2019) El método de Van Hiele comprende los siguientes niveles de aprendizaje:

Nivel 1: Visualización

En este nivel interviene la visualización de las diferentes formas como la que está constituida la figura geométrica sin entrar en detalles.

Nivel 2: Análisis

Luego de haber visualizado la figura geométrica, se expone algunas propiedades con la que está constituida pero de forma empírica.

Nivel 3: Abstracción

Luego de haber pasado los dos niveles anteriores, ya se puede establecer relaciones entre definiciones y propiedades formales, de tal manera que ayuda a relacionar pensamientos críticos

para posteriormente enlazar las ideas.

Nivel 4: Deducción formal

Este nivel es crucial, por el motivo que se da un breve bosquejo de cómo abordar la demostración, para ellos se tuvo que comprender los niveles anteriores, ya que esto conllevará, que existen diversos razonamientos para abordar el problema.

Nivel 5: Rigor

Por los niveles anteriores, ya se tiene información suficiente y necesaria para realizar la demostración formal del problema. Es por ello que no se puede saltar ninguno de los niveles anteriores, ya que cada uno de ellos contribuye al fortalecimiento de conocimiento.

Con la finalidad de aportar al entendimiento de las demostraciones geométricas, y brindar un material amigable al los estudiantes, se organizó los diferentes temas de tal manera que sea a comprensible. Por ende, el documento referencial se estructuro de la siguiente manera:

Capítulo 1: Método Van Hiele

1.1. Orígenes del método de Van Hiele

1.2. Descripción de método de Van hiele

1.2.1. Niveles de aprendizaje de Van Hiele

1.2.2. Fases de aprendizaje del método de Van Hiele

1.3. Características del método de Van Hiele

1.4. Justificación e importancia del método de Van Hiele

Capítulo 2: Aspectos elementales de la geometría plana

2.1. Reseña historia de la geometría

2.2. Rectas y segmentos de rectas

2.3. Ángulos

2.3.1. Clasificación de ángulos

2.4. Triángulos

2.4.1. Clasificación de triángulos

2.5. Congruencia de segmentos y ángulos

2.5.1. Ángulos congruentes

2.5.2. Proporcionalidad de segmentos

2.5.3. División de segmentos

2.6. Teorema de Thales

2.6.1. Relación métrica en el triángulo rectángulo

2.6.2. Relación métrica en triángulos no rectángulos

Capítulo 3: Demostración de criterios de congruencia y semejanza de triángulos mediante la aplicación del método de Van Hiele

3.1. Congruencia de triángulos

3.1.1. Criterios de congruencia de triángulos

3.2. Semejanza de triángulos

3.2.1. Criterios de semejanza de triángulos

Capítulo 4: Problemas de geometría plana con la aplicación del método de Van Hiele

4.1. Problemas de congruencia de triángulos

4.2. Problemas de semejanza de triángulos

4.0.1. *Discusión*

El documento referencial se elaboró en base a los objetivos trazado de la investigación, cabe destacar que, la información presentada en los diferentes capítulos tiene como objetivo fortalecer el conocimiento y fomentar el aprendizaje de las demostraciones geométricas, por tal motivo esta investigación servirá como material alternativo y complementario para el aprendizaje de las demostraciones.

En este sentido, se tiene que el primer capítulo titulado método Van Hiele, fue fundamental ya que se definió su origen y descripción. Este análisis fue crucial para abordar el estudio detallado de los diversos niveles y fases de aprendizaje. En donde se implementaron a la resolución de problemas de congruencia y semejanza de triángulos.

Luego tenemos el segundo capítulo titulado aspectos elementales de la geometría plana, el cual consta con aspectos básicos y elementales de geometría plana, con el propósito que estudiantes visualice definiciones, teoremas, proposiciones y criterios para que refuerce sus conocimientos en geometría.

Posterior a ello se desarrolla el tercer capítulo titulado demostración de criterios de congruencia y semejanza de triángulos mediante la aplicación del método de Van Hiele, una vez ya comprendido los diferentes conceptos teóricos de la geometría, y a su vez, ya comprendido el funcionamiento del método de Van Hiele, fue momento de poner el práctica en la resolución de las demostraciones de los criterios de congruencia y semejanza de triángulo. Con el fin que el lector visualice de una manera detallada de cómo influye cada uno de los niveles del método de Van Hiele en las demostraciones.

Después, se desarrolló el capítulo cuatro titulado problemas de geometría plana con la aplicación del método de Van Hiele. El objetivo es que el lector visualice problemas planteados en congruencia y semejanza de triángulos. Para esto se tuvo la ayuda del método de Van Hiele, con el cual, se pudo visualizar el paso a paso y de manera detallada de cómo se abordó la demostración, y así aportar al desarrollo intelectual del lector y mitigar la dificultad las demostraciones geométricas, que posen algunos estudiantes de los primeros semestres de la carrera de matemática.

En concreto, el documento referencial se organizó en cuatro capítulos, de tal manera que cada uno

contiene información relevante y necesaria. Este diseño busca facilitar una comprensión adecuada al lector. Además, el propósito primordial de este trabajo fue brindar apoyo a estudiantes de los primeros semestres de la carrera de matemática en la comprensión del abordaje de demostraciones en geometría, es por ello que cada uno de los apartados fue elaborado de una manera adecuada para su entendimiento .

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. CONCLUSIONES

Luego de finalizar con éxito la investigación, además, de haber elaborado un documento referencial, el cual está contemplado por cuatro capítulos los cuales fomentaran al lector a comprender la importancia y posterior al entendimiento de las demostraciones geométricas. La aplicación del método de aprendizaje de Van Hiele fue crucial en la investigación, ya que contribuyó a que las demostraciones se puedan visualizar de una forma detallada, a su vez, el uso del software GeoGebra, apporto para que se observe las diferentes representaciones geométricas.

Se buscó que la investigación conjuntamente con el documento referencia cumplan con los objetivos propuestos en la investigación, además se consideró que sea amigable para el lector, ya que está dirigido para algunos estudiantes que cursan los primeros semestres del a carrera de matemática es la ESPOCH. Por tal motivo realizó una búsqueda selectiva de material bibliográfico, luego se seleccionó la información de tal forma que sea veraz y eficaz.

Posteriormente, la organización y estructuración de los contenidos de la investigación fue de tal manera que, tenga una forma coherente y de fácil entendimiento para incentivar a los lectores a que tengan pensamientos críticos. Para así desarrollar las habilidades en las demostraciones en geometría.

Por último, tenemos que para fortalecer las habilidades en demostraciones, se a realizado un capítulo donde constan problemas en el cual se puede visualizar varias demostraciones de congruencia y semejanza de triángulos de manera detallada. Por lo expuesto anteriormente, se a cumplido satisfactoriamente con los objetivos planteados en la investigación.

5.2. RECOMENDACIONES

AEste trabajo de investigación ofrece diversas oportunidades, ya que las fases de aprendizaje propuestas se enfocan en su amplia aplicabilidad en geometría plana. Para aprovechar al máximo este enfoque, se recomienda llevar las siguientes acciones. Revisar conceptos básicos de geometría plana al mismo tiempo, realizar una indagación bibliográfica de la importancia que tienen las

demostraciones en matemática, y las diversas técnicas para demostrar. Cabe destacar que, esta investigación es un comienzo para el aprendizaje en las demostraciones en geometría, es por ellos que deben seguir las fases para el aprendizaje del método de Van Hiele de forma ordenada.

Además, para aquellos estudiantes que optan por seguir la carrera de matemática en la ESPOCH o fuera de ella, deben estar conscientes que en el transcurso de su preparación académica estarán inmersos con demostraciones en diferentes asignaturas, es por ellos, que es importante y fundamental su entendimiento.

Por último, la investigación queda expuesta para cualquier análisis cuantitativo, ya que se puede considerar un grupo de estudiantes, en el cual se puede aplicar la metodología de Van Hiele.

BIBLIOGRAFÍA

1. **BARRERA MORA, Fernando & REYES RODRÍGUEZ , Aarón.** “ La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento Geométrico”. *Padi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI* [En línea], 2023, (México), vol. 3, págs. 3-5.[consulta: Septiembre del 2023]. e-ISSN: 2007-6363 Disponible en: <https://doi.org/10.29057/icbi.v3i5.554>
2. **CHAVARRIA PALLARCO, Norman A.** “Modelo Van Hiele y niveles de razonamiento geométrico de triángulos en estudiantes de Huancavelica”. *Investigación valdizana* [En línea], 2020, (Perú), vol. 14(2), págs. 85-95. [Consulta: 2023-08-08]. Disponible en: <https://doi.org/10.33554/riv.14.2.587>
3. **GALINDO TREJO, Héctor Alejandro, et al.** *Geometría y trigonometría*. 1ª. México: Umbral, 2008, pág. 127.
4. **GÓMEZ, Marcelo** *Introducción ala metodología de la investigación científica*. 1ª. Cordoba-Argentina: Editorial Brujas, 2009, pág. 186.
5. **LIRA CONTRERAS, Ana Rosa, et al.** *Geometría y trigonometría*.1ª. Mexico: Unbral, 2006, pág. 156.
6. **MUÑOZ RAZO, Carlos & BENASSINI FÉLIX, Marcela** *Cómo elaborar y asesorar una investigación de tesis*. 1ª. Naucalpan - México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., 1998, pág. 300.
7. **ORIHUELA BASTIDAS, Julio** *Congruencia de triángulos* . 1ª. Huaraz-Perú: Unbral, 2006, pág. 356.
8. **TORO JARAMILLO, Iván Darío & PARRA RAMÍREZ, Ruben Darío** *Método y conocimiento*. 7ª ed. Medellin-Colombia: Fondo Editorial Universidad EAFIT, 2006, págs. 387.
9. **ROJAS BARRERA, Byron Javier & CALLE CUJI, Cristian Geovanny.** Modelo de Van Hiele para elaborar actividades de aprendizaje en la unidad razones trigonométricas en décimo B de la unidad Educativa República del Ecuador. [En línea]. (Trabajo de titulación) (Licenciatura). UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN. Azogues- Ecuador. 2020. [Consulta: 2024-01-15]. Disponible en: <http://repositorio.unae.edu.ec/>

bitstream/56000/1814/1/TIC24EB-Itinerario%20Pedagog%C3%ADa%20de%
20la%20Matem%C3%A1tica-Calle%2C%20Rojas.pdf

10. VARGAS VARGAS, Gilberto & GANBOA ARAYA, Ronny. “El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría”. *Dialnet* [En línea], 2012, (Heredia, Costa Rica), vol. 27(3), págs. 74-104. [Consulta: 08 agosto 2023]. ISSN 1101-0275. Disponible en:<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4945319.pdf>



ANEXOS

ANEXO A: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL APRENDIZAJE DE CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS A TRAVÉS DEL MÉTODO DE VAN HIELE.

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO



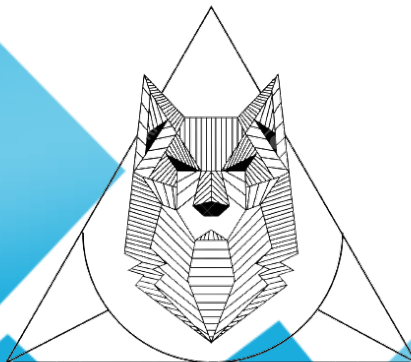
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA DE MATEMÁTICA

UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL APRENDIZAJE DE CONGRUENCIA
Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS A TRAVÉS DEL MÉTODO DE VAN HIELE

Autor: Andy Omar López Salcan

Riobamba- Ecuador

2024



Índice general

1. Método de Van Hiele	5
1.1. Origen del método de Van Hiele	5
1.2. Descripción del método de Van Hiele	6
1.2.1. Niveles de aprendizaje de Van Hiele	6
1.2.2. Fases del aprendizaje del método de Van Hiele	7
1.3. Características del modelo de Van Hiele	8
1.4. Justificación e importancia del método de Van Hiele	9
1.4.1. Importancia	9
1.4.2. Justificación	10
2. Aspectos elementales de geometría plana	12
2.1. Reseña histórica de la geometría	12
2.2. Rectas y segmentos de rectas	13
2.3. Ángulos	22
2.3.1. Clasificación de ángulos	23
2.4. Triángulos	29
2.4.1. Clasificación de triángulos	31
2.5. Congruencia de segmentos y ángulos	36
2.5.1. Ángulos congruentes	41
2.5.2. Proporcionalidad de segmentos	46
2.5.3. División de segmentos	47
2.6. Teorema de Thales	48
2.6.1. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo	56
2.6.2. Relaciones métricas en triángulos no rectángulos	58

3. Demostración de criterios de congruencia y semejanza de triángulos mediante la aplicación del método de Van Hiele	59
3.1. Congruencia de triángulos	60
3.1.1. Criterios de congruencia de triángulos	61
3.2. Semejanza de triángulos	73
3.2.1. Criterios de semejanza de triángulos	74
4. Problemas de geometría plana con la aplicación del método de Van Hiele	93
4.1. Problemas de congruencia de triángulos	93
4.2. Problemas de semejanza de triángulos	114

Índice de figuras

2.1. Segmento	14
2.2. Semirrecta	14
2.3. Rectas intersecantes	15
2.4. Recta	15
2.5. Por dos puntos pasa una sola recta	15
2.6. Por una recta pasa una infinidad de puntos	16
2.7. Por dos rectas que coinciden tiene dos puntos en común	16
2.8. Por dos rectas distintas solo tienen un punto en común	16
2.9. Vértice	17
2.10. Lados de un triángulo	17
2.11. Polígonos cerrados	18
2.12. Rectas paralelas	18
2.13. Rectas perpendiculares	19
2.14. Altura de un triángulo	20
2.15. Polígono y sus diagonales	20
2.16. Mediatriz a un segmento	21
2.17. Bisectriz a un ángulo	21
2.18. Ángulo	22
2.19. Ángulo nulo	23
2.20. Ángulo agudo	24
2.21. Ángulo recto	24
2.22. Ángulo obtuso	25
2.23. Ángulo llano	25
2.24. Ángulos Complementarios	26

2.25. Ángulo Suplementario	26
2.26. Ángulos adyacentes	27
2.27. Ángulos consecutivos	28
2.28. Ángulos opuestos por el vértice	28
2.29. Ángulos formados por intersección de una transversal	29
2.30. Triángulo	30
2.31. Triángulo equilátero	31
2.32. Triángulo isósceles	32
2.33. Triángulo escaleno	32
2.34. Ángulos de un Triángulo	33
2.35. Triángulo acutángulo	34
2.36. Triángulo rectángulo	34
2.37. Triángulo obtusángulo	35
2.38. Dos rectas paralelas	35
2.39. Dos rectas se van a intersectar en un punto	36
2.40. Segmentos congruentes	37
2.41. Axioma de la construcción de un segmento	38
2.42. Ángulos congruentes	38
2.43. Triángulos congruentes	39
2.44. Triángulo isósceles	39
2.45. Triángulo isósceles con dos ángulos congruentes	40
2.46. Dos triángulos rectángulos congruentes	41
2.47. Teorema de la bisectriz del ángulo	41
2.48. Ángulos congruentes opuestos por el vértice	42
2.49. Los ángulos alternos internos congruentes	43
2.50. Los ángulos alternos externos congruentes	44
2.51. Ángulos correspondientes son congruentes	45
2.52. Razón de dos segmentos	47
2.53. División interna de segmentos	47
2.54. Rectas equiparalelas	48
2.55. Teorema Thales	49
2.56. Nota del teorema de Thales	50

2.57. Corolario de segmentos	50
2.58. Corolario	51
2.59. Bisectriz interna	52
2.60. Bisectriz interna de un triángulo	52
2.61. La Bisectriz Exterior en un triángulo	54
2.62. Teorema de menelao	55
3.1. Triángulos	62
3.2. Triángulos congruentes con el criterio de (A-L-A)	64
3.3. Congruencia de triángulos con el criterio (L-L-L)	66
3.4. Teorema de la paralela a un lado de un triángulo (1)	67
3.5. Teorema de la paralela a un lado de un triángulo (2)	68
3.6. Altura en un triángulo rectángulo	69
3.7. Mediatriz	71
3.8. Mediatriz de un triángulo	72
3.9. Definición de semejanza	74
3.10. Criterio ángulo ángulo ángulo (1)	75
3.11. Criterio ángulo ángulo ángulo (2)	76
3.12. Criterio ángulo ángulo ángulo (3)	77
3.13. Intersección de recta paralela a lados de un triángulo	79
3.14. Triángulos rectángulos con ángulo agudo	80
3.15. Tres triángulos rectángulos	83
3.16. Criterio lado ángulo lado (1)	85
3.17. Criterio lado ángulo lado (2)	86
3.18. Criterio lado ángulo lado	87
3.19. Teorema rectas paralelas a un triángulo	90
4.1. Problema 1	94
4.2. Problema 2	96
4.3. Problema 3	98
4.4. Problema 4	100
4.5. Problema 5	102
4.6. Problema 6	104

4.7. Problema 7	106
4.8. Problema 8	108
4.9. Problema 9	110
4.10. Problema 10	112
4.11. Problema 11	115
4.12. Problema 12	117
4.13. Problema 13	119
4.14. Problema 14	122
4.15. Problema 15	124
4.16. Problema 16	127
4.17. Problema 17	129
4.18. Problema 18	132
4.19. Problema 19	134
4.20. Problema 20	136
4.21. Problema 21	138

Lista de símbolos utilizados \overleftrightarrow{a} — Recta \overline{AB} — Segmentos \overrightarrow{AB} — Semi recta \parallel — Paralelas \perp — Perpendiculares \sphericalangle — Ángulo α — Alfa β — Beta δ — Delta γ — Gamma θ — Teta σ — Sigma τ — Tau ϕ — Phi ψ — Psi φ — Phi \cong — Congruentes \triangle — Triángulo $<$ — Menor $>$ — Mayor \leq — Menor o igual \geq — Mayor o igual \sim — Semejante

Introducción

La historia de la geometría comenzó con la necesidad práctica de medir formas individuales, estudiar la relación espacial entre ellas y las propiedades del espacio circundante, dando origen a disciplinas como el dibujo técnico y la arquitectura. Además, su importancia se extiende a otras áreas como la física, la mecánica y la astronomía. Su aplicación en situaciones cotidianas estimula y ejercita las habilidades de pensamiento, y contribuye al desarrollo de estrategias para resolver problemas. Desde tiempos remotos, la geometría ha sido una herramienta crucial en la comprensión del entorno y la evolución de diversas disciplinas.

A pesar de su relevancia y utilidad, es común encontrar que no todos los estudiantes que cursan los primeros semestres de una carrera de matemáticas posean las destrezas necesarias para comprender los razonamientos lógicos presentes en las demostraciones de geometría. Esta carencia resulta en dificultades al abordar su estudio de manera formal. Se reconoce ampliamente que la formalidad en matemáticas, especialmente en las demostraciones, desempeña un papel fundamental como justificación para la expansión del conocimiento matemático.

En base a lo planteado, el proceso de las demostraciones en geometría, especialmente en temas como la congruencia y semejanza de triángulos, suele plantear desafíos a los estudiantes debido a la demanda de razonamiento lógico y construcción de argumentos coherentes. La transición de comprender propiedades geométricas a demostrarlas matemáticamente puede ser abrupta y confusa. En este contexto, el método de Van Hiele cumple un rol importante y esencial al ofrecer una estructura progresiva que guía a los estudiantes a través de niveles de pensamiento geométrico, desde la comprensión visual hasta el razonamiento deductivo riguroso.

Por tal motivo, esta progresión permite que los estudiantes superen las dificultades inherentes a las demostraciones, desarrollando una comprensión profunda, habilidades lógicas y

argumentativas necesarias para construir demostraciones sólidas.

Al respecto, en la literatura, se encuentran diferentes investigaciones que abordan esta problemática; por ejemplo, Vargas (2012) realizó una propuesta sobre el modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Este artículo propone una visión sobre el modelo de Van Hiele y su aplicación en la enseñanza de la geometría. Explora cómo este método guía el proceso de comprensión desde una perspectiva visual inicial hasta la construcción rigurosa de demostraciones matemáticas, estableciendo bases sólidas para el pensamiento geométrico auténtico. Además, analiza su adaptabilidad a distintas edades y niveles, permitiendo una enseñanza personalizada acorde al ritmo de desarrollo de cada estudiante. En última instancia, resalta que el uso efectivo del método no solo enriquece la enseñanza de la geometría, sino también potencia habilidades cognitivas esenciales para abordar desafíos matemáticos en la vida cotidiana.

Asimismo, Chavarría (2020) ofrece una investigación relevante que aborda el uso del método Van Hiele y los niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de Huancavelica, Perú. El estudio se propuso evaluar la efectividad del enfoque holandés de Van Hiele en la mejora de los niveles de pensamiento geométrico en el sexto ciclo de educación básica ordinaria. Los resultados demostraron que la aplicación de este método contribuyó al progreso del pensamiento geométrico, abarcando la visualización, el análisis y la clasificación. Por ende, se concluyó que existió una diferencia significativa en los niveles de adquisición de pensamiento geométrico antes y después de la implementación del método de Van Hiele.

El método de Van Hiele fue esencial en la enseñanza de la geometría, especialmente en congruencia y semejanza de triángulos. Su enfoque progresivo guía a los estudiantes a través de niveles de pensamiento, desde la visualización hasta la demostración rigurosa, fomentando una comprensión profunda. Además, esto fortalece las habilidades de los estudiantes para construir argumentos lógicos en demostraciones de congruencia y semejanza de triángulos, mejorando su razonamiento matemático y habilidades de resolución de problemas.

El propósito de este estudio fue elaborar un documento referencial donde se detalle la implementación del método de Van Hiele para mejorar el aprendizaje en demostraciones en geometría. Esta propuesta metodológica innovadora contribuye al desarrollo de habilidades en los estudiantes. Además, tuvo un impacto significativo en el desarrollo de destrezas geométricas, el razonamiento matemático y la resolución de problemas.

En fin, la organización de este documento referencial consta de cuatro capítulos. El primero, bajo el título "Método de Van Hiele", explorará no solo el contexto histórico de este método, sino también las distintas fases y etapas fundamentales para el aprendizaje de demostraciones en geometría. Se enfocará en resaltar la trascendencia de aplicar el método de Van Hiele hacia las demostraciones geométricas, subrayando su papel crucial en el desarrollo de habilidades cognitivas y la comprensión profunda de los conceptos geométricos. Además, se examinarán casos prácticos que ejemplifiquen la efectividad y relevancia de este enfoque pedagógico, contribuyendo así a una comprensión integral y aplicada del método de Van Hiele en el ámbito educativo.

En el segundo capítulo, titulado "Aspectos Elementales de la Geometría Plana", se presentan los elementos fundamentales de este tema mediante la consulta de diversas fuentes bibliográficas como artículos, páginas web y libros, entre otros recursos. El propósito principal de esta sección es facilitar la visualización de diversas definiciones, teoremas, corolarios y observaciones, proporcionando al lector un panorama completo de los contextos teóricos relacionados con la congruencia y semejanza de triángulos. El objetivo final es que el lector adquiera gradualmente los conocimientos esenciales para abordar demostraciones geométricas de manera efectiva.

Posteriormente, en el cuarto capítulo, titulado "Demostraciones de Criterios de Congruencia y Semejanza de Triángulos mediante la Aplicación del Método de Van Hiele", nos enfocaremos en la correcta aplicación del método de Van Hiele hacia los criterios de congruencia y semejanza. El objetivo es que el lector pueda visualizar de manera detallada cómo se abordaron las siguientes demostraciones. Así, el lector podrá desarrollar las habilidades cognitivas necesarias para enfrentar futuros problemas con confianza.

Finalmente, se ha elaborado el quinto capítulo titulado "Problemas de Geometría Plana con la Aplicación del Método de Van Hiele". En esta sección, se abordaron diversos problemas relacionados con la congruencia y semejanza de triángulos. En detalle, se describen las cinco fases para el aprendizaje del método de Van Hiele en el contexto de las demostraciones geométricas. Esto permite al lector comprender y posteriormente desarrollar las habilidades necesarias para abordar las demostraciones a lo largo de su formación matemática futura.

Capítulo 1

Método de Van Hiele

“En la vida, enfrentar lo difícil es emprender un camino de forma solitaria, pero sin duda es el trayecto que te enseña a ser más fuerte y cauteloso ante lo que te rodea.”

López. A

En el siguiente capítulo, se efectúa una recopilación de información relacionada con el método de Van Hiele. Esto incluye su historia, las características distintivas de sus niveles y las fases que lo componen, así como sus propiedades fundamentales. La importancia que tiene en la matemática, con énfasis en el área de la geometría plana, con el fin de resaltar el desarrollo en el aprendizaje.

1.1. Origen del método de Van Hiele

El método de enseñanza y aprendizaje de la geometría, conocido como el método de Van Hiele, fue desarrollado en los trabajos de tesis doctorales y presentados en 1957, por los profesores de matemática, Pierre María Van Hiele (1920-1997) y Dina Van Hiele-Geldof (1934-2018), en la Universidad de Utrecht, Holanda. Cada uno de ellos contribuyó con un enfoque particular, el cual, impactó en el desarrollo cognitivo del pensamiento, por el cual fue implementado en países occidentales la orientación revolucionaria que tuvo Van Hiele, llamó la atención de la Unión Soviética, el cual fue adoptado en la planificación de su nuevo currículum de matemáticas en la primera mitad de la década de 1960. En Holanda, el método de Van Hiele comenzó a desarrollarse a partir de 1971. No fue hasta mediados de los años

70 que este enfoque llegó a Estados Unidos, después de la publicación de una conferencia presentada por I. Wirszup. En España, la difusión de este método se produjo aproximadamente una década más tarde, en los años 80 (Venegas, 2015).

En la actualidad, el método de Van Hiele se encuentra en un proceso de difusión y aplicación más amplia en el ámbito de la educación matemática. Sus resultados significativos que obtuvo en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría han dado realce a este método, por el gran aporte que realiza a la comprensión de la geometría.

1.2. Descripción del método de Van Hiele

El método de razonamiento de Van Hiele se puede explicar tomando dos aspectos importantes como son: los niveles de aprendizaje y las fases de aprendizaje. son procesos por el cual los estudiante desarrolla su razonamiento, identifica y distingue las etapas por las que atraviesan los estudiantes al aprender matemáticas. Además, estos niveles se dividen en cinco categorías, que parten desde las más simple hasta lo más complejo. A modo que se va desarrollando cada nivel, se observa un progreso y una maduración gradual en el entendimiento de conceptos geométricos.

1.2.1. Niveles de aprendizaje de Van Hiele

El método de razonamiento geométrico de Van Hiele describe el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes y los clasifica en 5 niveles que son: visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor. Además, al iniciar su proceso de aprendizaje, los estudiantes se encuentran en un nivel específico y progresivamente van avanzando hacia niveles superiores a medida que avanza en su comprensión. Al mismo tiempo, el método de Van Hiele también brinda orientación sobre cómo respaldar a los estudiantes en el proceso de desarrollo en sus razonamientos, de esta manera, se facilita la transición de los estudiantes de un nivel a otro, lo que contribuye a mejorar la calidad de su pensamiento geométrico (Gamboa, 2012).

De acuerdo con Barrera y Reyes (2019), el método de Van Hiele comprende los siguientes niveles:

[Nivel 1] Visualización o reconocimiento: Los estudiantes identifican las diferentes formas geométricas basándose especialmente en su representación visual, sin tomar en cuenta las diferentes propiedades o características específicas con las que cuenta los diferentes objetos geométricos. Además, el razonamiento matemático que se tiene sobre las diferentes formas geométricas depende de una gran mayoría de una perspectiva visual.

[Nivel 2] Análisis: En este nivel, los estudiantes identifican diferentes figuras y las relacionan con sus propiedades o características con las que posee. Inclusive, el proceso de razonamiento que adquieren los estudiantes ya les permite manipular las diferentes figuras con mayor facilidad.

[Nivel 3] Ordenación, clasificación o abstracción: Los estudiantes en este nivel comienzan a construir pensamientos lógicos sobre los conceptos geométricos, pudiendo así identificar las relaciones entre conceptos y propiedades de las figuras. Ayudando, a fortalecer al razonamiento abstracto para comprender que las propiedades de una figura geométrica se deriva de otras propiedades, de esta manera va fortaleciendo los diferentes niveles del método de Van Hiele.

[Nivel 4] Deducción forma: Los estudiantes en este nivel tienen la capacidad de probar teoremas, a partir de información previamente probada. También entienden la necesidad de justificar sus razonamientos, para garantizar su validez, fortaleciendo al desarrollo de sus propias demostraciones en matemática.

[Nivel 5] Rigor: Los estudiantes en este nivel, poseen un razonamiento lo suficiente mente abstracto ya que son capaces de realizar deducciones abstractas y de analizar los axiomas de un sistema geométrico, aportando así al desarrollo intelectual y construcción de demostraciones formales en matemática.

1.2.2. Fases del aprendizaje del método de Van Hiele

El método de Van Hiele es una teoría para el aprendizaje geométrico que describe cómo los estudiantes desarrollan habilidades para el razonamiento geométrico a medida que aprenden nuevos conceptos. Identifica cinco niveles de razonamiento que corresponden a cinco fases de aprendizaje, las cuales ayudan al profesor a elaborar y organizar diferentes actividades para promover el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes (Cabello, 2013).

En este sentido, Jaramillo et al. (2004) clasifican las fases de aprendizaje del método de Van Hiele de la siguiente manera:

[Fase 1] Información o indagación: El docente dialoga bidireccionalmente con los estudiantes sobre el contenido de estudio, adaptándose a sus interpretaciones, observaciones, explicaciones y fomentando preguntas, las cuales tienen respuestas.

[Fase 2] Orientación dirigida: El profesor organiza con detalle las actividades que permiten a los estudiantes explorar y familiarizarse con las diferentes características de las estructuras mediante tareas paso a paso que conducen a respuestas específicas.

[Fase 3] Explicitación: Los estudiantes desarrollan conceptos a partir de sus experiencias anteriores, mejorando su vocabulario y compartiendo sus puntos de vista sobre la estructura del concepto. En esta fase, establecen conexiones y se espera que realicen observaciones en lugar de depender de explicaciones del profesor.

[Fase 4] Orientación libre: Los estudiantes se enfrentan a las actividades que tienen varios pasos, o pueden abordarlas de diversas formas, lo cual ayuda a la habilidad de resolver problemas de manera autónoma.

[Fase 5] Integración: Los diferentes objetivos y relaciones se integran y se internalizan en una nueva estructura del pensamiento, donde el profesor desempeña un papel de mediador, resaltando las relaciones significativas construidas por los estudiantes.

1.3. Características del modelo de Van Hiele

El desarrollo cognitivo se puede definir como el proceso en el que los estudiantes organizan la información que perciben para enfrentar situaciones novedosas basándose en experiencias previas. Se comprende que el desarrollo cognitivo surge a raíz de los esfuerzos de algunos estudiantes por comprender y enfrentarse a problemas nuevos. Los estudiantes pasan por diferentes etapas, y en cada etapa superada adquieren nuevos conocimientos que contribuyen al desarrollo del pensamiento y generan una maduración de conocimientos (Almornoz y Guzmán, 2016).

La comprensión profunda es la capacidad gradual de entender un tema y los diferentes conceptos adyacentes al que abarca. Por tanto, ayuda a desarrollo de destrezas y habilidades

para analizar, reflexionar, contextualizar y ejecutar los conocimientos de forma significativa para la soluciones de problemas en diversas situaciones.

El constructivismo en educación es un enfoque que permite a los estudiantes desarrollar su propio conocimiento al conectar sus habilidades y experiencias anteriores de manera personalizada, además, el aprendizaje es un proceso continuo y activo, donde los alumnos están permanentemente aprendiendo sobre varios temas simultáneamente, mostrándose participativos y conectados con su entorno, así, la enseñanza constructivista se fundamenta en la premisa de que la motivación es fundamental y crucial para que los estudiantes desarrollen habilidades cognitivas (Universidad Europea, 2023).

La transferencia de conocimientos es el proceso el cual los estudiantes están preparados para trasladar el conocimiento adquirido anticipadamente, como es el caso de las definiciones, conceptos, lemas (Gómez y Guzmán, 2013). Esto es importante en la educación, ya que en algunos casos es limitada por la mecanización y la memorización de ciertos ejercicios de diferentes asignaturas, con mayor énfasis en las diversas áreas de matemática. Por esta razón, es primordial que los estudiantes comprendan, reflexiones, analicen para la transferencia del conocimiento.

1.4. Justificación e importancia del método de Van Hiele

1.4.1. Importancia

Domínguez (2014) manifiesta que en matemáticas ningún resultado se puede considerar verdadero hasta que se demuestre formalmente. La demostración en matemática es un concepto fundamental y esencial, ya que busca precisamente demostrar verdades eternas aceptadas por todos. Las demostraciones, para ser aceptadas, deben pasar por un riguroso proceso de razonamientos lógicos y verificación de los procesos anteriores. Cualquier error de argumentación o razonamiento anula la demostración, ya que no cumple con los requisitos de formalidad. Los matemáticos son extremadamente meticulosos y rigurosos en la verificación de los resultados. Además, la formalidad es fundamental en su trabajo, donde todo debe estar debidamente justificado. Esto es uno de los motivos por los cuales existe incomprensión y rechazo por parte de personas ajenas a esta ciencia.

Descubrir la verdad en matemática es importante y gratificante en esta ciencia, similar a la del músico al terminar de componer una pieza musical o al del pintor al plasmar los colores de un paisaje en un lienzo. Por ende, las demostraciones son importantes Rivera (2023) como un proceso para garantizar la validez de los teoremas, los cuales se convierten en herramientas confiables para su utilización en otras ramas de la matemática, como arquitectura, ingeniería, medicina, etc. Dentro de la validación matemática surgen nuevas ideas e interrogantes, sobre las cuales son susceptibles de estudios para garantizar su verdad, enriqueciendo así la matemática.

1.4.2. Justificación

El estudio de la matemática, y en particular de la geometría, brinda a los estudiantes la oportunidad de influir de manera significativa en una sociedad competitiva. Por esta razón, la sociedad que comprende la geometría de manera más profunda tiene mayor posibilidad en el desarrollo, de las habilidades de razonamientos lógicos y la justificación.

El método de razonamiento geométrico de Van Hiele es un enfoque educativo que permite identificar diversas formas de razonamiento geométrico y proporciona directrices para fomentar la adquisición de conocimientos en los diferentes niveles de razonamiento. El implemento del método considerado por (Vargas y Ganboa, 2013). Ayuda a que los educadores realicen una evaluación inicial para determinar el nivel de razonamiento geométrico en el que se encuentra cada estudiante. Esto les permite diseñar estrategias que facilitan la descripción del progreso de cada estudiante en su desarrollo del razonamiento geométrico.

Dado que el método de Van Hiele no sigue un enfoque tradicional, en el cual el profesor dicta la clase y los estudiantes escuchan, por el contrario, exige una interacción profunda entre ellos, ya que los educadores deben diseñar actividades que motiven al desarrollo del pensamiento. Por otro lado, los estudiantes desarrollarán habilidades y destrezas para resolver problemas, fortaleciendo y compactando sus conocimientos en geometría.

La demostración matemática es una práctica social de la comunidad matemática que tiene como principal objetivo validar el conocimiento matemático adquirido, por tanto la demostración matemática ha evolucionado históricamente su construcción y comprensión. Por tanto, una demostración matemática es un proceso, un razonamientos o una serie de secuencias

finitas de manera que cada razonamiento utilizando sea una consecuencia inmediata de algunas verdades precedentes, gracias a las reglas de inferencia.

La evolución de las demostraciones se remonta a épocas antiguas, cuando los matemáticos buscaban la aceptación de sus descubrimientos en distintos ámbitos, dando origen a la importancia de las demostraciones tal como se reconocen en la actualidad: como un proceso de razonamiento lógico destinado a verificar la veracidad de enunciados. En el ámbito de la geometría, se establece un conjunto básico de axiomas que se aceptan sin necesidad de demostración, mientras que otras verdades, como teoremas, criterios, postulados, requieren pruebas para asegurar su veracidad y validar su posterior aplicación.

Una demostración bien estructurada solo puede apoyarse en proposiciones previamente demostradas, siendo inadmisibles toda alegación a la evidencia. Finalmente, a través de las demostraciones, las verdades geométricas se reducen a un sistema armónico de conocimientos científicos en el cual se ponen de manifiesto todas las relaciones internas que existen entre las diversas propiedades de las formas espaciales.

Capítulo 2

Aspectos elementales de geometría plana

2.1. Reseña histórica de la geometría

“Descubrir la verdad en geometría es un arte, que no esta a la disposición de cualquier loco.”

Lopez. A

Desde tiempos antiguos hasta la actualidad, la humanidad se a desarrollado en un mundo impregnado de geometría. Con figuras universales como las pirámides, triángulos y rectángulos, círculos y otras representaciones geométricas, las cuales son importantes en nuestra diario vivir.

Euclides, reconocido como el padre de la geometría, escribió los elementos hace más de dos mil años, siendo el segundo libro más publicado en la historia occidental después de la Biblia, además, su existencia ha sido objeto de debate, se presume que Euclides lideró un equipo en Alejandría que compiló trece volúmenes de matemáticas griegas avanzadas, presentando resultados matemáticos mediante el método axiomático, fundamentando cada teorema en axiomas irrefutables. Su enfoque revolucionario, como la demostración del teorema de Pitágoras y la suma de los ángulos de los triángulos, ha moldeado profundamente la enseñanza y comprensión matemática hasta hoy en día, influenciando la estructura lógica y la forma en que se enseñan las matemáticas (Linares, 2023).

Se considera que la geometría, vista como una evolución de métodos empíricos de medición hacia conceptos abstractos, tuvo su origen con egipcios y babilonios y alcanzó su plenitud

en la cultura griega. A pesar de haber empleado la geometría y la aritmética en aplicaciones prácticas, ciertas investigaciones indican que en la edificación de las pirámides se empleó una geometría más compleja en vez de limitarse solo a la funcionalidad geométrica (Recalde, 2016).

Fernández (2018) manifiesta que comprender la evolución y el desarrollo de la historia de la geometría es de gran importancia, ya que abarca una amplia gama de conceptos que podrían considerarse como geometría práctica. Los primeros conocimientos geométricos que adquirió la humanidad se basaron en la visualización de la naturaleza, la cual está constituida por diferentes formas, figuras y tamaños. Además, con el paso del tiempo fueron desarrollándose conocimientos geométricos más profundos y concretos, los cuales siglos más tarde serían considerados como una rama importante de las matemáticas, la cual, por su gran aporte e importancia, requiere ser estudiada.

2.2. Rectas y segmentos de rectas

En este capítulo, se presentarán definiciones, teoremas, postulados, entre otros elementos, con el propósito de que los lectores puedan enriquecer sus conocimientos matemáticos. Esto posee gran importancia, ya que abordar las demostraciones requiere un conocimiento sólido de los conceptos teóricos de la geometría. Es ampliamente reconocido que la justificación en las demostraciones es primordial, ya que se basa en contextos teóricos previamente establecidos. Por este motivo, en este capítulo se expondrán las bases teóricas necesarias para que el lector desarrolle habilidades indispensables para construir sus propias demostraciones en congruencia y semejanza de triángulos.

Definición 2.2.1: Recta

Línea formada por una serie continua de puntos en una misma dirección, sin curvas ni ángulos, que cubre la menor distancia posible entre dos puntos.

Definición 2.2.2: Segmento

Porción de una línea recta limitada por dos puntos extremos, representada con dos letras mayúsculas, una en cada extremo de la recta.

Como se puede visualizar en la figura 2.1 si tiene la representación geométrica del segmento

\overline{AB} , el símbolo que se utiliza es \overline{AB} , y se lee: segmento \overline{AB} .

Figura 2.1: Segmento



Definición 2.2.3: Longitud de segmento

Al considerar una semi recta, el número que expresa la distancia entre los puntos P y L se llama medida o longitud el segmento \overline{PL} , así $\overline{PL} = \text{Longitud}$

Definición 2.2.4: Semirrecta

Serie indefinida de puntos generada a partir de uno solo y en una misma dirección, es decir, es una porción de una recta sin longitud definida, se representa con una letra minúscula o dos mayúsculas y una flecha arriba de la letra o letras que representan a la semirrecta. También se le llama rayo.

Como se puede visualizar en la figura 2.2 se tiene la representación geométrica de una semirrecta \overrightarrow{AB} , el símbolo que se utiliza es \overrightarrow{AB} y se lee, semirrecta \overrightarrow{AB} , como se observa a continuación:

Figura 2.2: Semirrecta

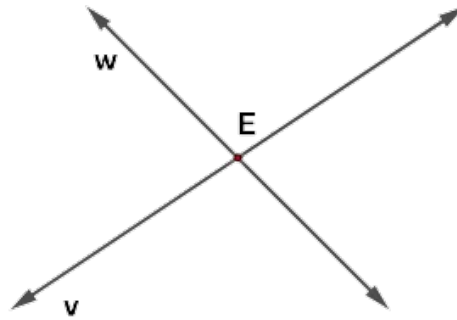


Definición 2.2.5: Rectas intersecantes

Son rectas que se intersecan en un punto común.

En la figura 2.3 se puede visualizar la representación geométrica de dos rectas \overleftrightarrow{w} y \overleftrightarrow{v} , de donde su intersección es en el punto E como se visualiza a continuación:

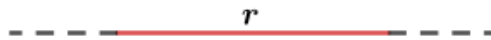
Figura 2.3: Rectas intersecantes



Axiomas de las rectas

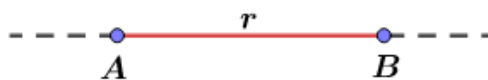
- La recta es el camino más corto entre dos puntos.

Figura 2.4: Recta



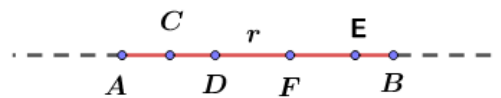
- Por dos puntos, solo puede pasar una y solo una recta.

Figura 2.5: Por dos puntos pasa una sola recta



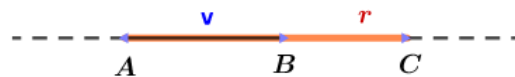
- Por una recta puede pasar una infinidad de rectas, y en una recta hay una infinidad de puntos.

Figura 2.6: Por una recta pasa una infinidad de puntos



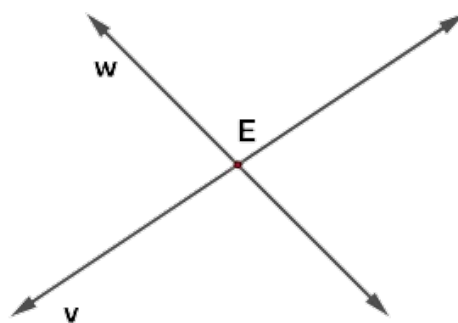
- Dos rectas tienen dos puntos en común, coinciden en toda extensión.

Figura 2.7: Por dos rectas que coinciden tiene dos puntos en común



- Por dos rectas distintas no pueden tener más de un punto común.

Figura 2.8: Por dos rectas distintas solo tienen un punto en común

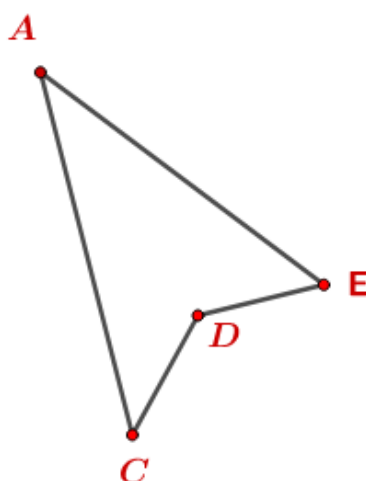


Definición 2.2.6: Vértice

Punto donde coinciden dos lados de una figura, representado con una letra minúscula del alfabeto.

En la figura 2.9 se puede visualizar la representación geométrica de los puntos A , C , D y E , son intersecciones de lados de un poliedro, de donde se forman los vértices, como e muestra a continuación:

Figura 2.9: Vértice



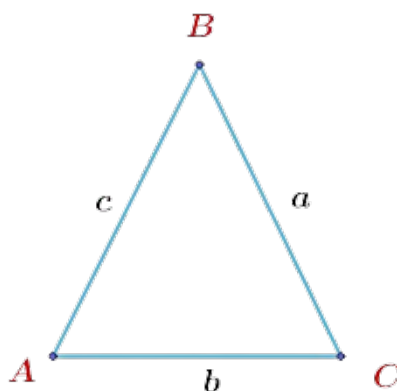
Fuente: Elaboración propia

Definición 2.2.7: Lado

Es un segmento de una recta que limita una figura, representado con una letra minúscula o con dos letras mayúsculas, una en cada extremo del segmento.

Como se puede visualizar la figura 2.10 se tiene la representación geométrica de un triángulo, cuyos lados son a , b y c o los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} , como se ilustra a continuación:

Figura 2.10: Lados de un triángulo

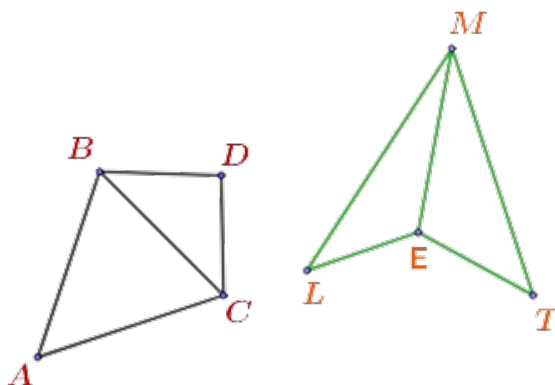


Definición 2.2.8: Polígonos

Es una figura cerrada y acotada, limitada por segmentos de rectas llamados lados del polígono.

En la figura 2.11 se tiene la representación geométrica de polígonos cerrados, de lados \overline{AB} , \overline{BD} , \overline{DC} y \overline{AC} , como se visualiza a continuación:

Figura 2.11: Polígonos cerrados



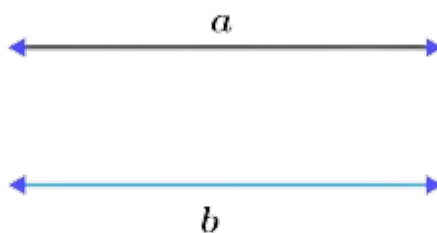
Fuente: Elaboración propia

Definición 2.2.9: Rectas Paralelas

Las rectas paralelas son aquellas que no tienen ningún punto en común. Otra forma de explicarlo es que son equidistantes, es decir, siempre mantienen la misma distancia entre sí.

En la figura 2.12 se tiene la representación geométrica de las rectas paralelas \overleftrightarrow{a} y \overleftrightarrow{b} y se representa por $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$, y se lee, la recta \overleftrightarrow{a} es paralela a la recta \overleftrightarrow{b} , tal como se visualiza a continuación:

Figura 2.12: Rectas paralelas

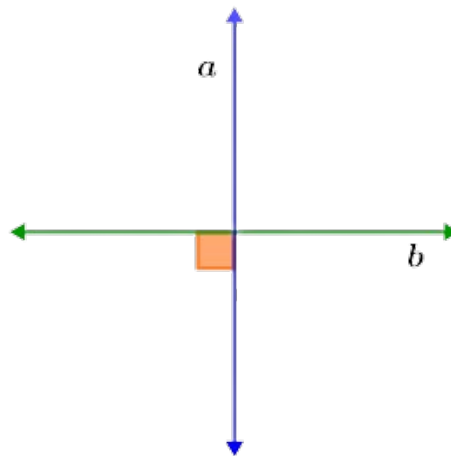


Definición 2.2.10: Rectas perpendiculares

Dos rectas forman un ángulo de 90° grados en su punto de unión, se dice que son perpendiculares.

En la figura 2.13 se tiene la representación geométrica de las rectas \overleftrightarrow{a} y \overleftrightarrow{b} , las cuales son perpendiculares, y se representa como $\overleftrightarrow{a} \perp \overleftrightarrow{b}$, y se lee: la recta \overleftrightarrow{a} es perpendicular a la recta \overleftrightarrow{b} . Además, en la intersección se dibuja un cuadrado para representar un ángulo de 90° , como se ilustra a continuación:

Figura 2.13: Rectas perpendiculares



Definición 2.2.11: Base de un polígono

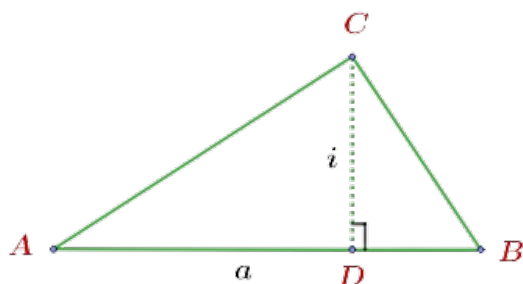
La base de un polígono es el lado sobre el cual descansa la figura geométrica, pudiendo ser cualquier lado.

Definición 2.2.12: Altura del triángulo

Es un segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación. Hay tres alturas, una correspondiente a cada lado. El ortocentro es el punto de intersección de las alturas o de sus prolongaciones, pudiendo encontrarse fuera o dentro del triángulo.

En la figura 2.14 se observa la representación geométrica de un triángulo con altura i y la base es a tal como se muestra a continuación:

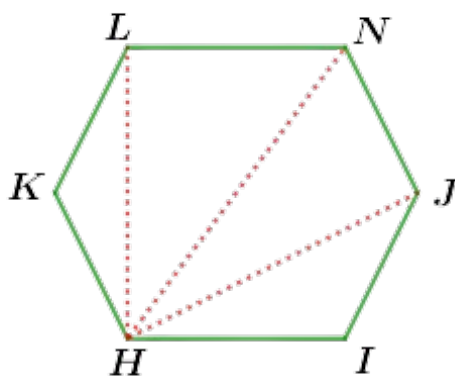
Figura 2.14: Altura de un triángulo

**Definición 2.2.13: Diagonal**

Es un segmento que une dos vértices no consecutivos en un polígono.

En la figura 2.15 se representa un polígono cerrado, donde las diagonales son los segmentos punteados, su característica principal es que conectan vértices no consecutivos \overline{HL} , \overline{HN} y \overline{HJ} , como se muestra a continuación:

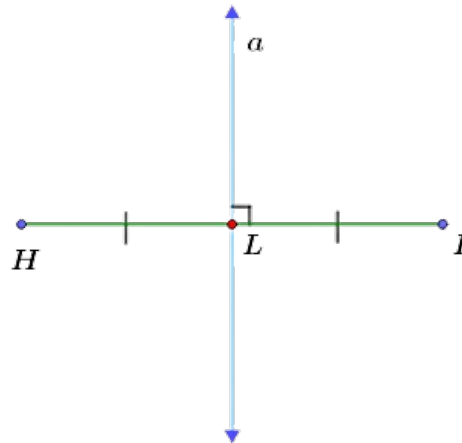
Figura 2.15: Polígono y sus diagonales

**Definición 2.2.14: Mediatriz**

Es una recta perpendicular que pase por un punto medio de un segmento.

En la figura 2.16 se tiene la representación geométrica de la recta \overleftrightarrow{a} , la cual es mediatriz al segmento \overline{HI} . En otras palabras, la propiedad de ser mediatriz implica que $\overline{HL} = \overline{LI}$, como se ilustra a continuación:

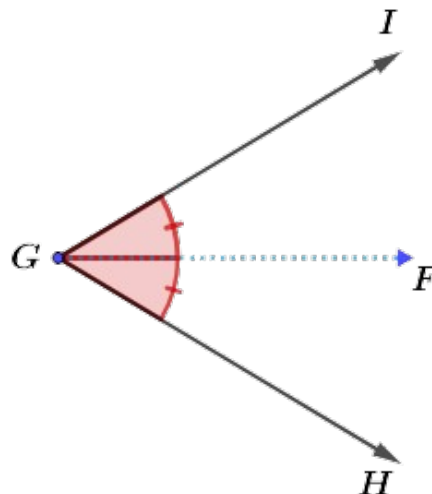
Figura 2.16: Mediatriz a un segmento

**Definición 2.2.15: Bisectriz**

Semirrecta que divide un ángulo en dos partes iguales.

En la figura 2.17 se tiene la representación geométrica de una bisectriz \overline{GF} , tal que divide al ángulo $\angle IGH$ en dos ángulos $\angle FGH$ y $\angle FGI$, los cuales son de la misma medida, como se ilustra a continuación:

Figura 2.17: Bisectriz a un ángulo



2.3. Ángulos

Desde tiempos remotos, el concepto de ángulo fue empleado por múltiples civilizaciones, entre ellas los babilonios, quienes emplearon el sistema sexagesimal basado en 60 para medir la orientación, ubicación y disposición de objetos en el espacio. En la actualidad, los ángulos tienen un rol crucial en diversas disciplinas como arquitectura, ingeniería, aviación y astronomía.

Diversos geómetras han llevado a cabo varias investigaciones sobre los ángulos; por ejemplo, John Milnor, distinguido con la Medalla Fields en 1962 por su trabajo en geometría diferencial y topología, y Richard Shawn, laureado en 1983, quien se enfocó en la curvatura y geometría global, explorando algunas características de los ángulos. Su labor, sumada a la de renombrados expertos como Shing-Tung Yau, Simon Donaldson y Michael Friedman, ha enriquecido notablemente nuestra comprensión de la geometría y sus diversas aplicaciones.

Definición 2.3.1: Ángulo

En geometría, el ángulo puede ser definido como la parte del plano determinada por dos semirrectas llamadas lados que tienen el mismo punto de origen llamado vértice del ángulo.

En la figura 2.18 se tiene la representación geométrica de un ángulo $\angle\alpha$, entre las semirrectas \vec{a} y \vec{b} , tal como se muestra a continuación :

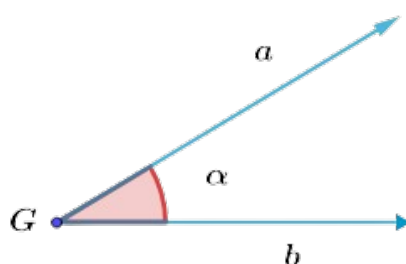


Figura 2.18: Ángulo

Notas 2.3.1

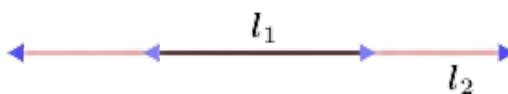
- La unidad de medida de los ángulos de uso más común son los grados sexagesimales o simplemente grados.
- Las semirrectas que conforman el ángulo se les conoce como lados del ángulo, y al punto de origen común como vértice.
- En la figura 2.18 puedes observar el ángulo formado por las semirrectas \vec{a} y \vec{b} , donde el punto G es el vértice.
- Para nombrar los ángulos se utilizan las primeras letras griegas, tales como α (alfa), β (beta), γ (gamma), etc., precedidas del símbolo \sphericalangle o \sphericalangle y se lee que ángulo alfa.

2.3.1. Clasificación de ángulos**Definición 2.3.2: Ángulo nulo**

Es el ángulo formado por dos semirrectas coincidentes, por lo tanto su abertura es nula, es decir, de 0° .

La figura 2.19 se muestra la representación geométrica del ángulo nulo, donde la recta $\overleftrightarrow{l_1}$ se sitúa sobre recta $\overleftrightarrow{l_2}$. Por consiguiente, el ángulo resultante es de 0° , tal como se ilustra a continuación:

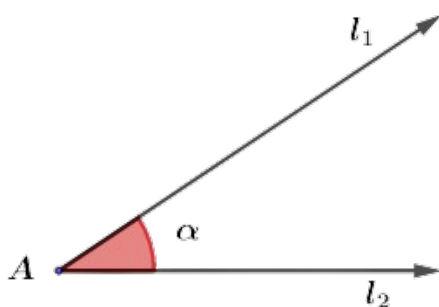
Figura 2.19: Ángulo nulo

**Definición 2.3.3: Ángulo agudo**

Es el ángulo formado por dos semirrectas con amplitud mayor de 0° y menor de 90° .

La figura 2.20 ilustra la representación geométrica del ángulo agudo $\sphericalangle\alpha$, en el cual las semirrectas \vec{l}_1 y \vec{l}_2 forman un ángulo mayor a 0° y menor a 90° , tal como se observa a continuación:

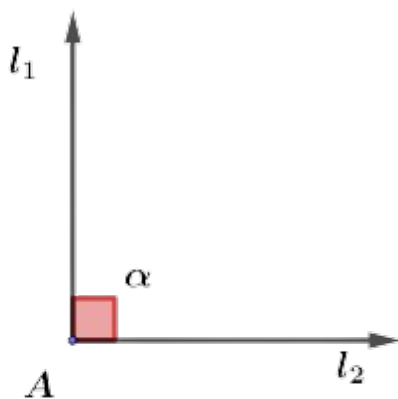
Figura 2.20: Ángulo agudo

**Definición 2.3.4: Ángulo recto**

Un ángulo recto tiene una amplitud de 90° . Los dos lados de un ángulo recto son perpendiculares entre sí.

En la figura 2.21 se muestra la representación geométrica del ángulo recto $\angle\alpha$, donde las semirrectas \vec{l}_1 y \vec{l}_2 son perpendiculares, formando así un ángulo de 90° , como se puede apreciar a continuación:

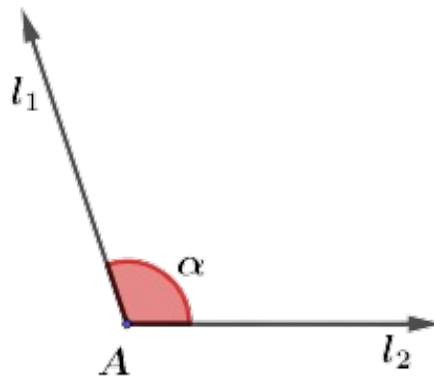
Figura 2.21: Ángulo recto

**Definición 2.3.5: Ángulo obtuso**

Un ángulo obtuso es aquel cuya amplitud es mayor a 90° y menor de 180° .

En la figura 2.22 se muestra la representación geométrica del ángulo obtuso $\angle\alpha$, donde la intersección de las semirrectas \vec{l}_1 y \vec{l}_2 forma un ángulo comprendido entre 90° y 180° , tal como se ilustra a continuación:

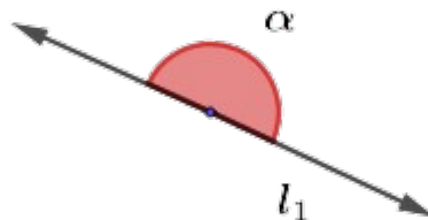
Figura 2.22: Ángulo obtuso

**Definición 2.3.6: Ángulo llano**

El ángulo llano tiene una amplitud de 180° .

En la figura 2.23 se muestra la representación geométrica el ángulo llano $\angle\alpha$, donde la recta $\overleftrightarrow{l_1}$ forma un ángulo de 180° , como se puede apreciar a continuación:

Figura 2.23: Ángulo llano

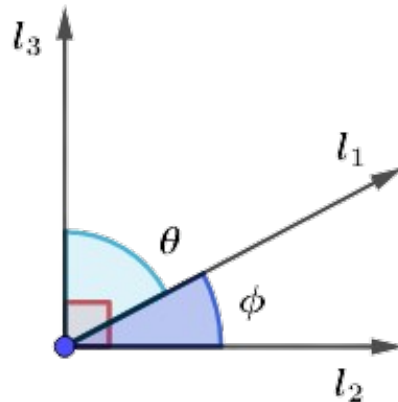
**Definición 2.3.7: Ángulos Complementarios**

Los ángulos complementarios son aquellos que al sumarse resultan en un ángulo recto de 90° , de tal manera que a cada ángulo se lo llama el complemento del otro.

En la figura 2.24 se presenta la representación geométrica de las semirrectas $\overrightarrow{l_1}$, $\overrightarrow{l_2}$ y $\overrightarrow{l_3}$, las cuales forman los ángulos complementarios $\angle\theta$ y $\angle\phi$. Es importante destacar que las semirrectas $\overrightarrow{l_2}$ y $\overrightarrow{l_3}$ conforman un ángulo de 90° . Al intersectar con la semirrecta $\overrightarrow{l_1}$, se genera una división que resulta en dos ángulos de medidas distintas, como se puede apreciar

a continuación:

Figura 2.24: Ángulos Complementarios

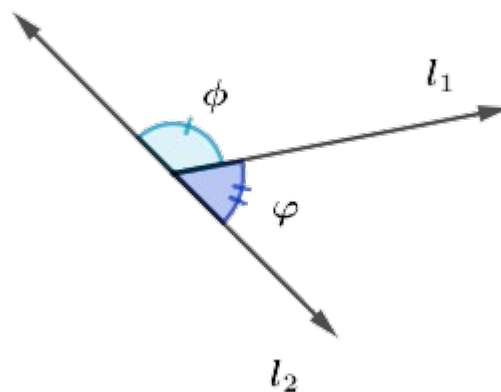


Definición 2.3.8: Ángulo Suplementario

El ángulo suplementario es aquel que permite sumar dos ángulos y como resultado tengamos un ángulo de 180° (*grados*) y cada ángulo se lo conocerá como el suplemento del otro.

En la figura 2.25 se muestra la representación geométrica de la intersección entre la recta $\overleftrightarrow{l_2}$ y la semirrecta $\overrightarrow{l_1}$, dando lugar a dos ángulos, $\angle\phi$ y $\angle\psi$. Es importante destacar que la suma de estos ángulos es igual a 180° , tal como se ilustra a continuación:

Figura 2.25: Ángulo Suplementario



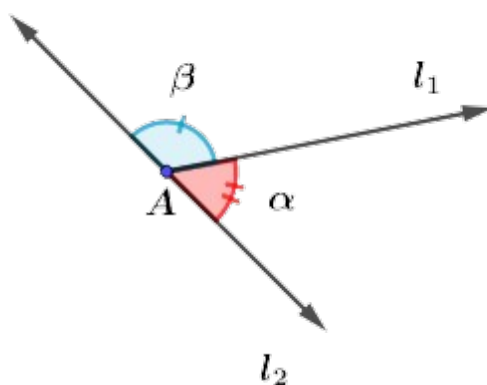
Clasificación de ángulos por su posición

Definición 2.3.9: Ángulos adyacentes

Son aquellos ángulos que tienen el vértice y un lado en común y juntos equivalen a un ángulo llano 180° .

En la figura 2.26 se muestra la representación geométrica de un ángulo adyacente, donde la intersección de \vec{l}_1 y \vec{l}_2 forma los ángulos $\angle\beta$ y $\angle\alpha$ de diferente medida y que son adyacentes, manteniendo una continuidad angular, como se muestra a continuación:

Figura 2.26: Ángulos adyacentes

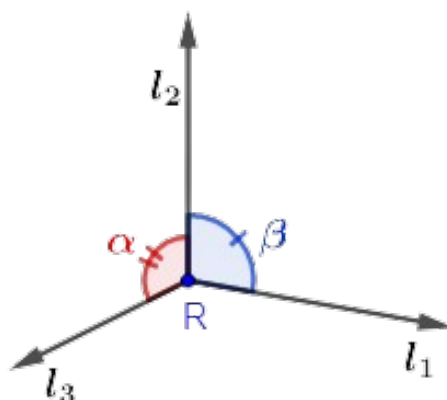


Definición 2.3.10: Ángulos consecutivos

Los ángulos consecutivos son aquellos que comparten un lado y un vértice en común.

En la figura 2.27 se tiene la representación geométrica de ángulos consecutivos, donde la intersección de las semirrectas \vec{l}_1 , \vec{l}_2 y \vec{l}_3 forma los ángulos $\angle\beta$ y $\angle\alpha$ de diferente magnitud. Además, la semirrecta \vec{l}_2 y el vértice son comunes en estos ángulos, como se ilustra a continuación:

Figura 2.27: Ángulos consecutivos

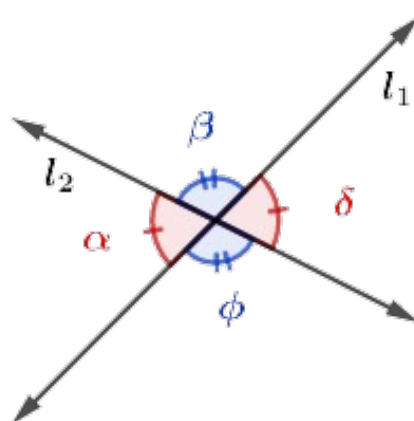


Definición 2.3.11: Ángulo opuestos por el vértice

Los ángulos opuestos por el vértice son aquellos que están opuestos entre sí, formados cuando se intersecan dos rectas.

En la figura 2.28, se muestra la representación geométrica de la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{l_1}$ y $\overleftrightarrow{l_2}$, generando los ángulos $\angle\beta$, $\angle\delta$, $\angle\phi$ y $\angle\alpha$, los cuales presentan magnitudes distintas. Como consecuencia, se verifica que $\angle\alpha = \angle\delta$ y $\angle\beta = \angle\phi$. Este hecho conlleva a la formación de ángulos opuestos, como se puede observar a continuación:

Figura 2.28: Ángulos opuestos por el vértice

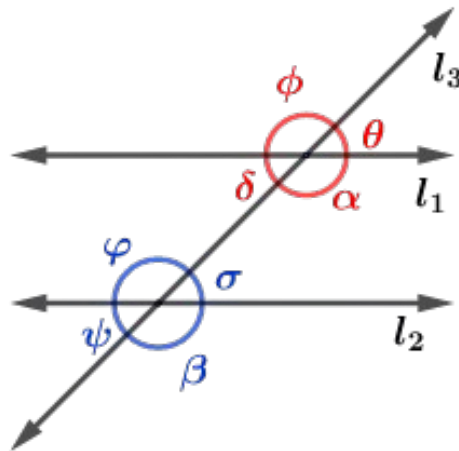


Ángulos formados por la intersección de una transversal en dos rectas paralelas

En la figura 2.29 se tiene la representación geométrica de dos rectas paralelas $\overleftrightarrow{l_1}$ y $\overleftrightarrow{l_2}$, intersectadas por la transversal $\overleftrightarrow{l_3}$, la cual divide los ángulos en diferentes magnitudes, como

se muestra a continuación:

Figura 2.29: Ángulos formados por intersección de una transversal



Los ángulos de la figura 2.29 cumplen ciertas características particulares, como se puede observar a continuación:

- a) Ángulo internos: $\sphericalangle\sigma$, $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\varphi$, $\sphericalangle\delta$
- b) Ángulo externos: $\sphericalangle\phi$, $\sphericalangle\theta$, $\sphericalangle\beta$, $\sphericalangle\psi$
- c) Ángulo alternos internos: $\sphericalangle\sigma$, $\sphericalangle\delta$ y $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\varphi$
- d) Ángulo alternos externos: $\sphericalangle\phi$, $\sphericalangle\beta$ y $\sphericalangle\theta$, $\sphericalangle\psi$
- e) Ángulos Correspondientes:

$$\sphericalangle\phi, \sphericalangle\varphi$$

$$\sphericalangle\theta, \sphericalangle\delta$$

$$\sphericalangle\sigma, \sphericalangle\psi$$

$$\sphericalangle\alpha, \sphericalangle\beta$$

2.4. Triángulos

Los triángulos son una de las figuras geométricas más simples pero a la vez muy versátiles. Se pueden encontrar en la naturaleza, en la arquitectura y en la ingeniería. Su uso se remonta

a la antigüedad y ha evolucionado a lo largo de los siglos, adaptándose a las necesidades de cada época y generando nuevos aportes a la matemática, con énfasis en la geometría.

Debido a su gran importancia y utilidad, en la actualidad se siguen utilizando en diferentes áreas de estudio. Una de las más relevantes es la educación, ya que permite a los estudiantes visualizar figuras en el entorno y asimilar conceptos básicos para el posterior desarrollo de las habilidades matemáticas.

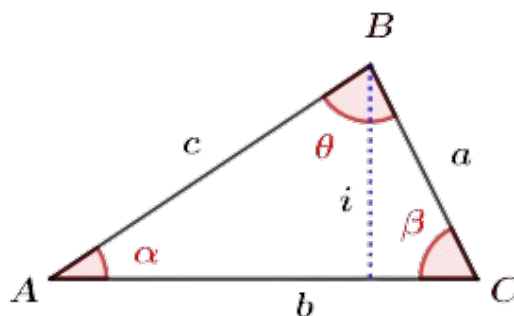
Debido a su importancia y versatilidad, los triángulos continúan siendo una figura crucial en múltiples campos de estudio en la actualidad. Uno de los ámbitos donde destaca significativamente es en el ámbito educativo, ya que permite a los estudiantes no solo visualizar figuras en su entorno, sino que además les permite interiorizar y comprender conceptos fundamentales. Esta comprensión inicial resulta crucial para el desarrollo posterior de habilidades matemáticas más complejas. Además, la comprensión y el aprendizaje de las diferentes propiedades relacionadas con los triángulos facilitará las destrezas en matemática, sentando bases sólidas para la resolución de problemas, resoluciones y estudios posteriores avanzados.

Definición 2.4.1: Triángulo

Si A, B y C son tres puntos no colineales, entonces la unión de los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} se denomina triángulo y se denota como $\triangle ABC$.

En la figura 2.30 se tiene la representación geométrica de un triángulo $\triangle ACB$, cuyos puntos no colineales son A, C y B . La unión de los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} define la forma del triángulo, como se puede observar a continuación:

Figura 2.30: Triángulo



Algunas características importantes del triángulo:

- Vértices: Son cada uno de los puntos A , B y C .
- Lados: Son los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CA} .
- La suma interna de sus ángulos, $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\theta = 180^\circ$.
- Su altura es i .
- Su base es \overline{AC} .

2.4.1. Clasificación de triángulos

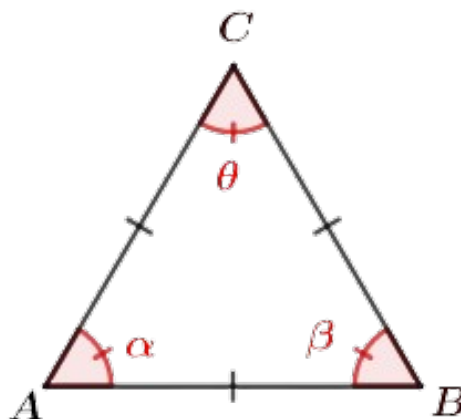
Clasificación de triángulos según sus lados

Definición 2.4.2: Triángulo equilátero

Es aquel que tiene tres lados iguales en longitud y, por lo tanto, sus ángulos internos también son iguales, midiendo cada uno 60° .

Como se ilustra en la figura 2.31 se tiene la representación geométrica del triángulo $\triangle ABC$, tal que sus tres lados \overline{AC} , \overline{CB} y \overline{BA} son de igual medida, y sus ángulos tiene la misma medida angular $\angle\theta = \angle\alpha = \angle\beta$, como se muestra a continuación:

Figura 2.31: Triángulo equilátero

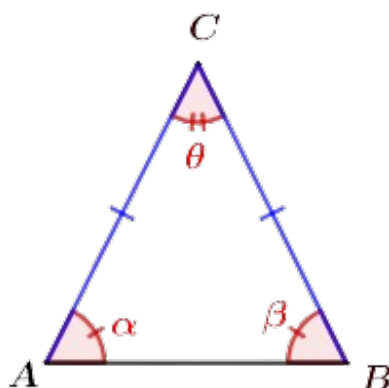


Definición 2.4.3: Triángulo isósceles

Es aquel que tiene al menos dos lados de igual longitud. Esto implica que dos de sus ángulos internos adyacentes a los lados iguales también serán iguales entre sí.

Como se ilustra en la figura 2.32 se tiene la representación geométrica de un triángulo isósceles $\triangle ABC$, caracterizado por la propiedad de tener dos de sus lados de igual longitud y dos ángulos de igual amplitud. En este caso, los lados \overline{AC} y \overline{BC} tienen la misma medida y los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$, tienen la misma amplitud como se muestra a continuación:

Figura 2.32: Triángulo isósceles

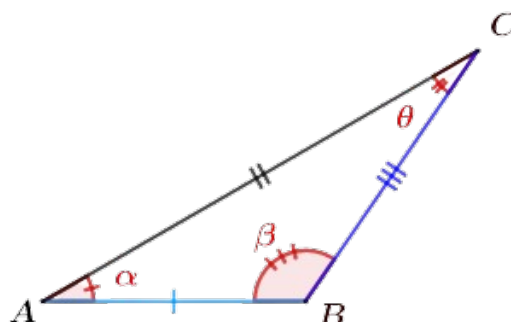


Definición 2.4.4: Triángulo escaleno

Es aquel en el que sus tres lados tienen longitudes diferentes entre sí. Además, sus ángulos internos también son diferentes en magnitud.

Como se ilustra en la figura 2.28 se tiene la representación geométrica de un triángulo escaleno $\triangle ABC$, cuya característica principal es que los tres lados tienen longitudes diferentes. En este caso, los lados $\overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$, presentan diferentes medidas, y sus ángulos $\angle\alpha \neq \angle\beta \neq \angle\theta$ también son de distinta magnitud, como se muestra a continuación:

Figura 2.33: Triángulo escaleno

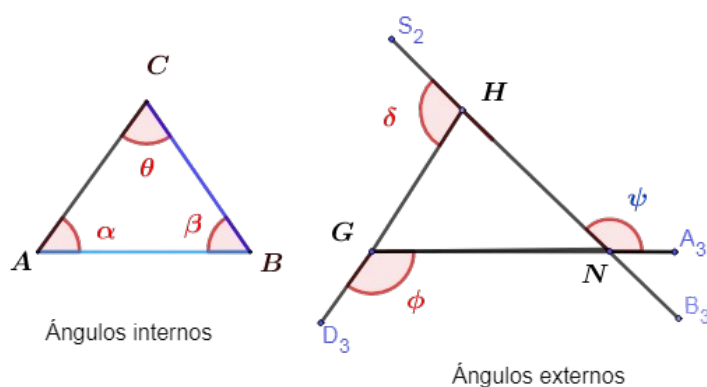


Clasificación de triángulos según sus ángulos

Teorema 2.4.1: Suma de ángulos de un triángulo

- La suma de los ángulos internos de un triángulo siempre es 180° .
En la figura 2.34 se tiene que $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\theta = 180^\circ$.
- La suma de los ángulos externos de un triángulo siempre es 360° .
En la figura 2.34 se tiene que $\angle\delta + \angle\phi + \angle\psi = 360^\circ$.
- La medida de un ángulo externo de un triángulo, es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes a él.

Figura 2.34: Ángulos de un Triángulo



Demostración:

La demostración del teorema se muestra en la página 31 (Calvache et al. 2003).

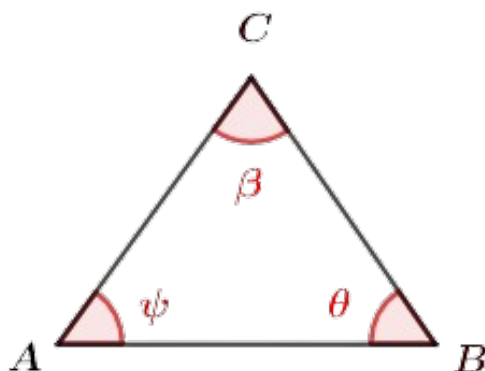


Definición 2.4.5: Triángulo acutángulo

El triángulos acutángulos tiene su tres ángulos internos menores a 90° grados.

En la figura 2.35 se tiene la representación geométrica de un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, donde, por definición, al ser acutángulo, implica que la medida de sus ángulos $\angle\psi$, $\angle\beta$ y $\angle\theta$ debe ser menor a 90° , como se muestra a continuación:

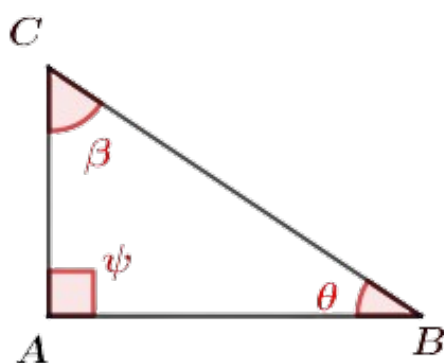
Figura 2.35: Triángulo acutángulo

**Definición 2.4.6: Triángulo rectángulo**

El triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo interior que es recto, es decir, mide 90° .

En la figura 2.36 se tiene la representación geométrica de un triángulo $\triangle ABC$, . Se observa un ángulo recto $\angle\psi$ en el vértice A . Los otros dos ángulos internos del triángulo, $\angle\theta$ y $\angle\beta$, se encuentran en los vértices C y B , respectivamente. Estos dos últimos ángulos suman 90° , lo que confirma que el triángulo es rectángulo, tal como se visualiza a continuación:

Figura 2.36: Triángulo rectángulo

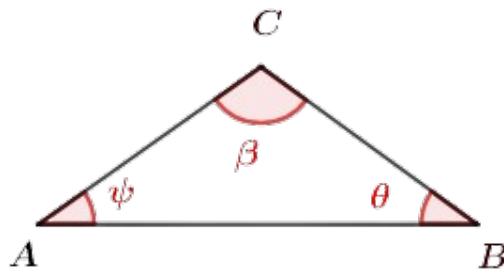
**Definición 2.4.7: Triángulo obtusángulo**

El triángulo obtusángulo es aquel donde uno de sus ángulos interiores es obtuso, es decir, mayor de 90° .

En la figura 2.37 se tiene la representación geométrica de un triángulo $\triangle ABC$ con un ángulo obtuso $\angle\beta$ en el vértice C . Este ángulo es mayor a 90° . Los otros dos ángulos internos del

triángulo, $\angle\theta$ y $\angle\psi$, se encuentran en los vértices A y B , respectivamente. Estos dos últimos ángulos son menores a 90° para que la suma de los tres ángulos internos del triángulo sea 180° , confirmando la presencia de un ángulo obtuso en el triángulo, tal como se muestra a continuación:

Figura 2.37: Triángulo obtusángulo



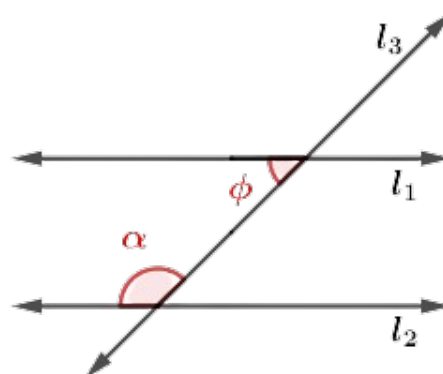
Notas 2.4.1

En un plano, dos rectas son cortadas por una transversal.

- Si al sumar sus ángulos internos formados del mismo lado es igual a 180° , entonces las dos rectas son paralelas.
- Si al sumar sus ángulos internos formados del mismo lado es diferente a 180° , entonces las dos rectas se van a intersectar en un punto.

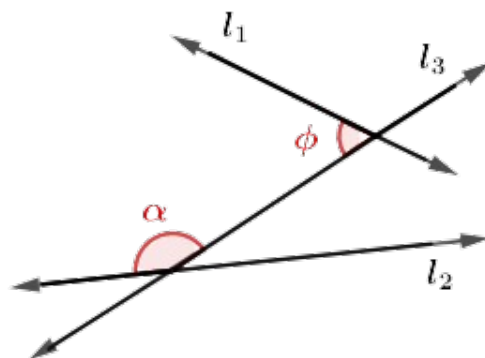
Notemos que por la nota a), y por la figura 2.38 se tiene que $\angle\alpha + \angle\phi = 180^\circ$, entonces $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$:

Figura 2.38: Dos rectas paralelas



Notemos que por la nota b), y en la figura 3.39 se tiene que $\angle\alpha + \angle\phi \neq 180^\circ$, entonces $\overleftrightarrow{l_1}$ y $\overleftrightarrow{l_2}$ se van a intersectar en un punto:

Figura 2.39: Dos rectas se van a intersectar en un punto



2.5. Congruencia de segmentos y ángulos

La geometría, como disciplina matemática, nos invita a explorar las propiedades fundamentales de las formas y figuras en el espacio. Entre los conceptos más esenciales se encuentran la congruencia de segmentos, ángulos y triángulos, los cuales forman la base de nuestro entendimiento geométrico. En este viaje, nos adentraremos en un análisis de cómo la igualdad y la correspondencia entre estas partes geométricas no solo revelan la estructura intrínseca de las figuras, sino que también nos proporcionan herramientas cruciales para resolver problemas y construir argumentos lógicos.

Comenzando con los segmentos, exploraremos las condiciones que hacen que dos segmentos sean congruentes. Desde la igualdad de longitudes hasta la superposición precisa de segmentos, descubriremos cómo estas relaciones geométricas básicas sientan las bases para la construcción y manipulación de figuras con precisión y exactitud.

Al sumergirnos en el mundo de los ángulos, nos enfrentaremos a la pregunta crucial de cuándo dos ángulos son congruentes. A través de teoremas y postulados, analizaremos las condiciones que preservan la igualdad angular, proporcionándonos las herramientas para comprender la disposición espacial de los ángulos y sus correspondencias.

El estudio de la congruencia de triángulos añade una dimensión adicional a nuestra exploración geométrica. Investigaremos cómo la igualdad entre lados y ángulos en triángulos lleva a la congruencia, y cómo esta propiedad es esencial para analizar y clasificar diferentes tipos de triángulos.

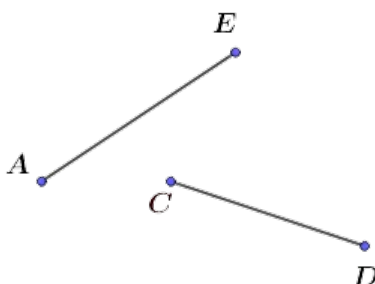
En última instancia, la congruencia de segmentos, ángulos y triángulos no solo nutre nuestras habilidades matemáticas, sino que también afianza nuestra capacidad para abordar problemas complejos de manera estructurada y lógica. Al comprender la igualdad entre estas partes fundamentales de las figuras, nos embarcamos en un viaje que nos permitirá desentrañar los misterios de la geometría y apreciar la belleza y la precisión que subyacen en cada forma y estructura en nuestro entorno.

Definición 2.5.1: Segmentos congruentes

Dos segmentos son congruentes, si tiene la misma longitud.

En la figura 2.40 se tiene la representación geométrica de dos segmentos congruentes \overline{AE} y \overline{CD} , como se muestra a continuación:

Figura 2.40: Segmentos congruentes



Su notación es:

$$\overline{AE} = \overline{CD}$$

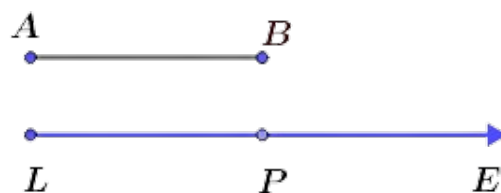
Axioma 2.5.1: Construcción de un segmento

Dado un segmento \overline{AB} y la semirrecta \overrightarrow{LE} , de origen L . Entonces existe en \overrightarrow{LE} un único punto P tal que:

$$\overline{AB} \cong \overline{LP}$$

En la figura 2.41 nos permite visualizar que, en términos prácticos, este axioma afirma la posibilidad de construir o transportar un segmento en una semirrecta, tal que por la semirrecta \overrightarrow{LE} , existe un punto P , de donde es congruente con un segmento \overline{AB} , así, $\overline{AB} \cong \overline{LP}$, tal como se ilustra a continuación:

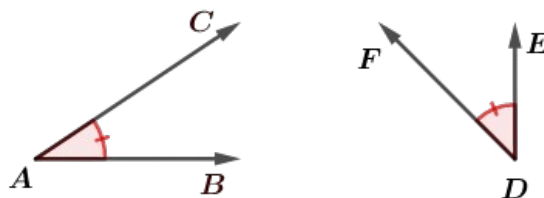
Figura 2.41: Axioma de la construcción de un segmento

**Definición 2.5.2: Ángulos congruentes**

Dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma medida angular.

En la figura 2.42 se muestra la representación geométrica de dos ángulos $\angle CAB$ y $\angle FDE$, formados por las semirrectas \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{DE} , \overrightarrow{DF} , donde $\angle CAB$ y $\angle FDE$ son congruentes, tal como se ilustra a continuación:

Figura 2.42: Ángulos congruentes



Su notación es:

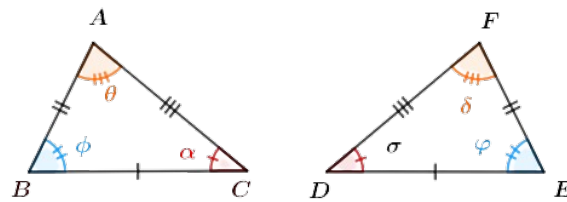
$$\angle CAB \cong \angle FDE$$

Definición 2.5.3: Triángulos congruentes

Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de uno de los triángulos y los del otro, de tal forma que los ángulos y lados correspondientes son congruentes.

En la figura 2.43 se muestra la representación geométrica de dos triángulos $\triangle CBA$ y $\triangle DLF$. En este caso, se cumple que los lados $\overline{BA} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{FD}$ y $\overline{BC} = \overline{DE}$, lo que indica que los triángulos son congruentes, tal como se puede observar a continuación:

Figura 2.43: Triángulos congruentes



Su notación es:

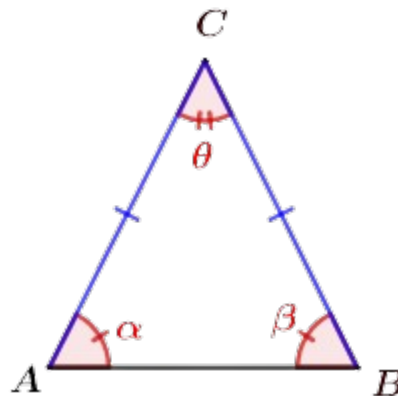
$$\triangle CBA \cong \triangle DEF$$

Teorema 2.5.1: Triángulo isósceles

Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces los ángulos opuestos a dichos lados tienen igual medida.

En la figura 2.44, se presenta la representación geométrica de un triángulo $\triangle ACB$. Se observa que los lados $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, y además, los ángulos $\angle\beta \cong \angle\alpha$, que son opuestos a dichos lados, tienen la misma medida. Por lo tanto, este triángulo cumple con la condición de ser un triángulo isósceles, como se ilustra a continuación:

Figura 2.44: Triángulo isósceles



Demostración:

Sea L el punto medio del segmento \overline{AC} , como se muestra en la Figura 2.44. Por lo tanto, tenemos el segmento \overline{BL} . Dado que L es el punto medio, podemos afirmar que $\overline{AL} \cong \overline{LC}$. Además, según la hipótesis inicial, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, y el lado común entre los dos triángulos es \overline{BL} .

Continuación de la demostración:

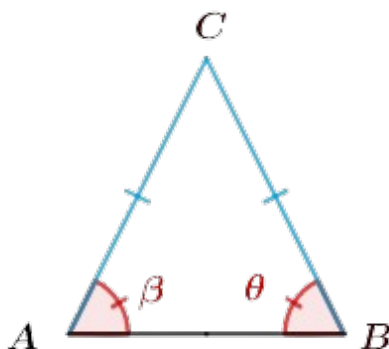
Por ende podemos aplicar el teorema del criterio (L-L-L). Por lo tanto, concluimos que los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son congruentes.

**Observación 2.5.1**

El recíproco también es cierto, es decir, si tengo un triángulo que tiene dos ángulos interiores de igual medida, entonces los lados opuestos tienen igual longitud.

Como se ilustra en la figura 2.45 se tiene la representación geométrica de un triángulo $\triangle ABC$ en el cual los ángulos $\angle\theta$ y $\angle\beta$ son congruentes. Haciendo uso de esta observación, podemos deducir que los lados $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, como se muestra a continuación:

Figura 2.45: Triángulo isósceles con dos ángulos congruentes



Por la figura 2.45 se tiene que:

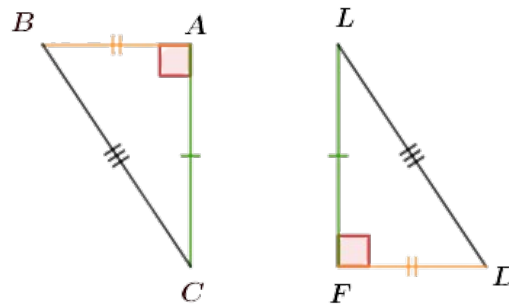
$$\angle CAB \cong \angle CBA, \text{ entonces } \overline{AC} \cong \overline{BC}$$

Teorema 2.5.2: Congruencia de triángulos rectángulos

Si dos triángulos rectángulos tienen sus hipotenusas y un cateto de igual longitud respectivamente, entonces dichos triángulos son congruentes.

En la figura 2.46 se ilustra la representación geométrica de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle FDE$. Se verifica que $\angle BAC = \angle DFE = 90^\circ$, junto con $\overline{CB} = \overline{DE}$ y $\overline{AC} = \overline{FE}$, tal como se muestra a continuación:

Figura 2.46: Dos triángulos rectángulos congruentes

**Demostración:**

La demostración del teorema 2.5.2, se muestra en la página 13 (Orihuela y Sáez, 2010). ■

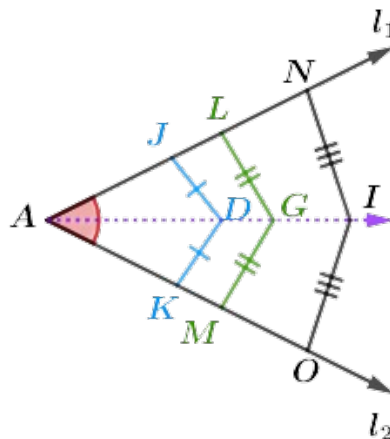
2.5.1. Ángulos congruentes

Teorema 2.5.3: De la bisectriz del ángulo

Si un conjunto de puntos están en la región interior de un ángulo y equidistan de los lados del ángulo, entonces dichos puntos están en la bisectriz el ángulo dado.

En la figura 2.47 se tiene la representación geométrica de un ángulo $\angle A$, si trazamos una bisectriz se tiene que $JD = DK$, $LG = GM$ y $NI = IO$, entonces los puntos D , G y I están en la bisectriz del $\angle A$.

Figura 2.47: Teorema de la bisectriz del ángulo



Demostración:

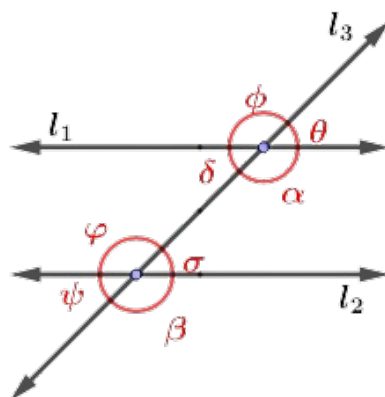
La demostración del teorema, se muestra en la página 20 del libro de (Orihuela y Sáez, 2010)

**Teorema 2.5.4: Ángulos opuestos por el vértice**

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

En figura 2.48 se tiene la representación geométrica de dos rectas paralelas l_1 y l_2 , atravesada por una transversal l_3 , formando así los ángulos opuestos, $\sphericalangle\phi \cong \sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\delta \cong \sphericalangle\theta$ y $\sphericalangle\varphi \cong \sphericalangle\beta$, $\sphericalangle\psi \cong \sphericalangle\sigma$, tal como se puede visualizar a continuación:

Figura 2.48: Ángulos congruentes opuestos por el vértice

**Demostración:**

Sean dos rectas l_1 y l_2 que tienen como intersección un punto. Tomando l_1 , tenemos que la suma de los ángulos $\sphericalangle\delta + \sphericalangle\alpha = 180^\circ$. Siguiendo la misma analogía con l_3 , tenemos que $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\theta = 180^\circ$.

Por tanto, tomando la igualdad tanto de l_1 como de l_2 :

$$\sphericalangle\delta + \sphericalangle\alpha = 180^\circ$$

$$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\theta = 180^\circ$$

$$\sphericalangle\delta + \sphericalangle\alpha = \sphericalangle\alpha + \sphericalangle\theta$$

Continuación de la demostración:

$$\angle\delta + \angle\alpha - \angle\alpha = \angle\theta$$

$$\angle\delta = \angle\theta$$

$$\angle\delta \cong \angle\theta$$

Por tanto hemos demostrado que $\angle\delta \cong \angle\theta$.

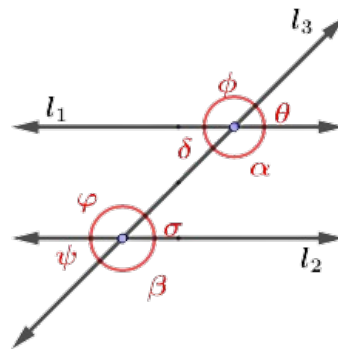
De manera similar para el resto de ángulos

**Teorema 2.5.5: Ángulos alternos internos son congruentes**

Los ángulos alternos internos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal son congruentes.

En la figura 2.49 se tiene la representación geométrica de las rectas paralelas l_1 y l_2 , la cual está atravesada por una recta transversal l_3 , formando así los ángulos alternos internos, $\angle\delta \cong \angle\sigma$ y $\angle\varphi \cong \angle\alpha$, tal como se puede visualizar a continuación:

Figura 2.49: Los ángulos alternos internos congruentes

**Demostración:**

Sean l_1, l_2 son paralelas y l_3 es una transversal la cual cruza por l_1, l_2 . Tomando la definición de ángulos alternos internos, tenemos que $\angle\varphi + \angle\delta = 180^\circ$. Por otro lado, $\angle\varphi + \angle\sigma = 180^\circ$. Tomando la igualdad tenemos que.

Continuación de la demostración:

$$\angle\varphi + \angle\delta = 180^\circ$$

$$\angle\varphi + \angle\sigma = 180^\circ$$

$$\angle\varphi + \angle\delta = \angle\varphi + \angle\sigma$$

$$\angle\varphi + \angle\delta - \angle\varphi = \angle\sigma$$

$$\angle\delta = \angle\sigma$$

$$\angle\delta \cong \angle\sigma$$

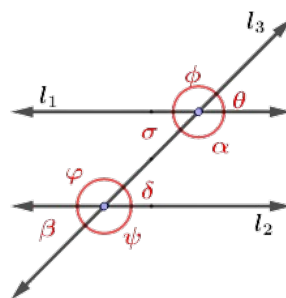
Por tanto, hemos demostrado que $\angle\sigma \cong \angle\delta$.

Con la misma analogía para el resto de ángulos internos .

**Teorema 2.5.6: Ángulos alternos externos son congruentes**

Los ángulos alternos internos, formados en dos rectas paralelas cortadas por una transversal, son congruentes.

Figura 2.50: Los ángulos alternos externos congruentes

**Demostración:**

Visualizando la gráfica 2.50 tenemos que que:

$$\angle\phi + \angle\sigma = 180^\circ$$

$$\angle\delta + \angle\psi = 180^\circ$$

Continuación de la demostración:

$$\angle\phi + \angle\sigma = \angle\delta + \angle\psi$$

$$\angle\sigma = \angle\delta$$

$$\angle\phi = \angle\psi$$

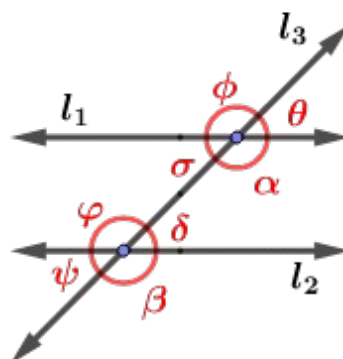
Por tanto $\angle\phi \cong \angle\psi$

**Teorema 2.5.7: Ángulos correspondientes son congruentes**

Los ángulos correspondientes, formados en dos rectas paralelas cortadas por una transversal, son congruentes.

En la figura 2.51 se tiene la representación geométrica de dos rectas paralelas l_1 y l_2 , las cuales son intersecadas por una transversal l_3 , donde se pueden visualizar los ángulos, tal como se puede visualizar a continuación:

Figura 2.51: Ángulos correspondientes son congruentes



Demostración:

Tomando la definición de ángulos alternos externos se tiene que:

$$\angle\phi = \angle\beta$$

De manera similar, tenemos que:

$$\angle\varphi = \angle\beta$$

Por tanto, concluimos que $\angle\psi \cong \angle\varphi$.



2.5.2. Proporcionalidad de segmentos

En esta sección daremos algunas definiciones previas sobre la comparación de segmentos, para su posterior uso en algunos teoremas geométricos requeridos.

Definición 2.5.4: Razón geométrica de dos segmentos

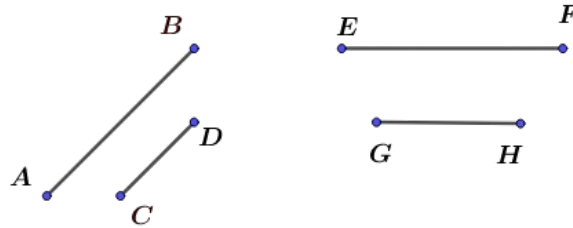
Se llama razón geométrica o relación de dos cantidades al cociente que resulta de dividir la primera entre la segunda. La razón entre a y b es: $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$

Como se muestra en la figura 2.52 la razón de los segmentos \overline{AB} y \overline{CD} es $\frac{AB}{CD}$.

Con la misma analogía, tenemos que la razón entre los segmentos de \overline{EF} y \overline{GH} es $\frac{x}{y}$, tal que $y \neq 0$.

De donde se lee que \overline{EF} es como x y \overline{GH} como y , o también podemos decir que $x(\overline{EF}) = y(\overline{GH})$.

Figura 2.52: Razón de dos segmentos



Algunas propiedades de las proporciones:

- a) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $a \cdot d = bc$
- b) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- c) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
- d) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
- e) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{m}{n} = \frac{a+c+e+\dots+m}{b+d+f+\dots+n}$

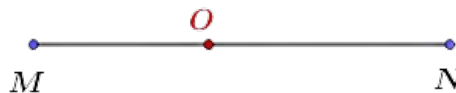
2.5.3. División de segmentos

Definición 2.5.5: División interna

Si un punto está entre los extremos de un segmento, se dice que lo divide internamente.

Como se puede visualizar en la figura 2.53 se tiene la representación geométrica el punto O divide internamente al segmento \overline{MN} en la razón $\frac{MO}{ON}$ y O divide \overline{NM} en la razón $\frac{NO}{OM}$, tal como se muestra a continuación:

Figura 2.53: División interna de segmentos

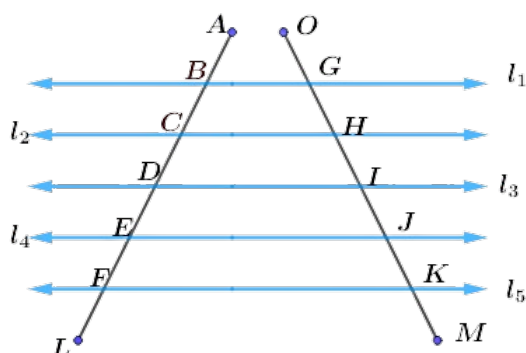


Teorema 2.5.8: Fundamental de la proporcionalidad

Si tres o más rectas paralelas determinan sobre una secante segmentos congruentes, también determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante.

Como se puede visualizar en la figura 2.54, se tiene la representación geométrica de las rectas $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4 \parallel l_5$ y de los segmentos $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$. En consecuencia, se establece la igualdad de los segmentos $\overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IJ} = \overline{JK}$.

Figura 2.54: Rectas equiparalelas

**Demostración:**

Sea l_1, l_2, l_3 tres rectas paralelas al que intersecan a la secante \overline{AL} , entonces los segmentos \overline{BC} y \overline{CD} son congruentes. Análogamente para la secante \overline{OM} , entonces tenemos que los segmentos \overline{GH} y \overline{HI} son congruentes. Por tanto, por propiedades de rectas paralelas, esto se va a cumplir para cualquier paralela en cualquier secante. ■

2.6. Teorema de Thales

Thales nació alrededor del 640 A.C. en Mileto, una de las primeras ciudades griegas en la costa del mar Egeo. En esa época, Mileto destacaba por ser una de las más prósperas y avanzadas en la región de Asia Menor (actual Turquía). Considerado como uno de los siete sabios de Grecia, Thales se destacó en filosofía, astronomía y geometría. Sus teoremas geométricos dan a entender el concepto de demostración, marcando el inicio de la organización matemática, en el trayecto de de aportar hacia las matemática viajó a Egipto en busca de fortalecer sus conocimientos matemáticos y se dice que ideó un método para calcular la altura de la pirámide

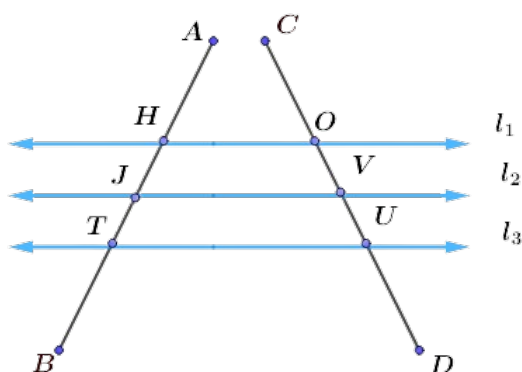
de Keops por semejanza, empleando la medición de sombras. Al establecer la proporción entre segmentos determinados por líneas paralelas en otra recta, Tales propició el desarrollo del teorema que lleva su nombre.

Teorema 2.6.1: General de Tales

Si dos rectas cualesquiera son intersecadas por un conjunto de rectas paralelas, entonces sobre dicha recta se determinan segmentos proporcionales.

Por la figura 2.55 se tiene una representación geométrica de dos segmentos \overline{AB} y \overline{CD} , los cuales intersectan a las rectas paralelas l_1, l_2 y l_3 . Estas intersecciones determinan segmentos proporcionales, es decir, $\frac{\overline{HJ}}{\overline{JT}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{VU}}$, tal como se muestra a continuación:

Figura 2.55: Teorema Tales



Demostración:

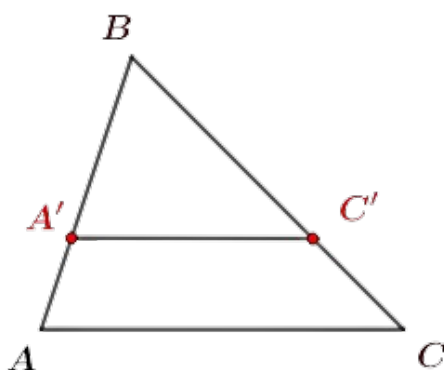
Sea l_1, l_2, l_3 rectas paralelas y $\overline{AB}, \overline{CD}$ segmentos transversales que cortan a las rectas, así las tres rectas paralelas que son intersecadas por el segmento \overline{AB} los cuales generan los segmentos \overline{HJ} y \overline{JT} , con la misma analogía para el segmento \overline{CD} , las cuales son atravesadas por las mismas rectas paralelas, y así forman los segmentos \overline{OV} y \overline{VU} , en el segmento \overline{HJ} dividimos en n partes iguales, y en el segmento \overline{VU} dividimos en m partes iguales, por definición de segmentos proporcionales tenemos que $\frac{\overline{HJ}}{\overline{JT}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{VU}}$ ■

Nota 2.6.1

Dado un triángulo $\triangle ABC$, si se traza un segmento paralelo, $A'C'$ a uno de los lados del triángulo $\triangle AB'C'$, cuyos lados son proporcionales a los del triángulo $\triangle ABC$.

Por la figura 2.56, se tiene la representación geométrica de un triángulo $\triangle ACB$. A partir de este triángulo, trazamos un segmento paralelo $\overline{A'C'}$ al lado \overline{AC} . Como resultado, obtenemos que $\frac{AB}{A'A} = \frac{BC}{C'C} = \frac{AC}{A'C'}$, tal como se muestra a continuación:

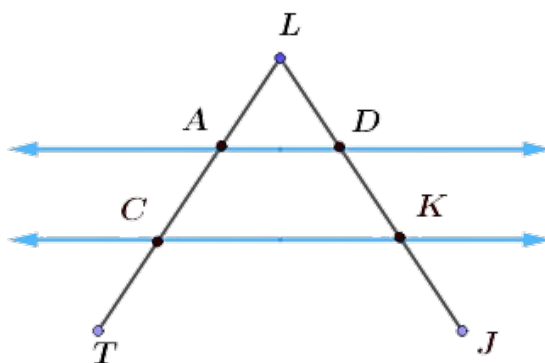
Figura 2.56: Nota del teorema de Tales

**Corolario 2.6.1**

Si $\overline{AD} \parallel \overline{CK}$, entonces $\frac{\overline{LA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{LD}}{\overline{DK}}$

Como se ilustra en la figura 2.57, tenemos la representación geométrica de dos rectas paralelas l_1 y l_2 , atravesadas por los segmentos transversales \overline{TL} y \overline{JL} , los cuales se intersecan en el punto L . En esta disposición, se cumple la relación $\frac{\overline{LA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{LD}}{\overline{DK}}$, como se aprecia a continuación:

Figura 2.57: Corolario de segmentos

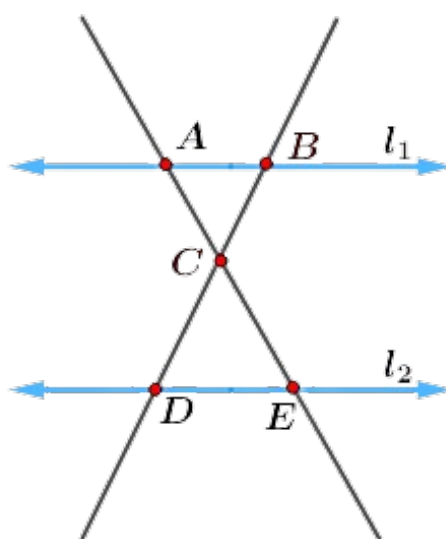


Corolario 2.6.2

Si $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, entonces $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$

Como se ilustra en la figura 2.58, se tiene la representación geométrica de dos rectas paralelas l_1 y l_2 , las cuales son atravesadas por dos segmentos transversales \overline{AE} y \overline{BD} , y estos cortan en el punto C . En esta disposición, se cumple la relación $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$, como se muestra a continuación:

Figura 2.58: Corolario

**Observación 2.6.1**

Debemos tener en cuenta que los corolarios son recíprocos, por tanto se pueden aplicar al triángulo en distinta ubicación.

Teorema 2.6.2: Bisectriz interior de un triángulo

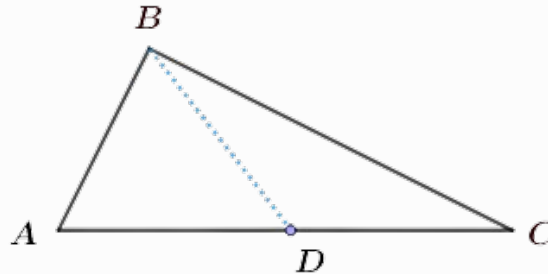
En todo triángulo la bisectriz interior, divide internamente al lado al cual es relativo en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.

Demostración:

Sea el triángulo $\triangle ABC$, por el cual trazamos una bisectriz \overline{BD} a dicho triángulo, como se puede visualizar en la figura 2.59.

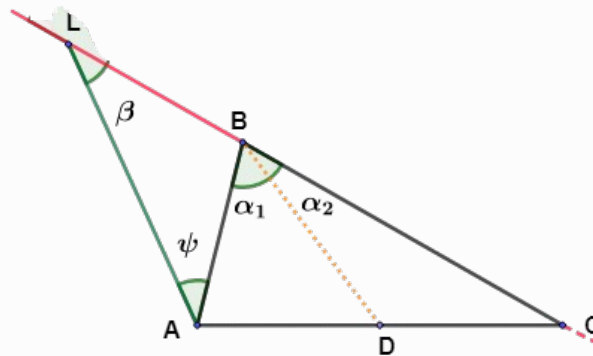
Continuación de la demostración:

Figura 2.59: Bisectriz interna



Ahora prolongamos el segmento \overline{BC} , además trazamos un segmento que pasa por el punto A y es paralelo al segmento \overline{BD} , así por la intersección obtenemos el punto L, como se muestra en la figura 2.57.

Figura 2.60: Bisectriz interna de un triángulo



Por tanto $\overline{LA} \parallel \overline{BD}$, ahora bien demostrar que el $\triangle BAL$ es un triángulo isósceles, como tenemos que los segmentos \overline{LA} y \overline{BD} son paralelos tenemos que los ángulos $\angle\alpha_1$ y $\angle\beta$ son congruentes por definición de ángulos correspondientes, además $\angle\alpha_2$ y $\angle\psi$, también son congruentes por al definición de ángulos alternos internos de manera que tenemos que:

$$\angle\alpha_1 = \angle\alpha_1 = \angle\beta = \angle\psi \quad .$$

Continuación de la demostración:

Así tomando el triángulo $\triangle BAL$, posee los ángulos congruentes, así los segmentos \overline{LB} y \overline{BA} son congruentes, así obtenemos que el $\triangle BAL$ es isósceles por tanto se tiene la igualdad de

$$\overline{LB} = \overline{BA} \quad .$$

Ahora por teorema de Tales en el triángulo $\triangle ACL$, y tomando en cuenta los segmentos paralelos tenemos que,

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \quad .$$

Sustituyendo $\overline{LB} = \overline{BA}$ tenemos.

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \quad .$$

**Teorema 2.6.3: La bisectriz exterior en un triángulo.**

En todo triángulo, la bisectriz exterior (con los lados adyacentes de diferente longitud) divide externamente al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.

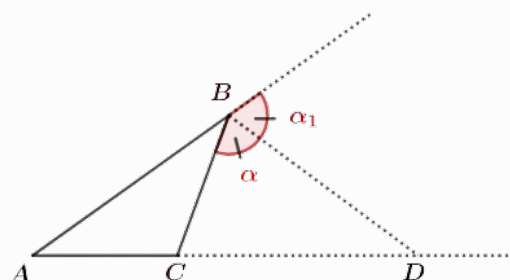
Demostración:

Sea el triángulo ABC , en el cual se traza una bisectriz de segmento \overline{BD} extendiéndola hacia la prolongación del lado \overline{AC} como se muestra en la figura 2.61.

Además se traza una recta paralela al lado \overline{AB} , dicha recta paralela pasa por el punto C como se muestra en la gráfica 2,61.

Continuación de la demostración:

Figura 2.61: La Bisectriz Exterior en un triángulo



Por tanto como los segmentos $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$, además estas paralelas están intersecadas por una transversal de segmento \overline{BD} , por propiedades de ángulos alternos internos tenemos un triángulo $\triangle BCF$, y además, es isósceles por ende tenemos que los segmentos \overline{CB} y \overline{CF} , nuevamente tenemos que si tomamos las rectas paralelas ya antes mencionadas pero esta vez con el segmento transversal \overline{AC} pose ángulos correspondientes que son, $\angle BAC$ y $\angle FCD$, además tenemos que $\angle ABF \cong \angle CFD$, por el teorema 4.2.2 tenemos $\frac{\overline{DF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}}$, por la definición 4,2,1 y el teorema 2,9,1, tomando el teorema 4,2,2 se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\overline{DF}}{\overline{FB}} &= \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CF}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} &= \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \end{aligned}$$

■

Teorema 2.6.4: Del incentro

Todo triángulo de incentro divide internamente a una bisectriz interior (la razón es de mayor y menor segmento) en segmentos proporcionales a la suma de longitudes de los lados adyacentes a la bisectriz y la longitud del tercer lado.

Demostración:

La demostración del teorema se muestra en la página 13 de (Orihuela y Sáez, 2010)

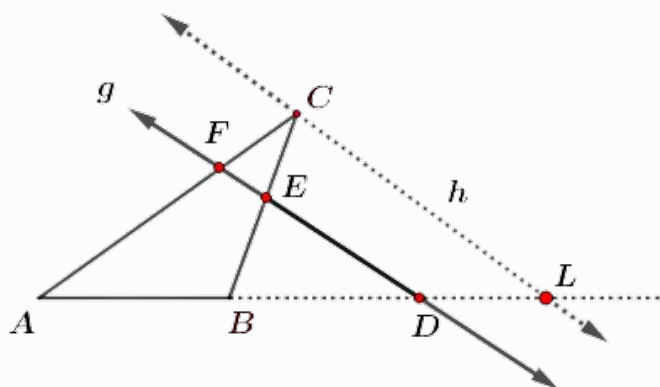
**Teorema 2.6.5: De menelao**

Toda recta secante a dos lados de un triángulo y a la prolongación del tercer lado, determina seis segmentos, cumpliéndose que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremos comunes es igual al producto de las longitudes de las otras tres.

Demostración:

Sea el triángulo $\triangle ABC$ con la recta secante \overleftrightarrow{g} , además, se traza una recta paralela \overleftrightarrow{h} a \overleftrightarrow{g} como se muestra a continuación:

Figura 2.62: Teorema de menelao



como $\overline{CL} \parallel \overleftrightarrow{g}$, y el punto L pertenece a la extensión de lado \overline{AB} , usando el teorema de Tales en el triángulo $\triangle ALC$ tenemos que, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{DL}}$ (1), de manera análoga para el triángulo $\triangle BCL$, tal que, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{LD}}$ (2), así de (1) y (2) tenemos:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DL}} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{DB}}$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{AL}} = 1$$

**Definición 2.6.1: Ceviana de un triángulo**

Ceviana es un segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el lado opuesto a este.

Teorema 2.6.6: De ceva

En un triángulo al trazar tres cevianas concurrentes, determinan en cada lado segmentos, cumpliéndose que el producto de las longitudes de tres de ellos, sin extremos comunes, es igual al producto de las longitudes de los otros tres.

Demostración:

La demostración del teorema se muestra en la página 17 de (Orihuela y Sáez, 2010)

Teorema 2.6.7: Lado - lado - ángulo mayor

Si dos triángulos tienen dos lados de igual longitud respectivamente y el ángulo opuesto al mayor de dicho lado de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

Demostración:

La demostración del teorema se muestra en la página 14 de (Orihuela y Sáez, 2010). ■

2.6.1. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo**Teorema 2.6.8**

Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, entonces:

- a) Los dos nuevos triángulos que se originan son semejantes entre sí y semejantes al triángulo inicial.
- b) La altura es media proporcional entre los segmentos que determina en la hipotenusa.
- c) Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre esta.

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, con el ángulo recto en $\angle C$, además, \overline{CF} es la altura asociada a la hipotenusa.

a) Si $\triangle ACF \sim \triangle ACB$ caso (A-A), por tanto el $\angle A$ es común en los triángulos.

$\triangle BCF \sim \triangle ACB$ por tanto el $\angle B$ es común en los triángulos, por transitividad $\triangle ACF \sim \triangle BCF$.

b) Por la demostración del literal a) se tiene, que, $\frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FB}}$ esto es $\overline{CF}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{FB}$.

c) Por el literal a) se tiene que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$$

esto es, $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AF}$.

Del literal b) se tiene

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}}$$

esto es $\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BF}$.

**Teorema 2.6.9: De Pitágoras**

El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Demostración:

La demostración del teorema 2.6.9, se muestra en la página 20 (Orihuela y Sáez, 2010)

Teorema 2.6.10: Recíproco del teorema de pitágoras

Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

2.6.2. Relaciones métricas en triángulos no rectángulos

Teorema 2.6.11

En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

Teorema 2.6.12

En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

Demostración:

La demostración del teorema 2.6.12 se muestra en la página 26 (Orihuela y Sáez, 2010)

Teorema 2.6.13

En el $\triangle ABC$, $D \in \overline{BC}$. Si $BD = m$, $DC = n$, $AD = d$ entonces $d^2a = b^2m + c^2n - amn$

Demostración:

La demostración del teorema 2.6.13 y de sus caso se muestra en la página 23 (Orihuela y Sáez, 2010)

Capítulo 3

Demostración de criterios de congruencia y semejanza de triángulos mediante la aplicación del método de Van Hiele

“La vida está llena de sorpresas, enfrenta tus miedos y lucha por tus sueños”

Lopez.A

La geometría, en su estudio de las figuras y sus propiedades, se sumerge en conceptos fundamentales como la semejanza y la congruencia de triángulos, constituye un pilar fundamental en la geometría, revelando las relaciones intrínsecas entre formas geométricas y sus propiedades. Este próximo capítulo se sumerge en estos conceptos, destacando la aplicación del método de van Hiele en las demostraciones geométricas. La semejanza y la congruencia son conceptos esenciales que permiten identificar similitudes y equivalencias entre triángulos, ofreciendo herramientas para comprender cómo las propiedades de sus lados y ángulos establecen relaciones específicas. En este contexto, el método de van Hiele ofrece un enfoque educativo estructurado en diferentes niveles de comprensión, desde la percepción más básica hasta el razonamiento deductivo más complejo.

En este próximo capítulo, se utilizará el método de van Hiele para abordar las demostraciones relacionadas con la semejanza y congruencia de triángulos. Este método educativo propone una progresión cognitiva que comienza con la identificación y el reconocimiento de las formas geométricas, avanza hacia la descripción de sus propiedades y relaciones, y finalmente llega

a la abstracción y deducción lógica.

La metodología de van Hiele promueve un aprendizaje activo y profundo, alentando a los estudiantes a comprender no solo las reglas y teoremas geométricos, sino también los fundamentos subyacentes que explican por qué estas proposiciones son ciertas. Al emplear este enfoque en las demostraciones de semejanza y congruencia de triángulos, se busca desarrollar una comprensión más completa y significativa, permitiendo a los estudiantes no solo verificar la validez de las afirmaciones geométricas, sino también comprender la lógica detrás de ellas.

El próximo capítulo se basará en el método de van Hiele como herramienta principal para explorar y demostrar las propiedades de semejanza y congruencia de triángulos, promoviendo un enfoque que busca impulsar una comprensión profunda y potenciar las habilidades de razonamiento en el ámbito geométrico. En el contexto educativo de la geometría, este enfoque integral no solo se limitará a enseñar teoremas y propiedades específicas de las figuras geométricas, sino que también se enfocará en ilustrar cómo estas propiedades están interrelacionadas, su aplicación en diversos contextos y su contribución al entendimiento global de la geometría.

3.1. Congruencia de triángulos

La congruencia de triángulos es un pilar fundamental en la geometría, permitiendo establecer condiciones precisas bajo las cuales dos triángulos son considerados iguales en forma y tamaño. Para determinar esta igualdad geométrica, existen varios criterios que, a lo largo de la historia, han sido descubiertos, demostrados y utilizados en una variedad de contextos matemáticos y aplicaciones prácticas.

En esta investigación, nos adentraremos en los criterios de congruencia de triángulos, explorando detalladamente los diferentes enfoques y métodos para determinar si dos triángulos son congruentes entre sí. Este estudio es esencial para comprender cómo los matemáticos han desarrollado reglas y principios que simplifican la identificación de la congruencia entre triángulos en diversas situaciones geométricas.

El análisis de los criterios de congruencia de triángulos se convierte en un punto clave para resolver problemas geométricos y para fundamentar demostraciones matemáticas en un

amplio espectro de disciplinas. Estos criterios, que incluyen combinaciones de medidas de lados y ángulos, así como otras propiedades fundamentales, permiten establecer la igualdad de triángulos en diferentes contextos y con diferentes grados de información.

Durante siglos, matemáticos de diferentes culturas y épocas han contribuido al desarrollo y refinamiento de estos criterios, proponiendo teoremas, leyes y métodos que han enriquecido nuestra comprensión de la congruencia de triángulos, los cuales permitirá ir desarrollando un pensamiento crítico.

3.1.1. Criterios de congruencia de triángulos

Los criterios de congruencia de triángulos desempeñan un papel importante en el estudio de la geometría, ya que son el medio mediante el cual se establecen condiciones necesarias para demostrar si dos triángulos son iguales. Además, estos postulados se basan en conceptos y propiedades geométricas, lo cual ayuda al desarrollo abstracto de los estudiantes para resolver problemas planteados.

Definición 3.1.1: Triángulos congruentes

Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de uno de los triángulos y los del otro, de tal forma que los ángulos y lados correspondientes son congruentes.

Nota 3.1.1

En este capítulo, las demostraciones se abordarán utilizando los cinco niveles de aprendizaje del método Van Hiele.

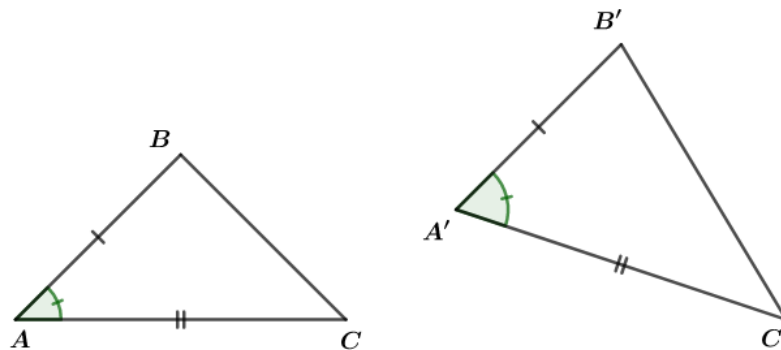
Criterio 3.1.1: Lado, ángulo, lado, denotado (L-A-L)

Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en uno de los triángulos, son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en el otro triángulo.

1.- Visualización:

La figura 3.1 muestra la representación geométrica de dos triángulos $\triangle ACB$ y $\triangle A'C'B$, de los cuales se desprenden ciertas propiedades como, ángulos congruentes y lados congruentes.

Figura 3.1: Triángulos



Nivel 2.- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades de que se observó en la figura que son:

- Los lados \overline{AB} y $\overline{A'B'}$ son congruentes, lo que significa que tiene la misma medida de longitud.
- Los lados \overline{AC} y $\overline{A'C'}$ son congruentes, lo que significa que tiene la misma medida de longitud..
- Los ángulos $\angle A$ y $\angle A'$ son congruentes, lo que significa que pose la misma medida angular .

Nivel 3.- Abstracción

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también congruente. En general, si dos triángulos tiene dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también congruente , entonces los triángulos son congruentes.

Nivel 4.- Deducción formal:

Por los aportes que realiza los niveles 1, 2 y 3 contribuyen significativamente al abordaje de la demostración. Si consideramos que los lados $\overline{AB} \cong \overline{LI}$ y $\overline{AC} \cong \overline{NI}$ son congruentes, además de los ángulos $\angle \theta$ y $\angle \alpha$, que también lo son, resulta crucial resaltar que el lado $\overline{AC} \cong \overline{B'C'}$. Esto es fundamental para aplicar el criterio de congruencia de triángulos Lado-Lado-Lado (L-L-L) y asegurar la congruencia entre los triángulos.

Nivel 5.- Rigor:**Demostración:**

Sean $\triangle CAB$ y $\triangle C'A'B'$ dos triángulos como se observa en la figura 3.1, tal que, cumplen las siguientes condiciones:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

$$\angle A \cong \angle A'.$$

Ahora supongamos que $\overline{BC} \neq \overline{B'C'}$, de tenemos los siguientes casos:

- Caso 1

Si $\overline{BC} > \overline{B'C'}$, entonces $\angle A \neq \angle A'$, es una contradicción por hipótesis.

- Caso 2

Si $\overline{BC} < \overline{B'C'}$, entonces $\angle A \neq \angle A'$, es una contradicción por hipótesis.

Por tanto $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, así se tiene que $\triangle CAB \cong \triangle C'A'B'$

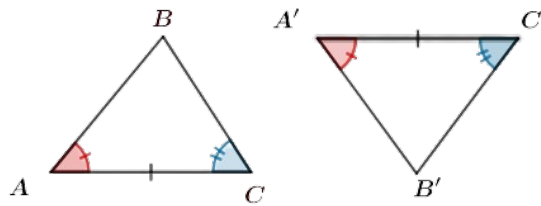
**Criterio 3.1.2: Ángulo, lado, ángulo, denotado (A-L-A)**

Dos triángulos son congruentes cuando uno de sus lados y sus dos ángulos adyacentes a ese lado de uno de los triángulos son respectivamente congruentes con el lado y sus ángulos adyacentes del otro triángulo.

Nivel 1.- Visualización:

En la figura 3.2 se muestra la representación geométrica de dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$. Estos triángulos comparten la característica de tener dos ángulos congruentes y un lado congruente.

Figura 3.2: Triángulos congruentes con el criterio de (A-L-A)



Nivel 2.- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.2 por ende las propiedades son:

- El segmento \overline{AC} es congruente con el segmento $\overline{A'C'}$, lo que significa que ambos tienen la misma medida de longitud.
- Los ángulos $\angle A \cong \angle A'$, y $\angle C \cong \angle C'$, lo que significa que ambos tienen la misma medida angular.

Nivel 3.- Abstracción

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con dos ángulos congruentes y el lado comprendido entre ellos también congruente. En general, si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes y el lado comprendido entre ellos también congruente, entonces los triángulos son congruentes.

Nivel 4.- Deducción formal

Basándonos en los aportes realizados en los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: si los lados \overline{AC} y $\overline{A'C'}$ son congruentes, y los ángulos correspondientes $\angle A$ y $\angle A'$, así como $\angle C$ y $\angle C'$, son congruentes, podemos hacer uso del criterio de congruencia de triángulos Ángulo, lado, ángulo (A-L-A), entonces así garantizamos que los dos triángulos son congruentes.

Nivel 5.- Rigor

Demostración:

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, dos triángulos como se muestra en la figura 3.2, de donde se tiene que:

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$

$$\angle A \cong \angle A'$$

$$\angle C \cong \angle C'.$$

Ahora supongamos que $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \neq \overline{B'C'}$, por tanto se tiene los siguientes casos:

- Caso 1

Si $\overline{AB} > \overline{A'B'}$, lo que implica que, $\angle C \neq \angle C'$, y esto es una contradicción por hipótesis.

Si $\overline{AB} < \overline{A'B'}$, lo que implica que, $\angle C \neq \angle C'$, y esto es una contradicción por hipótesis.

- Caso 2

si $\overline{BC} > \overline{B'C'}$, lo que implica que, $\angle A \neq \angle A'$, y esto es una contradicción por hipótesis.

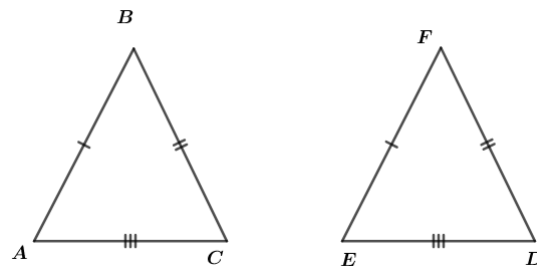
si $\overline{BC} < \overline{B'C'}$, lo que implica que, $\angle A \neq \angle A'$, y esto es una contradicción por hipótesis.

Por tanto se tiene que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, así se tiene que $\triangle ACB \cong \triangle A'C'B'$


Criterio 3.1.3: Lado, lado, lado, denotado (L-L-L)

Dos triángulos son congruentes cuando tienen los tres lados iguales.

Figura 3.3: Congruencia de triángulos con el criterio (L-L-L)



Fuente: Elaboración propia

Demostración:

Esta demostración es trivial ya que visualizando la gráfica 3.3, se tiene que.

Sean $\triangle ACB$ y $\triangle ABF$ dos triángulos, de donde los lados

$$\overline{AB} \cong \overline{EF}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{FD}$$

$$\overline{AC} \cong \overline{ED}$$

Por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle FED$. ■

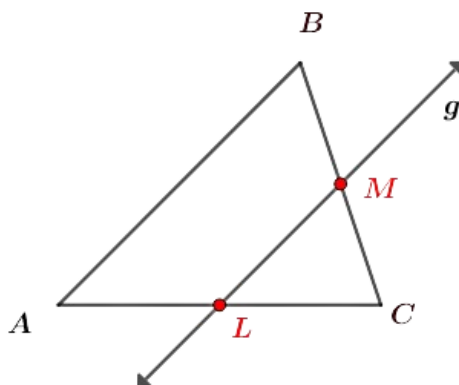
Teorema 3.1.1: De la paralela a un lado de un triángulo

Si por el punto medio del lado de un triángulo se traza una recta paralela a otro lado, entonces dicha recta corta en el punto medio al tercer lado.

Nivel 1.- Visualización:

En la figura 3.4 se muestra la representación geométrica de un triángulo $\triangle ACB$, donde L es el punto medio del lado \overline{AC} , por el cual trazamos una recta que atraviese el lado \overline{AB} , así obtenemos el punto M .

Figura 3.4: Teorema de la paralela a un lado de un triángulo (1)



Nivel 2.- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.4 por ende las propiedades son:

- $\overline{AB} \parallel \overline{LM}$, son rectas paralelas, lo que significa que dos o más rectas en un mismo plano que nunca se intersecan, sin importar cuánto se extiendan. En otras palabras, mantienen la misma distancia entre sí en todos sus puntos..
- Punto medio de un segmento, es aquel que se encuentra exactamente a mitad de camino entre sus dos extremos. En otras palabras, es el punto que divide el segmento en dos partes de igual longitud.
- Concepto de triángulo, un triángulo es una figura geométrica plana formada por tres lados y tres vértices. Los lados son los segmentos de recta que unen los vértices, y los vértices son los puntos donde se juntan dos o más lados.
- Suma interna de ángulos de un triángulo, lo que significa que la suma de cada uno de sus ángulos es 180° .

Nivel 3- Abstracción:

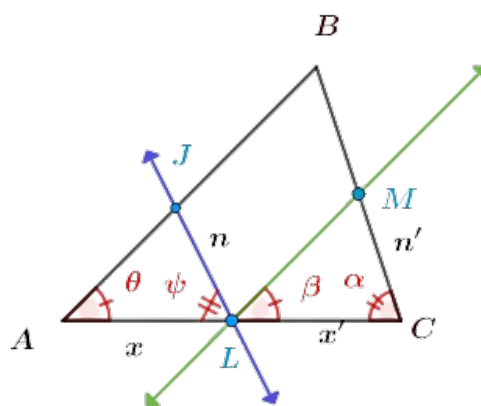
Por los niveles 1, 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con un lado paralelo a otro. En general, si por el punto medio del lado de un triángulo se traza una recta paralela a otro lado, entonces dicha recta corta en el punto medio al tercer lado.

Nivel 4. Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: dado que tengo dos rectas paralelas, $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{g}$, las cuales cortan los segmentos del triángulo \overline{AC} y \overline{BC} , pero debemos demostrar que M es el punto medio de \overline{BC} . Por tanto, haremos uso de la definición de rectas paralelas y rectas perpendiculares que atraviesan las rectas paralelas. De igual manera, utilizaremos la definición de ángulos alternos internos y externos para notar que los segmentos \overline{AL} y \overline{LC} son iguales.

Nivel 5- Rigor:

Figura 3.5: Teorema de la paralela a un lado de un triángulo (2)



Demostración:

Sea $\triangle ABC$, un triángulo y J el punto medio del \overline{AB} , como se puede visualizar en la figura 3.5 por tanto tendremos que \overline{JL} es la base media, entonces, como $JL \parallel BC$ y $BC = 2n$, además como $AB \parallel LM$ tenemos que

$$\angle \theta = \angle \beta,$$

de forma análoga tenemos que $\angle \psi = \angle \alpha$, por criterio de (A-L-A) tenemos que $\triangle AJL \cong \triangle LMC$, por tanto

$$\overline{LJ} = n = \overline{MC} = n,$$

además, $\overline{BC} = \overline{CM} + \overline{MB}$, así tenemos $\overline{BM} = \overline{CM}$.



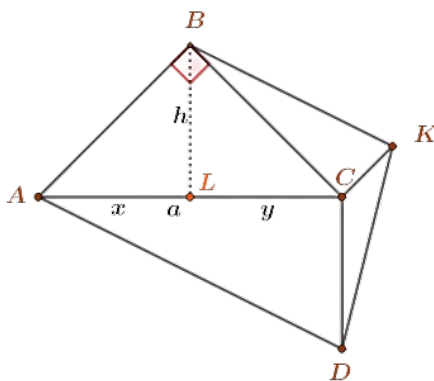
Teorema 3.1.2: De la altura en un triángulo rectángulo

La longitud de la altura relativa a la hipotenusa es menor o igual que la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.

Nivel 1- Visualización:

En la figura 3.6 se muestra la representación geométrica de diferentes triángulos, en donde se destaca el $\triangle ABC$, se puede observar que la altura relativa a la hipotenusa h , es menor o igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa a .

Figura 3.6: Altura en un triángulo rectángulo



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.6 por ende las propiedades son:

- La altura relativa a la hipotenusa, h , es un segmento perpendicular a la hipotenusa, a .
- La altura relativa a la hipotenusa, h , divide a la hipotenusa, a , en dos segmentos, x y y .
- La suma de las longitudes de los segmentos x y y es igual a la longitud de la hipotenusa, a .

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier triángulo rectángulo. En general, la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es menor o igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el teorema de la altura en un triángulo rectángulo. El teorema establece que la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la mitad del producto de las longitudes de los catetos dividido por la longitud de la hipotenusa.

$$h = \frac{xy}{a}.$$

Por lo tanto, la longitud de la altura relativa a la hipotenusa, h , siempre es menor o igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa, a .

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con la altura relativa a la hipotenusa, h . Por el teorema de la altura en un triángulo rectángulo, tenemos que

$$h = \frac{xy}{a},$$

donde x y y son las longitudes de los segmentos en los que la altura divide a la hipotenusa. Como la suma de las longitudes de los segmentos x y y es igual a la longitud de la hipotenusa, entonces tenemos que

$$x + y = a.$$

Por lo tanto,

$$h = \frac{xy}{a} \leq \frac{a}{2}$$

donde la igualdad se produce cuando

$$x = y = \frac{a}{2}.$$



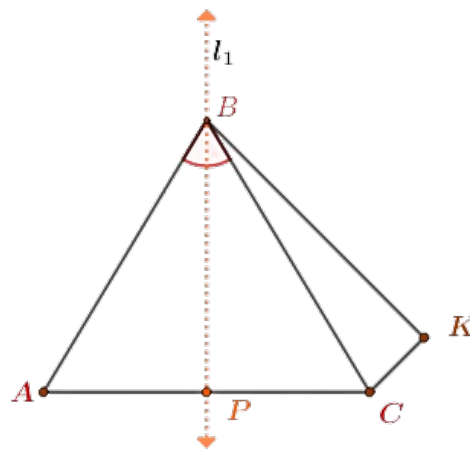
Teorema 3.1.3: De la mediatriz

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.

Nivel 1- Visualización:

En la figura 3.7 se tiene la representación geométrica de una mediatriz \overline{BP} que atraviesa el triángulo $\triangle ACB$, por lo tanto, $\overline{AP} = \overline{CP}$, tal como se muestra a continuación:

Figura 3.7: Mediatriz

**Nivel 2- Análisis:**

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.7 por ende las propiedades son:

- Definición de mediatriz: En geometría, la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento que pasa por su punto medio.
- Definición de segmento: Un segmento es una parte de una recta que se extiende entre dos puntos, conocidos como extremos.
- Punto medio de un segmento: El punto medio de un segmento es el punto único que divide el segmento en dos partes iguales.

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de segmentos que sean divididos por una mediatriz. En general, todo punto de la mediatriz de un segmento

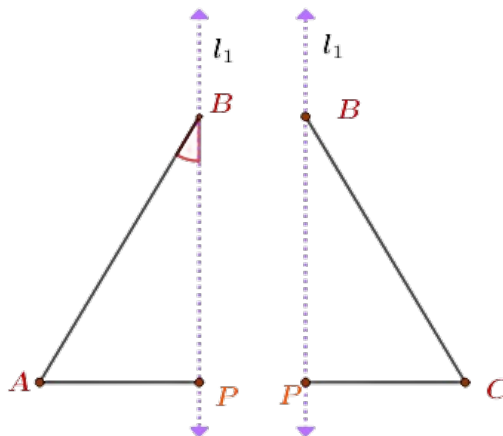
equidista de los extremos de dicho segmento.

Nivel 4- Abstracción:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: Dado que P es el punto medio del segmento \overline{AC} , entonces se tiene lo siguiente: $\overline{AP} = \overline{PC}$. Además, si dividimos la figura 3.8 en dos triángulos, obtenemos $\triangle APB$ y $\triangle PCB$. Deseamos demostrar que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$; entonces, nos damos cuenta de que podemos utilizar el criterio (L-A-L) de congruencia de triángulos. Así obtendríamos lo que requerimos.

Nivel 5- Rigor:

Figura 3.8: Mediatriz de un triángulo



Demostración:

Sea el segmento \overline{AC} , donde P es el punto medio de dicho segmento, $\overline{AP} \cong \overline{CP}$, además, los ángulos $\angle APB = 90^\circ$ y $\angle CPB = 90^\circ$, tal como se puede observar en la figura 3.8.

Como podemos observar, tenemos dos triángulos $\triangle APB$ y $\triangle CPB$, donde el segmento \overline{BP} es común en ambos triángulos. Utilizando el criterio de (L-A-L), tenemos que $\triangle APB \cong \triangle CPB$, entonces, $AB \cong CB$.

Así hemos demostrado que $AB \cong CB$.



3.2. Semejanza de triángulos

La teoría de las semejanzas de triángulos es fundamental en la geometría, ya que proporciona un marco conceptual para comprender relaciones geométricas y resolver problemas diversos. La noción de semejanza entre triángulos se basa en la idea de que dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos correspondientes iguales y sus lados proporcionales.

La introducción a este tema es crucial para comprender cómo las semejanzas entre triángulos pueden aplicarse en diferentes contextos, desde la resolución de problemas geométricos hasta la determinación de medidas desconocidas en figuras similares.

Al abordar el tema de las semejanzas de triángulos, es esencial comenzar con la definición formal de semejanza y establecer los criterios que permiten identificar triángulos semejantes. Esto incluye el concepto de ángulos correspondientes iguales y la relación entre los lados correspondientes proporcionales, que constituyen las condiciones fundamentales para la semejanza de triángulos.

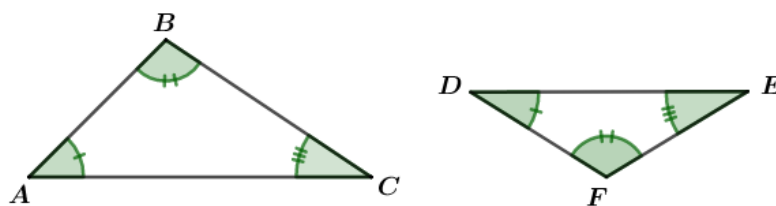
Además, explorar las propiedades y consecuencias de las semejanzas de triángulos proporciona herramientas poderosas para resolver problemas de geometría, como determinar longitudes desconocidas, calcular áreas o incluso comprender relaciones en objetos tridimensionales. Las semejanzas de triángulos también puede abordar aplicaciones prácticas en diversas áreas, incluyendo la cartografía, la ingeniería, la física y otras disciplinas donde la geometría y las proporciones son fundamentales.

Definición 3.2.1: Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si sus tres ángulos internos son de igual medida respectivamente a los lados opuestos a dichos ángulos (denominado lados homólogos) son respectivamente proporcionales.

En la figura 3.9 se tiene la representación geométrica de dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DFE$, tal que posee ángulos internos iguales, y los pares de lados \overline{AB} y \overline{DF} ; \overline{CB} y \overline{FE} y \overline{AC} con \overline{DE} son lados homólogos como se muestra a continuación:

Figura 3.9: Definición de semejanza



Fuente: Elaboración propia

Su notación es $\triangle ABC \sim \triangle DFE$, se lee: el $\triangle ABC$ es semejante con el $\triangle DFE$.

Se cumple:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = k,$$

de donde k : es constante de semejanza ($k > 0$).

3.2.1. Criterios de semejanza de triángulos

Los criterios de semejanza de triángulos son reglas esenciales en geometría para determinar la similitud entre dos triángulos. Estos criterios se fundamentan en la comparación de ángulos y lados, permitiendo establecer si los triángulos son semejantes o no. Destacan por su capacidad para identificar proporcionalidad entre ángulos y lados correspondientes, estando estrechamente relacionados con la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de lados en triángulos semejantes.

Los criterios principales, como el de ángulos semejantes (A-A-A), lados proporcionales (L-L-L) y ángulo-lado-ángulo (A-L-A), son fundamentales para confirmar la semejanza de triángulos. Estos conceptos son clave en la resolución de problemas geométricos y tienen aplicaciones prácticas en diversas situaciones.

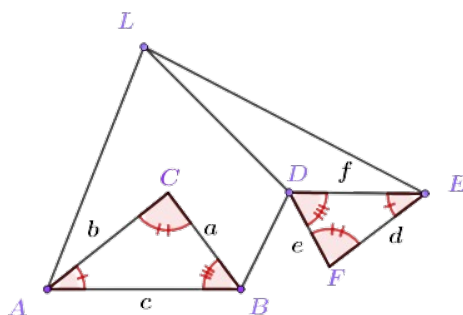
Criterio 3.2.1: Ángulo ángulo ángulo (A-A-A)

Dos triángulos son semejantes si tienen tres de sus ángulos respectivamente congruentes.

Nivel 1- Visualización:

En la figura 3.10 se tiene la representación geométrica de varios triángulos los más destacados son el $\triangle ACB$ y $\triangle EFD$, de donde, se evidencia que los ángulos $\angle A$, $\angle C$, $\angle B$, $\angle F$, $\angle D$ y $\angle E$ son congruentes, tal como se ilustra a continuación:

Figura 3.10: Criterio ángulo ángulo ángulo (1)



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.10 por ende las propiedades son:

- Se hará el uso del concepto de ángulos congruentes, lo que significa que tiene la misma medida angular.
- Definición de suma de los ángulos internos de un triángulo, lo que significa que su suma es 180° .
- Definición de segmentos proporcionales: En geometría, los segmentos proporcionales son dos o más segmentos que tienen la misma razón entre sus longitudes correspondientes.
- Teorema de Thales: Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos que determina en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

Nivel 3- Abstracción:

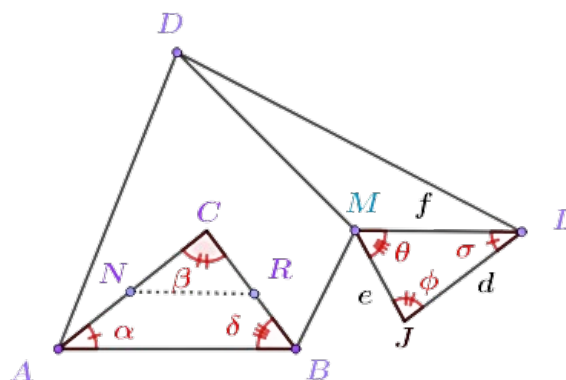
Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con tres ángulos congruentes. En general, dos triángulos son semejantes si tienen tres de sus ángulos respectivamente congruentes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: Dado que los ángulos $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$ y $\angle H = \angle F$, podemos trazar rectas paralelas a cualquiera de los lados del triángulo. Como nuestro objetivo es demostrar que $\triangle ABC \sim \triangle MLJ$, al trazar una recta paralela podemos hacer uso de alguno de los criterios ya demostrados en congruencia de triángulos. De igual manera, podremos hacer uso del teorema de Thales para alcanzar nuestro objetivo principal.

Nivel 5- Rigor:

Figura 3.11: Criterio ángulo ángulo ángulo (2)



Demostración:

Sean los puntos N en el segmento \overline{AC} y R en el segmento \overline{CB} con la traza del segmento \overline{NR} , como se muestra en la figura 3.11.

Se establece que:

$$\overline{NC} \cong \overline{LJ} \text{ y } \overline{CR} \cong \overline{JM} \quad (1),$$

al utilizar el criterio de congruencia de triángulos (L-A-L) se concluye que $\triangle NRC \cong \triangle LMJ$, lo que implica:

$$\angle CNR \cong \angle LJM$$

$$\angle CRN \cong \angle JML,$$

por hipótesis se tiene que los ángulos $\angle ACB \cong \angle LJM$, se deduce que, $\angle CAB \cong \angle CNR$. Además, al tratarse de ángulos correspondientes entre dos rectas, se define que $\overline{NR} \parallel \overline{AB}$. Al utilizar el teorema de proporciones se obtiene:

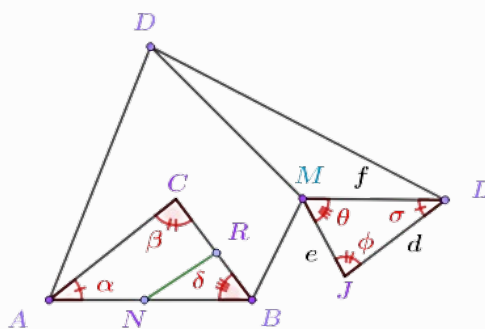
$$\frac{AC}{NC} = \frac{BC}{RC} \quad (2),$$

reemplazando 1 en 2 se tiene:

$$\frac{AC}{LJ} = \frac{BC}{JM}.$$

Consideremos ahora el triángulo $\triangle ACB$, se considera los puntos R en el segmento \overline{CB} , y N en el segmento \overline{AB} , de la siguiente manera:

Figura 3.12: Criterio ángulo ángulo ángulo (3)



se verifica que:

$$\overline{RB} \cong \overline{JM}$$

$$\overline{NB} \cong \overline{LM} \quad (3),$$

Continuación de la demostración:

Se traza el segmento \overline{NR} , usando el criterio de (L-A-L) se obtiene:

$$\angle BRN \cong \angle MJL$$

$$\angle BNR \cong \angle MLJ,$$

dada la hipótesis $\angle ACB \cong \angle LJM$, se concluye $\angle BAC \cong \angle MLJ$, además, al ser ángulos correspondientes entre dos rectas, se deduce $\overline{AC} \parallel \overline{NR}$, por el teorema de proporciones, se establece:

$$\frac{BC}{RB} = \frac{BA}{NB} \quad (4),$$

sustituyendo (4) en (3) se obtiene:

$$\frac{BC}{JM} = \frac{BA}{LM}.$$

De esta manera, se concluye que :

$$\frac{AC}{LI} = \frac{BC}{JM} = \frac{BA}{LM}$$



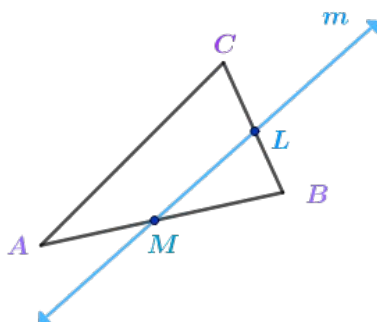
Corolario 3.2.1

Toda recta que intersecta a dos lados de un triángulo y es paralela al tercero, determina un triángulo semejante al primero.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer el patrón en la figura 3.13 se puede visualizar que la recta \overleftrightarrow{m} es paralela al lado \overline{AC} del triángulo $\triangle ABC$. También vemos que la recta \overleftrightarrow{m} divide a los lados \overline{AB} y \overline{BC} en segmentos proporcionales.

Figura 3.13: Intersección de recta paralela a lados de un triángulo



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.13 por ende las propiedades son:

- La recta \overleftrightarrow{m} es paralela al lado \overline{AC} , lo que significa que dos rectas paralelas o más rectas en un mismo plano que nunca se intersecan, sin importar cuánto se extiendan.
- Los segmentos \overline{AD} y \overline{CD} son proporcionales a los segmentos \overline{AB} y \overline{BC} , respectivamente lo que significa que, dos segmentos son proporcionales si la razón entre ellos es igual a la razón entre otros dos segmentos correspondientes.

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de rectas que intersecten a dos lados de un triángulo y sean paralelas al tercero. En general, toda recta que intersecta a dos lados de un triángulo y es paralela al tercero, determina un triángulo semejante al primero.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: dado que el podemos utilizar el teorema de Tales, donde, nos garantiza que si dos rectas cualesquiera son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que determina en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra.

En figura 3.13 tenemos la representación geométrica de los segmentos \overline{AB} y \overline{BC} son cortadas

por la recta paralela \overleftrightarrow{m} . Por lo tanto, el teorema de Tales nos dice que los segmentos \overline{MB} y \overline{LB} son proporcionales a los segmentos \overline{AB} y \overline{CB} , respectivamente.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y \overleftrightarrow{m} una recta paralela al lado \overline{AC} . Tal que la intersección de la recta genera los puntos L y M , como se puede visualizar en la figura 3.13.

Por el teorema de Tales, tenemos que $\frac{AM}{AB} = \frac{CL}{BC}$.

Esto significa que los segmentos \overline{AM} y \overline{CL} son proporcionales a los segmentos \overline{AB} y \overline{CB} , respectivamente.

Por lo tanto, toda recta que intersecta a dos lados de un triángulo y es paralela al tercero, determina un triángulo semejante al primero. ■

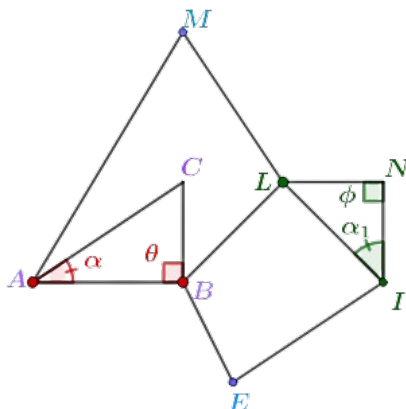
Corolario 3.2.2

Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo respectivamente congruente, son semejantes.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer el patrón en la figura 3.14 en donde se puede visualizar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LIN$ tienen dos ángulos agudos y congruentes, $\angle \alpha$ y $\angle \alpha_1$. También vemos que los lados correspondientes de los dos triángulos son proporcionales.

Figura 3.14: Triángulos rectángulos con ángulo agudo



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.14 por ende las propiedades son:

- El ángulo $\angle\alpha$ es congruente en ambos triángulos, lo que significa que tienen la misma medida angular.
- Los lados \overline{AB} y \overline{LI} , \overline{BC} y \overline{IN} , y \overline{AC} y \overline{LN} son proporcionales: En este contexto, dos segmentos son proporcionales si la razón entre ellos es igual a la razón entre otros dos segmentos correspondientes..

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos rectángulos con un ángulo agudo respectivamente congruente. En general, si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo respectivamente congruente, son semejantes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos (L-A-L). El criterio establece que dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.

En el caso de la figura 3.14 los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LIN$ tienen dos lados proporcionales, \overline{AB} y \overline{LI} . También tienen los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\alpha_1$ congruentes. Por lo tanto, el criterio (L-A-L) nos dice que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LIN$ son semejantes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle LIN$ dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo congruente, $\angle\alpha$.

Por el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$LI^2 = LN^2 + NI^2$$

Continuación de la demostración:

A partir de la congruencia del ángulo $\angle\alpha$, tenemos que

$$\overline{CB} = \overline{NI}$$

Por lo tanto, podemos escribir las dos ecuaciones anteriores como

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$LI^2 = LN^2 + NI^2$$

Dividiendo ambas ecuaciones, obtenemos

$$\frac{AB^2}{LI^2} = \frac{AC^2}{IL^2} + \frac{CB^2}{LN^2}$$

Por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\frac{AB}{LI} = \frac{AC}{IL} + \frac{CB}{LN}$$

Esto significa que los cocientes de los lados correspondientes de los dos triángulos son iguales. Por lo tanto, los dos triángulos son semejantes.



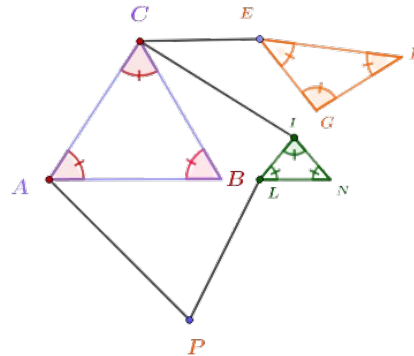
Corolario 3.2.3

Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Nivel 1- Visualización:

En la figura 3.15 tenemos la representación geométrica de tres triángulos. También se puede visualizar que tiene los ángulos son congruentes.

Figura 3.15: Tres triángulos rectángulos



Nivel 2- Análisis:

A partir de este reconocimiento, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura. Las propiedades que se repiten son:

- Todos los ángulos son congruentes, lo que significa que tiene la misma medida angular.
- Todos los lados son proporcionales: En este contexto, dos segmentos son proporcionales si la razón entre ellos es igual a la razón entre otros dos segmentos correspondientes..

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier triángulo equilátero. En general, todos los triángulos equiláteros tienen tres ángulos congruentes y tres lados congruentes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el hecho de que todos los triángulos equiláteros tienen todos los ángulos congruentes y todos los lados congruentes. En el caso de la figura 3.15 todos los ángulos son congruentes, con un ángulo de 60° grados cada uno. También todos los lados son congruentes, con una longitud de raíz de tres.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sean $\triangle ABC$, $\triangle LNI$ y $\triangle EFG$ tres triángulos equiláteros.

Continuación de la demostración:

Por la definición de triángulo equilátero, tenemos que:

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

$$\angle L = \angle N = \angle I = 60^\circ$$

$$\angle E = \angle F = \angle G = 60^\circ$$

También por la definición de triángulo equilátero, tenemos que

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \sqrt{3}$$

$$\overline{LN} = \overline{NI} = \overline{IL} = \sqrt{3}$$

$$\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GE} = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, todos los ángulos de los $\triangle ABC$, $\triangle LNI$ y $\triangle EFG$ son congruentes y sus lados también proporcionales.



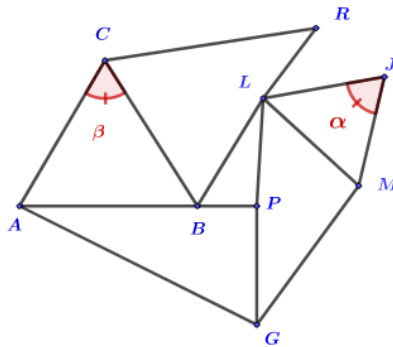
Criterio 3.2.2: Lado ángulo Lado (L-A-L)

Si dos triángulos tiene un par de lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido de igual medida, entonces dicho triángulo son semejante.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer el patrón en la figura 3.16. donde visualiza que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MIJ$ tienen un par de lados proporcionales, $\frac{\overline{AC}}{\overline{IJ}}$ y $\frac{\overline{CB}}{\overline{MJ}}$ También vemos que el ángulo comprendido, $\angle \beta$ y $\angle \alpha$ son congruentes, como se ve a continuación.

Figura 3.16: Criterio lado ángulo lado (1)



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.16 las propiedades que se repiten son:

- Los lados $\frac{\overline{AC}}{\overline{IJ}}$ y $\frac{\overline{CB}}{\overline{MJ}}$ son proporcionales: En este contexto, dos segmentos son proporcionales si la razón entre ellos es igual a la razón entre otros dos segmentos correspondientes.
- El ángulos internos $\angle\beta$ y $\angle\alpha$ son congruentes en los dos triángulos, lo que significa que tiene la misma medida angular.

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con un par de lados proporcionales y el ángulo comprendido congruente. En general, si dos triángulos tienen un par de lados proporcionales y el ángulo comprendido congruente, entonces los lados homólogos de los triángulos son proporcionales.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos (L-A-L). El criterio establece que dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.

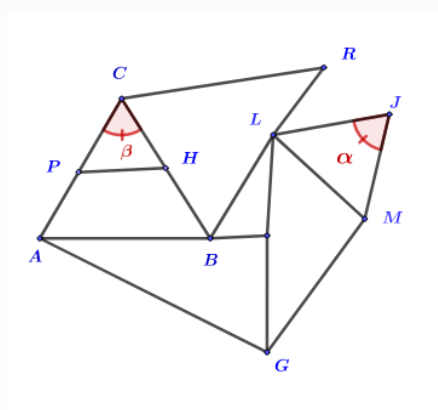
En el caso de la figura 3.16, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MIJ$ tienen lados proporcionales, $\frac{\overline{AC}}{\overline{IJ}}$ y $\frac{\overline{CB}}{\overline{MJ}}$. También tienen los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ congruentes. Por lo tanto, el criterio (L-A-L) nos dice que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MIJ$ son semejantes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Se considera los puntos P en el segmento \overline{AC} , y H en el segmento \overline{CB} , con la traza del segmento \overline{PH} , tal como se ilustra en la figura 3.17:

Figura 3.17: Criterio lado ángulo lado (2)



Se establece que $\overline{CP} \cong \overline{JL}$ y $\overline{CH} \cong \overline{JM}$. al utilizar el criterio de (L-A-L), se concluye que $\overline{PH} \cong \overline{LM}$, lo que implica que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CH}}.$$

Al utilizar el teorema de la proporción, se obtiene:

$$\overline{PH} \parallel \overline{AB},$$

como son paralelas en el triángulo $\triangle ABC$, además, al tratarse de ángulos correspondientes, se obtiene:

$$\angle CAB \cong \angle JLM$$

$$\angle CBA \cong \angle JML.$$

AL hacer uso del criterio de semejanza de triángulos (A-A-A) se concluye que:

$$\triangle ACB \sim \triangle LJM.$$



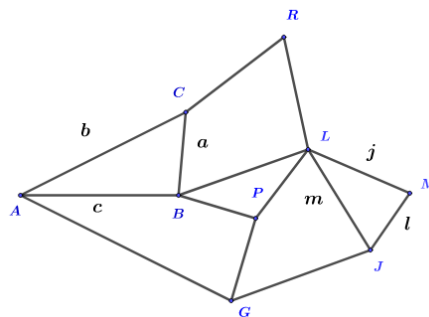
Criterio 3.2.3: Lado lado lado (L-L-L)

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Nivel 1- Visualización:

En la figura 3.18 tenemos la representación geométrica de tres triángulos. Comenzamos por reconocer el patrón que se repite en la figura 3.18 se puede visualizar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MIJ$ tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

Figura 3.18: Criterio lado ángulo lado



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.18 las propiedades que se repiten son:

- Los lados \overline{AB} y \overline{ML} , \overline{BC} y \overline{JM} y \overline{AC} y \overline{JL} son proporcionales: En este contexto, dos segmentos son proporcionales si la razón entre ellos es igual a la razón entre otros dos segmentos correspondientes.
- Triángulo equilátero: Un triángulo equilátero es un polígono regular de tres lados y tres ángulos iguales. En otras palabras, cada lado del triángulo tiene la misma longitud, y cada ángulo interno mide 60° grados.

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1, 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con sus tres lados respectivamente proporcionales. En general, si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente proporcionales, entonces los lados homólogos de los triángulos son proporcionales.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos (L-L-L). El criterio establece que dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

En el caso de la figura 3.18 los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MIJ$ tienen sus tres lados respectivamente proporcionales. Por lo tanto, el criterio (L-L-L) nos dice que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MIJ$ son semejantes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Se considera los puntos D en el segmento \overline{AC} y Y en el segmento \overline{CB} , con la traza del segmento \overline{DY} , tal como se ilustra en la figura 3.18 de donde se establece que:

$$\begin{aligned}\overline{CD} &\cong \overline{LJ} \\ \overline{CY} &\cong \overline{JM} \quad (1),\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\angle ACB \cong \angle LJM$, así se obtiene:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{LJ}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{JM}} \quad (2),$$

sustituyendo (1) en (2) se tiene que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CY}},$$

Haciendo uso del criterio de congruencia de triángulos (L-A-L) se tiene:

$$\triangle ABC \sim \triangle ACB.$$

Continuación de la demostración:

Por tanto tenemos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DY}} \quad (3),$$

sustituyendo(1) en (3) se tiene:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{LJ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DY}}.$$

Como por hipótesis tenemos que $\frac{\overline{AC}}{\overline{LJ}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{JM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{LM}}$, por tanto tenemos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DY}}.$$

Por teorema de las proporciones se obtiene $\overline{LM} = \overline{DY}$, así se tiene que :

$$\triangle DCY \cong \triangle LJM,$$

por tanto se tiene que :

$$\angle JLM \cong \angle CAB$$

$$\angle JML \cong \angle CBA$$

$$\angle LJM \cong \angle ACB.$$

Así se concluye que:

$$\triangle ABC \sim \triangle LMJ$$

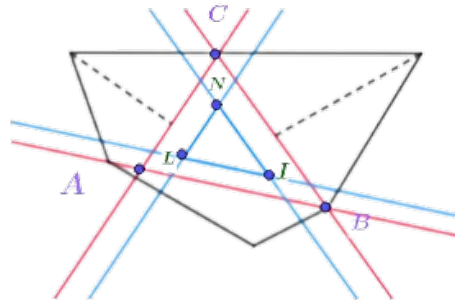
**Teorema 3.2.1**

Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son semejantes.

Nivel 1- Visualización:

En la figura 3.19 se puede observar que los triángulos $\triangle ABC$ tienen sus lados respectivamente paralelos y un segmento perpendicular.

Figura 3.19: Teorema rectas paralelas a un triángulo



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 3.19 las propiedades que se repiten son:

- Los lados \overline{AB} y \overline{LI} son paralelos: En geometría, rectas paralelas son dos o más rectas en un mismo plano que nunca se intersecan, sin importar cuánto se extiendan.
- Los lados \overline{AC} y \overline{LN} son perpendiculares: En geometría, dos lados perpendiculares son dos segmentos de recta que se intersectan en un punto formando un ángulo recto.
- Los lados \overline{CB} y \overline{IN} son perpendiculares: En geometría, dos lados perpendiculares son dos segmentos de recta que se intersectan en un punto formando un ángulo recto.

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares. En general, si dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares, entonces los ángulos correspondientes de los triángulos son iguales.

Nivel 4- Deducción forma:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar los criterios de semejanza de triángulos (A-A-A) y

(L-A-L).

Caso 1: Los lados correspondientes son paralelos.

Si los lados correspondientes de dos triángulos son paralelos, entonces los ángulos correspondientes también son paralelos. Por lo tanto, los triángulos son semejantes por el criterio de semejanza de triángulos (A-A-A).

Caso 2: Los lados correspondientes son perpendiculares.

Si los lados correspondientes de dos triángulos son perpendiculares, entonces los ángulos correspondientes también son perpendiculares. Por lo tanto, los triángulos son semejantes por el criterio de semejanza de triángulos (L-A-L).

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sea $\triangle ABC$ y $\triangle LIN$ dos triángulos con sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares.

Caso 1: Los lados correspondientes son paralelos

Si los lados correspondientes de dos triángulos son paralelos, entonces los ángulos correspondientes también son paralelos.

$$\angle A \cong \angle L$$

$$\angle B \cong \angle I$$

$$\angle C \cong \angle N$$

Por lo tanto, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LIN$ son semejantes por el criterio de semejanza de triángulos (A-A-A).

Continuación de la demostración:

Caso 2: Los lados correspondientes son perpendiculares.

Si los lados correspondientes de dos triángulos son perpendiculares, entonces los ángulos correspondientes también son perpendiculares.

$$\angle A \parallel \angle L$$

$$\angle B \parallel \angle I$$

$$\angle C \parallel \angle N$$

Por lo tanto, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LIN$ son semejantes por el criterio de semejanza de triángulos (L-A-L).



Capítulo 4

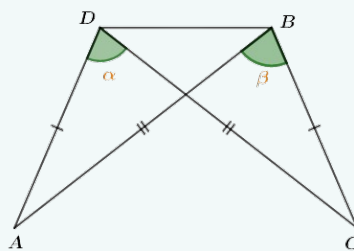
Problemas de geometría plana con la aplicación del método de Van Hiele

Vila, Callejo (2004) manifiesta que aprender a pensar ha sido uno de los argumentos más repetidos a lo largo de la historia para justificar la necesidad de aprender matemáticas, aunque no el único. Porque pensar es una de las actividades centrales del ser humano, aunque además de pensar, el ser humano también es capaz de sentir, creer, amar, jugar, pensar y actuar. Y aunque el pensamiento no es patrimonio exclusivo de una ciencia, las matemáticas son una materia ideal para practicar y mejorar el arte de pensar.

4.1. Problemas de congruencia de triángulos

Problema 4.1.1

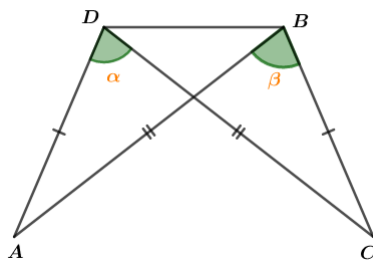
Sean los lados $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, demostrar que $\angle \alpha \cong \beta$.



Nivel 1- Visualización:

En la figura 4.1 se puede visualizar triángulos de donde los lados \overline{AD} y \overline{BC} son congruentes, y los lados \overline{DC} y \overline{AB} también son congruentes.

Figura 4.1: Problema 1



Fuente: Elaboración propia

Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.1 las propiedades que se repiten son:

- Concepto de lados congruentes, lo que significa que tiene la misma media de longitud.
- Concepto de ángulos congruentes, lo que significa que tiene la misma media angular .

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier triángulo. En general, si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces el ángulo opuesto a esos lados también es congruente.

- Dado que los lados $\overline{DA} \cong \overline{BC}$, entonces deben tener la misma longitud.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: Como se sabe que si dos longitudes son congruentes, entonces son iguales. Por tanto, como los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ están comprendidos entre estas dos longitudes, son congruentes podemos utilizar el criterio de congruencia de triángulos.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Estructurando las ideas conjuntamente con los conceptos, se tiene que $\angle\alpha \cong \angle\beta$. Por la información proporcionada, sabemos que los segmentos $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ son congruentes.

Como se observa en el nivel 1, los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ se encuentran entre lados congruentes.

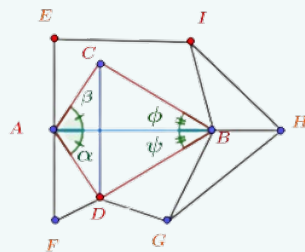
Sea $\angle\alpha$ el ángulo formado entre los segmentos \overline{AD} y \overline{DC} , y sea $\angle\beta$ el ángulo formado entre los segmentos \overline{CB} y \overline{AB} .

Dado que los segmentos $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ y $\overline{DC} \cong \overline{AB}$, por definición de congruencia, los ángulos correspondientes a estos segmentos también son congruentes. Es decir, $\angle\alpha \cong \angle\beta$.

Por lo tanto, hemos demostrado que los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son congruentes, ya que $\angle\alpha$ está entre los segmentos congruentes \overline{AD} y \overline{DC} , y $\angle\beta$ está entre los segmentos congruentes \overline{CB} y \overline{AB} , concluyendo que $\angle\alpha \cong \angle\beta$. ■

Problema 4.1.2

Si $\angle\alpha \cong \beta$ y $\angle\phi \cong \psi$.

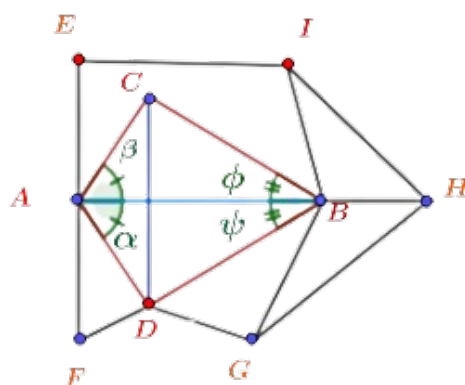


Demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

Nivel 1- Visualización:

En la figura 4.2 se puede visualizar triángulos en donde los ángulos $\angle\alpha \cong \angle\beta$ y $\angle\phi \cong \angle\psi$ son congruentes.

Figura 4.2: Problema 2



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.2 las propiedades son:

- Los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son congruentes, lo que significa que tienen la misma medida angular.
- Los ángulos $\angle\phi$ y $\angle\psi$ son congruentes, lo que significa que tienen la misma medida angular.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con dos pares de ángulos congruentes. En general, si dos triángulos tienen dos pares de ángulos congruentes, entonces los dos triángulos son congruentes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de congruencia de triángulos por ángulos. El criterio establece que dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos congruentes y el lado correspondiente a uno de esos ángulos también es congruente.

En el caso de la figura 4.2 los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son congruentes. Por lo tanto, los lados correspondientes \overline{AC} y \overline{AD} son congruentes.

Los ángulos $\angle\phi$ y $\angle\psi$ son congruentes. Por lo tanto, los lados correspondientes a esos ángulos, \overline{BC} y \overline{BD} , también son congruentes. Como \overline{AB} y \overline{BC} son congruentes, y \overline{AC} y \overline{BD} son congruentes, entonces los triángulos $\angle ABC$ y $\angle ABD$ son congruentes por el criterio de congruencia de triángulos por lados.

Nivel 5 - Rigor

Demostración:

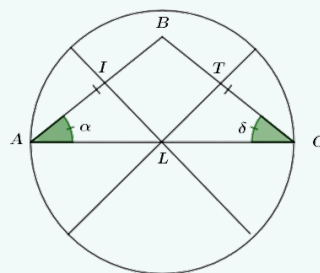
Consideremos dos triángulos, $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$, con los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ congruentes entre sí, y los ángulos $\angle\phi$ y $\angle\psi$ también congruentes entre sí. Dado que el lado \overline{AB} es común a ambos triángulos, podemos utilizar el criterio de congruencia de triángulos conocido como el criterio Ángulo-Lado-Ángulo (ALA). Por lo tanto, concluimos que

$$\triangle ABC \cong \triangle ABD.$$



Problema 4.1.3

Sea $\triangle ABC$ un triángulo, donde $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{AI} \cong \overline{TC}$, en cuyo interior del triángulo contienen dos triángulos $\triangle ALI$ y $\triangle CLT$, donde L es el punto medio de \overline{AC} , y los ángulos $\angle\alpha \cong \angle\delta$.



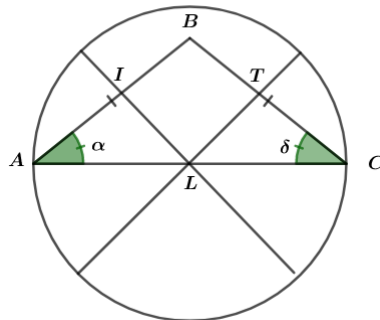
Demostrar que $\triangle ALI \cong \triangle LTC$.

Nivel 1- Visualización:

Al analizar detenidamente la figura 4.3, se observa una representación geométrica que muestra

varios triángulos con diferentes medidas, en los cuales se intersectan segmentos perpendiculares que cortan los lados de los triángulos, así como un punto donde estas dos rectas perpendiculares se cruzan.

Figura 4.3: Problema 3



Nivel 2- Análisis:

Por la información del nivel 1, hemos identificado la utilización de los siguientes conceptos útiles para la demostración:

- Lados congruentes: Se refiere a los lados de dos o más figuras geométricas que comparten la misma longitud o medida.
- Punto medio de un segmento: Es el punto que se ubica exactamente en el centro de un segmento dado.
- Congruencia de triángulos: Es la relación entre dos triángulos en la que todos sus lados correspondientes tienen igual longitud y todos sus ángulos correspondientes tienen igual medida.
- Ángulos entre segmentos: Son los ángulos que se forman cuando dos segmentos se intersectan en un punto común.
- Ángulos congruentes: Son ángulos que tienen la misma medida angular.

Nivel 3 - Abstracción

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón encontrado a cualquier par de triángulos que tengan dos pares de lados congruentes y el ángulo entre ellos congruente. En términos generales, si dos triángulos poseen dos pares de lados congruentes y un ángulo

comprendido entre ellos congruente, entonces ambos triángulos son congruentes.

Nivel 4- Deducción formal:

Con lo expuesto en los niveles 1, 2 y 3, tenemos que $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ y $\overline{AI} \cong \overline{CT}$, además $\angle\alpha \cong \angle\delta$. Como L es el punto medio del segmento \overline{AC} , los segmentos \overline{AL} y \overline{CL} son congruentes. Aplicando el criterio de congruencia de triángulos Lado - Ángulo - Lado (L-A-L), podemos hacer notar que los triángulos $\triangle ALI$ y $\triangle LTC$ son congruentes.

Nivel 5 - Rigor:

Demostración:

Dado el triángulo $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AI} \cong \overline{TC}$, además, se establece que L es el punto medio de \overline{AC} .

Por definición de punto medio del segmento, \overline{AL} y \overline{LC} tienen la misma medida, por ende son congruentes.

Se establece que los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\delta$ son congruentes, según la información proporcionada en el problema.

Dadas las condiciones anteriores, es conveniente aplicar el criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado (L-A-L) para demostrar la congruencia de los triángulos $\triangle ALI$ y $\triangle LTC$.

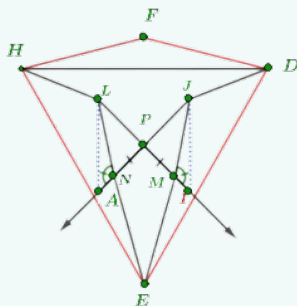
Por lo tanto, en virtud del criterio L-A-L, se concluye que los triángulos $\triangle ALI$ y $\triangle LTC$ son congruentes.

Por tanto, hemos demostrado que $\triangle ALI \cong \triangle LTC$.



Problema 4.1.4

Sean \overline{LI} y \overline{JA} dos segmentos que se intersectan en P . Se tiene que $\angle LNA \cong \angle JMI$ y $\overline{PN} \cong \overline{PM}$.

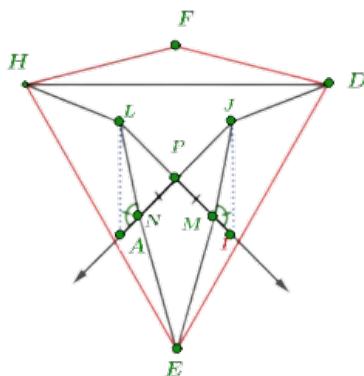


Demostrar que $\overline{PL} \cong \overline{PJ}$.

Nivel 1 - Visualización:

En la figura 4.4 se tiene la representación geométrica de dos triángulos donde se logra visualizar que los segmentos \overline{LI} y \overline{JA} se intersectan en P , y los ángulos $\angle LNA$ y $\angle JMI$ son congruentes.

Figura 4.4: Problema 4

**Nivel 2 - Análisis:**

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.4 por tanto las propiedades que se repiten son:

- Las semirrectas \overrightarrow{LI} y \overrightarrow{JA} se intersectan en el punto P , lo que significa que P es donde cortan las semirrectas.

- Los ángulos $\angle LNA$ y $\angle JMI$ son congruentes, lo que significa que pose la misma media angular.

Nivel 3 - Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1,2 podemos utilizar el criterio de congruencia de triángulos por ángulos. El criterio establece que dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos congruentes y el lado correspondiente a uno de esos ángulos también es congruente.

En el caso de la figura 4.4 los ángulos $\angle LNA$ y $\angle JMI$ son congruentes. Por lo tanto, los lados opuestos a esos ángulos, \overline{PL} y \overline{PJ} , también son congruentes.

Nivel 4 - Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: Dado que $\angle LNA \cong \angle JMI$, los triángulos LNP y JMP son congruentes por el criterio ALA, compartiendo el ángulo $\angle NPM$ y los lados $\overline{PN} \cong \overline{PM}$. Por ende, $\overline{NL} \cong \overline{MJ}$, $\overline{NA} \cong \overline{MI}$ y $\overline{LP} \cong \overline{JP}$. Con tres pares de lados correspondientes congruentes, los triángulos LNA y JMI son congruentes podemos hacer uso de el criterio congruencia de triángulos (L-L-L), para poder demostrar que los triángulos son congruentes.

Nivel 5 - Rigor:

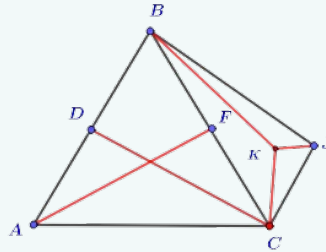
Demostración:

Dado que $\angle LNA \cong \angle JMI$ y $\overline{PN} \cong \overline{PM}$, se puede decir que $\angle LNP \cong \angle JMP$. Esto se debe a que, por definición de ángulos adyacentes y la congruencia de los ángulos $\angle LNA \cong \angle JMI$, y como $\overline{PM} \cong \overline{PM}$, se tiene $\angle NPL \cong \angle MPJ$. Esto es por definición de ángulos opuestos por el vértice. Por ende, tomando la definición del criterio (A-L-A), se tiene que $\triangle LNP \cong \triangle JMP$, entonces $\overline{PL} \cong \overline{PJ}$.

Por tanto, hemos demostrado que $\overline{PL} \cong \overline{PJ}$. ■

Problema 4.1.5

Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y D, F puntos medios de \overline{AB} y \overline{BC} .



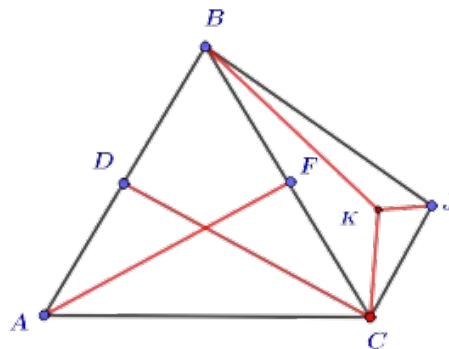
Demostrar que:

- a) $\overline{AF} \cong \overline{CD}$
- b) $\angle AFC \cong \angle ADC$

Nivel 1 - Visualización:

Al observar la figura 4.5 se pueden notar ciertas características: Dos lados son iguales, los ángulos opuestos a los lados iguales son congruentes, la base del triángulo es el lado más largo.

Figura 4.5: Problema 5

**Nivel 2 - Análisis:**

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.5 las propiedades son:

- El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles ya que los lados $\overline{AB} = \overline{BC}$ y $\angle A = \angle C$,

- Los puntos D y F son puntos medios de los lados \overline{AB} y \overline{BC} , respectivamente, lo que significa que los puntos D y F dividen al segmentos en longitudes iguales.

Nivel 3 - Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2, el problema trata sobre la congruencia de lados, por lo que se consideran los siguientes aspectos:

- La igualdad de las longitudes: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.
- Los puntos D y F son puntos medios de los lados \overline{AB} y \overline{BC} .
- Es conveniente utilizar la proposición (L-A-L).

Nivel 4 - Deducción formal:

Para abordar este problema, podemos emplear el marco teórico de los triángulos isósceles. Además, contamos con los puntos medios de los lados \overline{AB} y \overline{BC} . Es importante destacar que $\overline{AF} \cong \overline{CD}$ y que los ángulos $\angle AFC$ y $\angle ADC$ son congruentes.

Nivel 5 - Rigor:

Demostración:

Demostración de a)

Se demostrará que $\triangle ADC \cong \triangle AFC$. Al observar en el **Nivel 1**, el lado \overline{AC} es el lado en común entre los triángulos formados, $\triangle ADC$ y $\triangle AFC$. Los ángulos opuestos a los lados congruentes son $\angle BAC \cong \angle BCA$. Como D es punto medio del lado \overline{AB} y F es punto medio de \overline{BC} , resulta que $\overline{AD} \cong \overline{CF}$. Por la proposición de (L-A-L), $\triangle ADC \cong \triangle CAF$, por lo tanto, $\overline{AF} \cong \overline{CD}$.

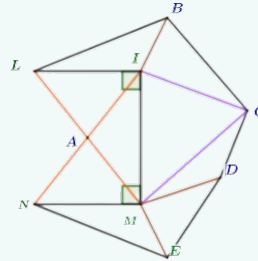
Demostración de b)

Se debe demostrar que $\angle ACD \cong \angle ACF$. Como se demostró anteriormente que $\triangle ADC \cong \triangle CAF$, entonces $\angle ACD \cong \angle ACF$.



Problema 4.1.6

Si el lado \overline{NM} es perpendicular al lado \overline{MI} , el lado \overline{LI} es perpendicular al lado \overline{MI} y $\overline{ALI} \cong \overline{NM}$.

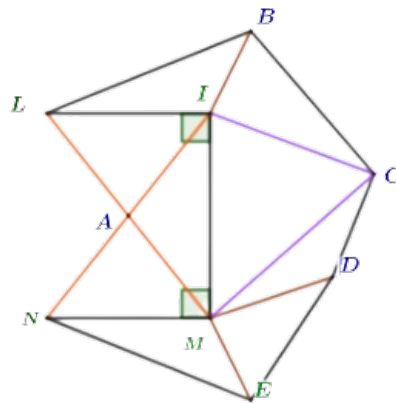


Demostrar que $\triangle LIM \cong \triangle NMI$.

Nivel 1- Visualización:

En la figura 4.6 se pueden apreciar segmentos perpendiculares, así como segmentos congruentes y ángulos rectos claramente definidos.

Figura 4.6: Problema 6

**Nivel 2- Análisis:**

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.6 las propiedades que se repiten son:

- Los lados \overline{MN} e \overline{LI} son perpendiculares a \overline{MI} , lo que significa que los segmentos perpendiculares son dos segmentos de línea que se intersectan en un ángulo de 90 grados, formando así una intersección en ángulo recto.

- Los segmentos \overline{MN} y \overline{LI} son congruentes.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1, 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de líneas perpendiculares a una tercera. En general, si dos líneas son perpendiculares a una tercera, y los segmentos que las unen a esa línea son congruentes, entonces los dos triángulos formados por las tres líneas son congruentes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el hecho de que dos líneas perpendiculares a una tercera forman ángulos rectos con esa tercera línea.

En el caso de la figura 4.6 los segmentos \overline{MN} e \overline{LI} son perpendiculares a \overline{MI} . Por lo tanto, los triángulos $\triangle LIM$ y $\triangle NMI$ tienen ángulos rectos en $\angle M$, además, podemos aplicar el criterio de congruencia de triángulos (L-A-L) y así demostrar que son congruentes.

Nivel 5 - Rigor:

Demostración:

Sea \overline{MN} y \overline{LI} dos segmentos perpendiculares a \overline{MI} , además, sean L , I , y M son los puntos de intersección de los segmentos.

Por el hecho de que dos segmentos perpendiculares a una tercera forman ángulos rectos al tercer segmento, tenemos que:

$$\angle LIM = \angle NMI = 90^\circ$$

Por el hecho de que los segmentos \overline{LI} y \overline{MN} son congruentes, tenemos que $\overline{LI} = \overline{MN}$

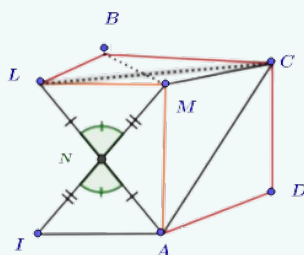
Por el criterio de congruencia de triángulos (L-A-L), tenemos que

$$\triangle LIM \cong \triangle NMI$$



Problema 4.1.7

Si N es el punto medio de los segmentos \overline{LA} y \overline{MI} .

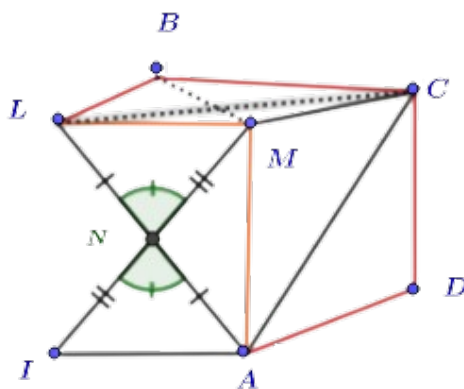


Demostrar que $\triangle LMN \cong \triangle IAN$.

Nivel 1 - Visualización:

Comencemos observando la Figura 4.7, donde podemos apreciar una intersección entre segmentos, la formación de triángulos debido a esta intersección, y la presencia de ángulos congruentes.

Figura 4.7: Problema 7

**Nivel 2- Análisis:**

Por el nivel 1 se logra identificar el usos de los siguientes conceptos:

- El punto N es el punto medio de los segmentos \overline{LA} y \overline{MI} , lo que significa que divide al segmentos en longitudes iguales.
- Los segmentos $\overline{IN} \cong \overline{NM}$ y $\overline{LN} \cong \overline{NA}$, lo que significa que tienen la misma media de longitud.

Nivel 3- Abstracción:

Por los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de segmentos con un punto medio común. En general, si un punto es el punto medio de otros dos segmentos, entonces los segmentos son congruentes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el hecho de que un punto medio divide un segmento en dos segmentos congruentes. En el caso de la figura 4.7, el punto N es el punto medio de los segmentos \overline{LA} y \overline{MI} . Por lo tanto, los segmentos \overline{LA} y \overline{MI} son congruentes, y así poder demostrar que los triángulos son congruentes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

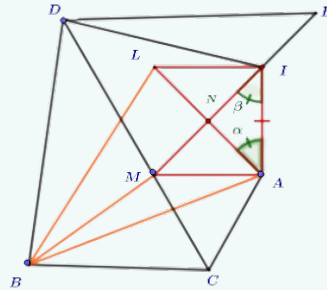
Sea N el punto medio de los segmentos \overline{LA} y \overline{MI} . Por el hecho de que un punto medio divide un segmento en dos segmentos congruentes, tenemos que $\overline{LN} = \overline{NI}$. Por otra parte, el ángulo interior $\angle N$ en ambos triángulos es el mismo por ser opuestos por el vértice común, denotado por la misma letra. Así, se cumplen las condiciones del criterio de congruencia (L-A-L), ambos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales, por tanto.

$$\angle LNM \cong \angle INA$$



Problema 4.1.8

Si el lado \overline{MA} es perpendicular al lado \overline{IA} , el lado \overline{LI} es perpendicular al lado \overline{AI} y $\angle\beta \cong \angle\alpha$.

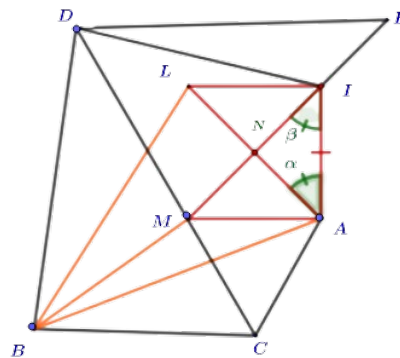


Demostrar que $\triangle MIA \cong \triangle LIA$.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.8 podemos visualizar que se tiene lados perpendiculares y ángulos congruentes.

Figura 4.8: Problema 8

**Nivel 2- Análisis:**

Por el nivel 1 se logra identificar los siguientes conceptos:

- Los lados \overline{MA} e \overline{LI} son perpendiculares a los lados \overline{AI} , lo que significa que la intersección de estos segmentos genera un ángulo de 90° .
- Los ángulos $\angle\beta$ e $\angle\alpha$ son congruentes, lo que significa que tienen la misma medida angular.

Nivel 3- Abstracción:

Por lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con ángulos y lados perpendiculares correspondientes. En general, si dos triángulos tienen ángulos y lados perpendiculares correspondientes, entonces los triángulos son congruentes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración: con la utilización del hecho de que dos ángulos congruentes forman un ángulo recto. En el caso de la figura 4.8 los lados \overline{MA} e \overline{LI} son perpendiculares a los lados \overline{AI} e \overline{IA} , respectivamente. Además, los ángulos $\angle\beta$ e $\angle\alpha$ son congruentes. Por lo tanto, los triángulos $\triangle MIA$ y $\triangle LIA$ tienen ángulos rectos en los vértices A e I , respectivamente.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

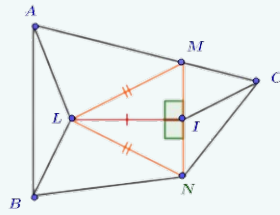
Por las relaciones de perpendicularidad se tiene que $\overline{MA} \perp \overline{AI}$ y $\overline{LI} \perp \overline{IA}$ se sigue que los triángulos $\triangle MAI$ y $\triangle LIA$ son triángulos rectángulos que comparten el lado \overline{IA} como cateto común. Como, por hipótesis, los ángulos adyacentes al cateto \overline{AI} son iguales, es decir, $\angle\beta \cong \angle\alpha$ se cumplen las condiciones correspondientes para triángulos rectángulos por cuanto tenemos que.

$$\triangle MIA \cong \triangle LIA.$$



Problema 4.1.9

Si el lado \overline{LI} es perpendicular al segmento \overline{MN} y $\overline{LM} \cong \overline{LN}$.

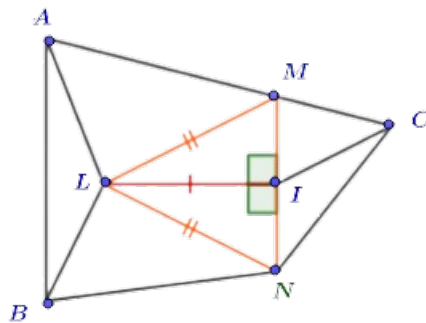


Demostrar que $\overline{MI} \cong \overline{NI}$.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la Figura 4.9. Se puede observar claramente la presencia de segmentos perpendiculares, lados congruentes y triángulos con ángulos rectos.

Figura 4.9: Problema 9

**Nivel 2- Análisis:**

A partir del nivel 1, podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.9 las propiedades que se repiten son:

- El lado \overline{LI} es perpendicular al segmento \overline{MN} , lo que significa que la intersección de estos segmentos generan ángulos de 90° .
- Los segmentos \overline{LM} y \overline{LN} son congruentes, lo que significa que tienen la misma medida de longitud.

Nivel 3- Abstracción:

Por lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de segmentos perpendiculares con lados congruentes. En general, si dos segmentos son perpendiculares y tienen lados congruentes correspondientes, entonces los segmentos son congruentes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: tomando el hecho de que los lados perpendiculares a un mismo segmento son congruentes. En el caso de la figura 4.9 el lado \overline{LI} es perpendicular al segmento \overline{MN} , y los segmentos \overline{LM} y \overline{LN} son congruentes. Por lo tanto, los segmentos \overline{MI} e \overline{IN} son congruentes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Por hipótesis, siendo \overline{LI} perpendicular al segmento \overline{MN} entonces \overline{LI} es perpendicular a los lados \overline{MI} y \overline{IN} pues son segmentos colineales. De este modo, los triángulos $\triangle MIL$ y $\triangle NIL$ son triángulos rectángulos, donde, comparten el cateto \overline{LI} .

Además, las hipotenusas respectivas se suponen también iguales, es decir, $\overline{LM} = \overline{LN}$.

De este modo, se cumplen las condiciones de un triángulos rectángulos, de donde $\triangle MIL \cong \triangle NIL$.

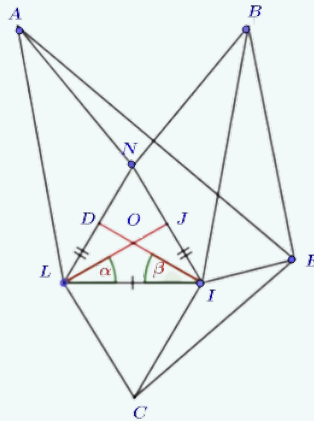
Ya que estos triángulos son iguales, entonces consecuentemente

$$\overline{MI} = \overline{IN}.$$



Problema 4.1.10

El $\triangle LNI$ es isósceles; D y J son los puntos medios de los lados \overline{LN} y \overline{NI} respectivamente.

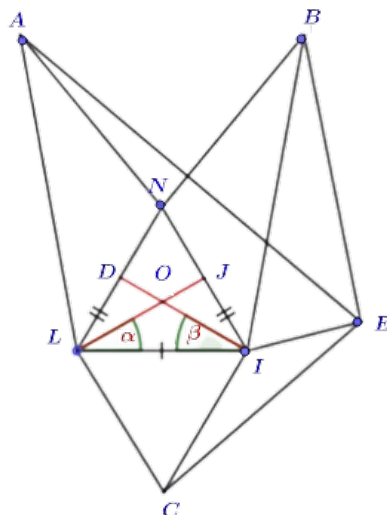


Demostrar que $\overline{LJ} = \overline{DI}$ y que $\angle\alpha = \angle\beta$.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la Figura 4.10. Se puede observar la presencia de triángulos, ángulos congruentes, lados congruentes y puntos medios de segmentos.

Figura 4.10: Problema 10



Fuente: Elaboración propia

Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.10 Las

propiedades que se repiten son:

- El triángulo $\triangle LNI$ es isósceles, por tanto los lados $\overline{LN} \cong \overline{NI}$: Un triángulo isósceles es un tipo de triángulo que tiene al menos dos lados de igual longitud.
- Los puntos D y J son los puntos medios de los lados \overline{LN} y \overline{NI} , respectivamente: El punto medio de un segmento es el punto que se encuentra exactamente a mitad de camino entre los dos extremos del segmento.

Nivel 3- Abstracción:

Por lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier triángulo isósceles con los puntos medios de sus lados. En general, si un triángulo es isósceles, entonces los puntos medios de sus lados son puntos equidistantes a los vértices del triángulo.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración: con la utilización del hecho de que los puntos medios de un segmento son equidistantes a los extremos del segmento.

En el caso de la figura 4.10 el triángulo $\triangle LNI$ es isósceles, y los puntos D y J son los puntos medios de los lados \overline{LN} y \overline{NI} , respectivamente. Por lo tanto, los segmentos \overline{LJ} y \overline{DI} son congruentes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Por hipótesis, al ser isósceles el triángulo $\triangle LNJ$, $\overline{LN} = \overline{NI}$ y $\angle L = \angle I$. Por otra parte, siendo D y J los puntos medios respectivos de los lados \overline{LN} y \overline{NI} se tiene que

$$\overline{LN} = \overline{DL} + \overline{DN} = 2\overline{DL}$$

$$\overline{NI} = \overline{JI} + \overline{NJ} = 2\overline{JI}$$

de donde tenemos que $\overline{DL} = \overline{JI}$.

Como la base \overline{LI} un lado común a los triángulos $\triangle LID$ y $\triangle ILJ$ resulta que estos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales, de donde, $\triangle LID \cong \triangle ILJ$.

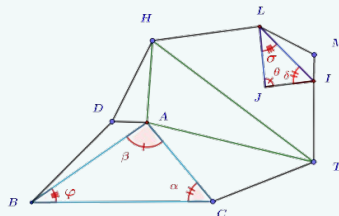
Al ser iguales los triángulos $\triangle LID$ y $\triangle ALJ$ los lados que se oponen, respectivamente a los ángulos $\angle L$ y $\angle I$ son iguales. Así, el lado \overline{DI} se opone al ángulo $\angle L$ y el lado \overline{LJ} se opone al ángulo $\angle I$, consecuentemente $\overline{DI} = \overline{LJ}$. De manera análoga, ya que $\triangle LID$ y $\triangle ILJ$ y $\overline{DL} = \overline{JI}$ los ángulos que se oponen a estos lados también son iguales. Es decir, como $\angle \alpha$ se opone al lado \overline{JI} y el $\angle \beta$ se opone al lado \overline{DL} se sigue que $\angle \alpha \cong \angle \beta$.



4.2. Problemas de semejanza de triángulos

Problema 4.2.1

Dado dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle JLI$ con $\angle \beta \cong \angle \theta$ y $\angle \alpha \cong \angle \delta$.

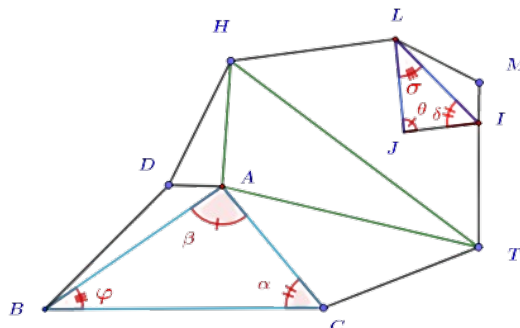


Demostrar que $\angle \varphi \cong \angle \sigma$ y $\triangle ABC \sim \triangle JLI$.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.11 se puede visualizar que los dos triángulos tienen dos ángulos congruentes correspondientes.

Figura 4.11: Problema 11



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1, podemos clasificar la propiedad que se observan en la figura 4.11, la propiedad que se repiten es:

- Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle JLI$ tienen dos ángulos congruentes correspondientes: Los ángulos congruentes son dos ángulos que tienen la misma medida, es decir, que tienen la misma amplitud o apertura.
- Los ángulos $\angle\beta \cong \angle\theta$ y $\angle\alpha \cong \angle\delta$: Los ángulos congruentes son dos ángulos que tienen la misma medida, es decir, que tienen la misma amplitud o apertura.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con dos ángulos congruentes correspondientes. En general, si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes correspondientes, entonces los triángulos son semejantes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de congruencia de triángulos por ángulos. En el caso de la figura 4.11, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle JLI$ tienen dos ángulos congruentes correspondientes. Por lo tanto, los triángulos son congruentes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Dado que $\angle\beta \cong \angle\theta$ y $\angle\alpha = \angle\delta$, podemos considerar la suma de ángulos en un triángulo:

En el triángulo $\triangle ABC$: $\angle\beta + \angle\alpha + \angle\varphi = 180^\circ$.

En el triángulo $\triangle JLI$: $\angle\theta + \angle\sigma + \angle\delta = 180^\circ$.

Sabemos que $\angle\beta = \angle\theta$ y $\angle\alpha = \angle\delta$, por lo que podemos reescribir las ecuaciones como:

$$\angle\beta + \angle\alpha + \angle\varphi = 180^\circ$$

$$\angle\theta + \angle\sigma + \angle\delta = 180^\circ$$

Restemos las dos ecuaciones para obtener:

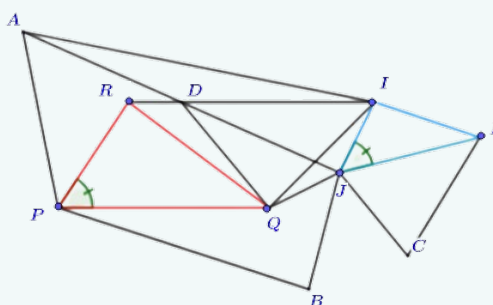
$$(\angle\beta + \angle\alpha + \angle\varphi) - (\angle\theta + \angle\sigma + \angle\delta) = 180 - 180$$

$$\angle\varphi = \angle\sigma$$

Por lo tanto, hemos demostrado que si $\angle\beta = \angle\theta$ y $\angle\alpha = \angle\delta$, entonces $\angle\varphi = \angle\sigma$. Así por el criterio de (A A A) hemos demostrado que $\triangle ABC \sim \triangle JLI$.

**Problema 4.2.2**

Dados los $\triangle PQR$ y $\triangle JLI$, tal que, $\frac{PQ}{JL} = \frac{RQ}{IL}$ y $\angle P = \angle J$.

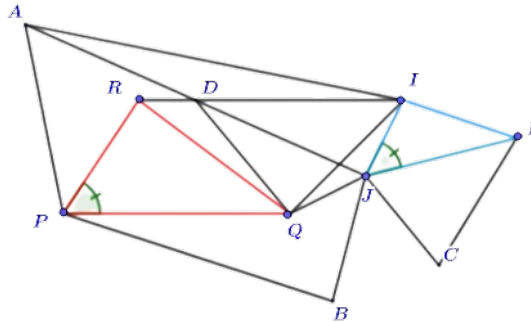


Demostrar que $\triangle PQR \sim \triangle JLI$.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.12 se puede visualizar que los dos triángulos tienen dos lados proporcionales y un ángulo congruente.

Figura 4.12: Problema 12



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.12, las propiedades que se repiten son:

- Los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle JLI$ tienen dos lados proporcionales $\frac{PQ}{JL} = \frac{RQ}{IL}$: Los segmentos proporcionales son dos segmentos de línea o segmentos de una figura geométrica que mantienen una relación de proporcionalidad entre sus longitudes.
- Los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle JLI$ tienen un ángulo congruente $\angle P = \angle J$: Los ángulos congruentes son dos ángulos que tienen la misma medida, es decir, que tienen la misma amplitud o apertura.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con dos lados proporcionales y un ángulo congruente. En general, si dos triángulos tienen dos lados proporcionales y un ángulo congruente, entonces los triángulos son semejantes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos por ángulos y lados.

En el caso de la figura, los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle JLI$ tienen dos lados proporcionales y un ángulo congruente. Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sean $\triangle PQR$ y $\triangle JLI$ dos triángulos con dos lados proporcionales y un ángulo congruente, por el criterio de semejanza de triángulos por ángulos y lados, tenemos que

$$\frac{PQ}{JL} = \frac{QR}{IL} = \frac{\angle P}{\angle J}$$

Por el hecho de que $\frac{PQ}{JL} = \frac{QR}{IL}$, tenemos que

$$\frac{PQ^2}{JL^2} = \frac{QR^2}{IL^2}$$

Por el hecho de que $\frac{PQ}{JL} = \frac{\angle P}{\angle J}$, tenemos que

$$\frac{PQ^2}{JL^2} = \frac{\angle P^2}{\angle J^2}$$

Por el hecho de que $\angle P = \angle J$, tenemos que $\frac{PQ^2}{JL^2} = 1$

Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{PQ}{JL} = \frac{JL}{PQ} = 1$$

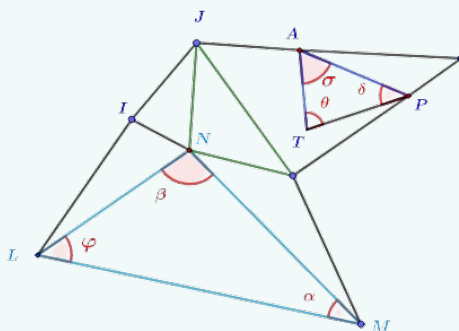
Por el criterio de semejanza de triángulos por lados iguales, tenemos que

$$\triangle PQR \sim \triangle JLI$$



Problema 4.2.3

Dado los triángulos $\triangle LMN$ y $\triangle PTA$, tal que $\frac{LM}{PA} = \frac{LN}{PT} = \frac{NM}{TA}$.

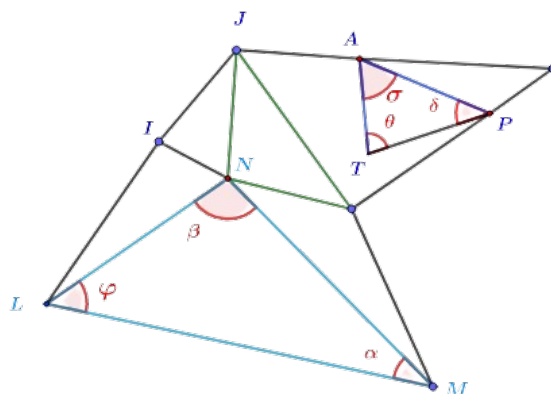


Demostrar que $\triangle LMN \sim \triangle PTA$

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.13 se puede visualizar que los dos triángulos tienen tres lados proporcionales.

Figura 4.13: Problema 13



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.13, las propiedades que se repiten son:

- Los triángulos $\triangle LMN$ y $\triangle PTA$ tienen tres lados proporcionales: Los segmentos proporcionales son dos segmentos de línea o segmentos de una figura geométrica que mantienen una relación de proporcionalidad entre sus longitudes.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con tres lados proporcionales. En general, si dos triángulos tienen tres lados proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos por lados.

En el caso de la figura 4.13, los triángulos $\triangle LMN$ y $\triangle PTA$ tienen tres lados proporcionales. Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sean $\triangle LMN$ y $\triangle PTA$ dos triángulos con tres lados proporcionales.

Por el criterio de semejanza de triángulos por lados, tenemos que

$$\frac{LM}{PA} = \frac{LN}{PT} = \frac{NM}{TA}$$

Por el hecho de que $\frac{LM}{PA} = \frac{LN}{PT}$, tenemos que

$$\frac{LM^2}{PA^2} = \frac{LN^2}{PT^2}$$

Por tanto, $\frac{LM}{PA} = \frac{NM}{TA}$, tenemos que

$$\frac{LM^2}{PA^2} = \frac{NM^2}{TA^2}$$

Entonces, $\frac{LM}{PA} = \frac{LN}{PT} = \frac{NM}{TA}$, tenemos que

$$\frac{LM^2}{PA^2} = \frac{LN^2}{PT^2} = \frac{NM^2}{TA^2}$$

Continuación de la demostración:

Por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\overline{LM}^2 + \overline{LN}^2 = \overline{PA}^2$$

$$\overline{LN}^2 + \overline{NM}^2 = \overline{PT}^2$$

$$\overline{NM}^2 + \overline{LM}^2 = \overline{TA}^2.$$

Tenemos que, $\frac{\overline{LM}^2}{\overline{PA}^2} = \frac{\overline{LN}^2}{\overline{PT}^2} = \frac{\overline{NM}^2}{\overline{TA}^2}$.

$$\overline{LM}^2 + \overline{LN}^2 = \frac{\overline{LM}^2}{\overline{PA}^2} \overline{PA}^2$$

$$\overline{LN}^2 + \overline{NM}^2 = \frac{\overline{LN}^2}{\overline{PT}^2} \overline{PT}^2$$

$$\overline{NM}^2 + \overline{LM}^2 = \frac{\overline{NM}^2}{\overline{TA}^2} \overline{TA}^2$$

De donde se tiene.

$$\overline{PA}^2 = \frac{\overline{LM}^2}{\overline{LM}^2 / \overline{PA}^2} \overline{PA}^2$$

$$\overline{PT}^2 = \frac{\overline{LN}^2}{\overline{LN}^2 / \overline{PT}^2} \overline{PT}^2$$

$$\overline{TA}^2 = \frac{\overline{NM}^2}{\overline{NM}^2 / \overline{TA}^2} \overline{TA}^2$$

Ahora tenemos que

$$\overline{PA} = \overline{LM}$$

$$\overline{PT} = \overline{LN}$$

$$\overline{TA} = \overline{NM}$$

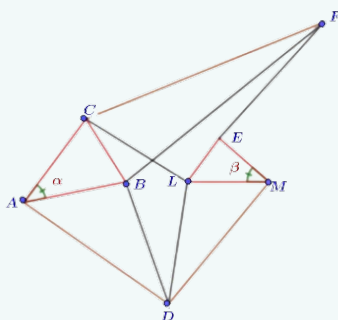
Por el criterio de semejanza de triángulos por lados iguales, tenemos que

$$\triangle LMN \sim \triangle PTA$$



Problema 4.2.4

Dado los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LEM$, tal que $\angle A \cong \angle L$, $\angle B \cong \angle J$ y $\angle C \cong \angle E$.

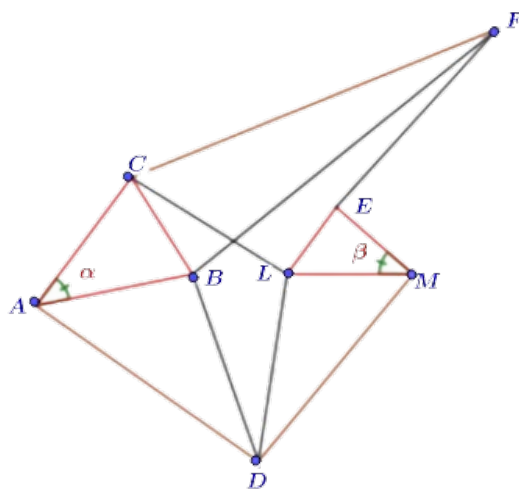


Demostrar que $\triangle ABC \sim \triangle LEM$.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.14 se puede visualizar que los dos triángulos tienen un ángulo congruente.

Figura 4.14: Problema 14

**Nivel 2- Análisis:**

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.13 por tanto las propiedades que se repiten son:

- Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LEM$ tienen un ángulo congruente: Los ángulos congruentes son dos ángulos que tienen la misma medida, es decir, que tienen la misma amplitud o apertura.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con un ángulo congruente. En general, si dos triángulos tienen un ángulo congruente, entonces los triángulos son semejantes.

Nivel 4- Deducción formal:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos por ángulos. En el caso de la figura, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LEM$ tienen un ángulo congruente. Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Para demostrar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LEM$ son semejantes, utilizaremos el criterio del Ángulo-Ángulo-Ángulo (A-A-A) de semejanza de triángulos.

El criterio A-A-A establece que dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos correspondientes congruentes.

En este caso, se observa la congruencia de dos pares de ángulos correspondientes:

$$\angle A \cong \angle L \text{ y } \angle C \cong \angle E.$$

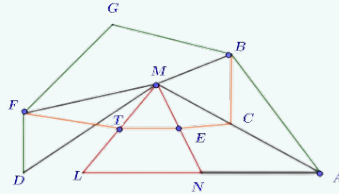
Por lo tanto, debido a que $\triangle ABC$ y $\triangle LEM$ comparten dos ángulos correspondientes congruentes, podemos afirmar que son semejantes. Se escribe como:

$$\triangle ABC \sim \triangle LEM$$



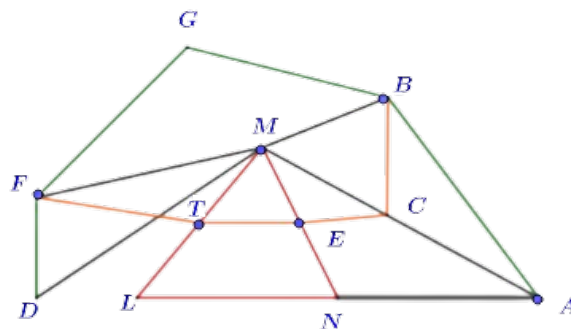
Problema 4.2.5

Dado un triángulo $\triangle LNM$, si, $\overline{TE} \parallel \overline{LN}$ y $\frac{\overline{ML}}{\overline{TL}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{EN}} = \frac{\overline{TE}}{\overline{LN}}$, entonces $\triangle LNM \sim \triangle TEM$.

**Nivel 1- Visualización:**

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.15 e puede visualizar que los dos triángulos tienen dos lados paralelos y dos lados proporcionales correspondientes.

Figura 4.15: Problema 15

**Nivel 2- Análisis:**

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.15 por tanto las propiedades que se repiten son:

- Los triángulos $\triangle LNM$ y $\triangle TEM$ tienen dos lados paralelos: Los lados paralelos se refieren a dos lados de una figura geométrica, como un cuadrilátero o un polígono, que se encuentran en la misma dirección y nunca se cruzan entre sí. Esto implica que los lados paralelos mantienen una distancia constante entre ellos a lo largo de su extensión.
- Los triángulos $\triangle LNM$ y $\triangle TEM$ tienen dos lados proporcionales correspondientes:

Los segmentos proporcionales son dos segmentos de línea o segmentos de una figura geométrica que mantienen una relación de proporcionalidad entre sus longitudes.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con dos lados paralelos y dos lados proporcionales correspondientes. En general, si dos triángulos tienen dos lados paralelos y dos lados proporcionales correspondientes, entonces los triángulos son semejantes.

Nivel 4- Deducción forma:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos por lados y ángulos.

En el caso de la figura 4.15 los triángulos $\triangle LNM$ y $\triangle TEM$ tienen dos lados paralelos y dos lados proporcionales correspondientes. Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sean $\triangle LNM$ y $\triangle TEM$ dos triángulos con dos lados paralelos y dos lados proporcionales correspondientes. Por el criterio (L-A-L) de semejanza de triángulos por lados y ángulos, tenemos que

$$\frac{\overline{ML}}{\overline{TL}} = \frac{\overline{EN}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{TE}}{\overline{LN}}$$

Por el hecho de que $\frac{\overline{ML}}{\overline{TL}} = \frac{\overline{TE}}{\overline{LN}}$, tenemos que

$$\frac{\overline{ML}^2}{\overline{TL}^2} = \frac{\overline{TE}^2}{\overline{LN}^2}$$

Continuación de la demostración:

Por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\overline{ML}^2 + \overline{MN}^2 = \overline{TL}^2 \overline{TE}^2 + \overline{EN}^2 = \overline{LN}^2$$

Por el hecho de que $\frac{\overline{ML}^2}{\overline{TL}^2} = \frac{\overline{TE}^2}{\overline{LN}^2}$, tenemos que

$$\overline{ML}^2 + \overline{MN}^2 = \frac{\overline{ML}^2}{\overline{TL}^2} \cdot \overline{TL}^2 \overline{TE}^2 + \overline{EN}^2 = \frac{\overline{TE}^2}{\overline{LN}^2} \cdot \overline{LN}^2$$

Por lo tanto, tenemos que

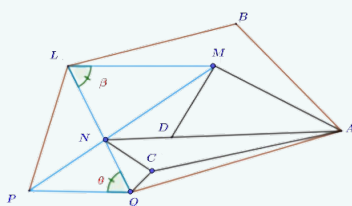
$$\overline{ML} = \frac{\overline{ML}}{\overline{TL}} \cdot \overline{TL} = \overline{TEEN} = \frac{\overline{EN}}{\overline{LN}} \cdot \overline{LN} = \overline{MN}$$

Por el criterio de semejanza de triángulos (L-L-L), tenemos que

$$\triangle LNM \sim \triangle TEM$$

**Problema 4.2.6**

Sean los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle LNM$, con $\frac{PQ}{LM} = \frac{RQ}{NM} = \frac{RP}{NL}$.

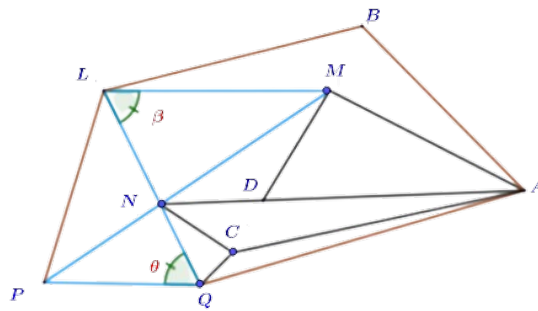


Demostrar que $\triangle PQR \sim \triangle LNM$.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.16 se puede visualizar que los dos triángulos tienen un ángulo congruente y lados proporcionales.

Figura 4.16: Problema 16



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.16 por tanto las propiedades que se repiten son:

- Los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle LNM$ tienen tres lados proporcionales.
- Sus lados proporcionales son $\frac{PQ}{LM} = \frac{RQ}{NM} = \frac{RP}{NL}$: Los segmentos proporcionales son dos segmentos de línea o segmentos de una figura geométrica que mantienen una relación de proporcionalidad entre sus longitudes.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con tres lados proporcionales correspondientes. En general, si dos triángulos tienen tres lados proporcionales correspondientes, entonces los triángulos son semejantes.

Nivel 4- Deducción forma:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos por lados. En el caso de la figura, los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle LNM$ tienen tres lados proporcionales correspondientes. Por lo tanto, los triángulos son semejantes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sean $\triangle PQR$ y $\triangle LNM$ dos triángulos con tres lados proporcionales correspondientes.

Por el criterio de semejanza de triángulos por lados, tenemos que

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{NL}}$$

Por el hecho de que $\frac{\overline{PQ}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{NM}}$, tenemos que

$$\frac{\overline{PQ}^2}{\overline{LM}^2} = \frac{\overline{RQ}^2}{\overline{NM}^2}$$

Por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 &= \overline{LM}^2 \\ \overline{RQ}^2 + \overline{NP}^2 &= \overline{NM}^2\end{aligned}$$

Por el hecho de que $\frac{\overline{PQ}^2}{\overline{LM}^2} = \frac{\overline{RQ}^2}{\overline{NM}^2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 &= \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{LM}^2} \cdot \overline{LM}^2 \\ \overline{RQ}^2 + \overline{NP}^2 &= \frac{\overline{NP}^2}{\overline{NM}^2} \cdot \overline{NM}^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

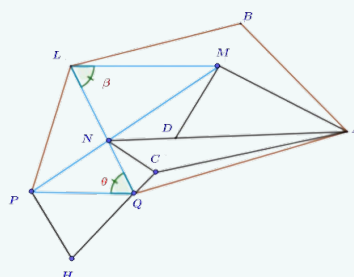
$$\overline{PQ} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{LM}} \cdot \overline{LM} = \overline{RQ} \cdot \frac{\overline{NP}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{NM}} \cdot \overline{NM} = \overline{RP}$$

Por el criterio de semejanza de triángulos por lados iguales, tenemos que $\triangle PQR \sim \triangle LNM$.



Problema 4.2.7

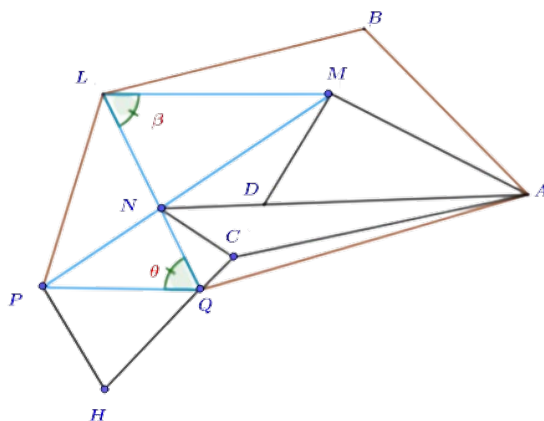
Dado $\frac{LN}{NQ} = \frac{NM}{PN}$, demuestre que $\angle L = \angle Q$ y $\triangle LMN \sim \triangle PQN$.



Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.16 donde se puede visualizar que los dos triángulos tienen dos lados proporcionales correspondientes y ángulos congruentes.

Figura 4.17: Problema 17



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.16 por tanto las propiedades que se repiten son:

- Los triángulos $\triangle LMN$ y $\triangle PQN$ tienen dos lados proporcionales $\frac{LN}{NQ} = \frac{NM}{PN}$: Los segmentos proporcionales son dos segmentos de línea o segmentos de una figura geométrica que mantienen una relación de proporcionalidad entre sus longitudes.
- Además posee los ángulos $\angle \theta \cong \angle \beta$: Los ángulos congruentes son dos ángulos que tienen la misma medida, es decir, que tienen la misma amplitud o apertura.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con dos lados proporcionales correspondientes. En general, si dos triángulos tienen dos lados proporcionales correspondientes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

Nivel 4- Deducción forma:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos (A-A-A).

En el caso de la figura 4.16 los triángulos $\triangle LMN$ y $\triangle PQN$ tienen dos lados proporcionales correspondientes. Por lo tanto, los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Sean $\triangle LMN$ y $\triangle PQN$ dos triángulos con dos lados proporcionales correspondientes.

Dado que $\frac{\overline{LN}}{\overline{NQ}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{PN}}$ estableásemos la igualdad de ángulos $\angle L = \angle Q$, observemos los triángulos $\triangle LMN$ y $\triangle PQN$. Utilizaremos la igualdad dada y la propiedad de lados proporcionales en triángulos semejantes.

De la igualdad dada $\frac{\overline{LN}}{\overline{NQ}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{PN}}$, multiplicamos en cruz para obtener:

$$\overline{LN} \cdot \overline{PN} = \overline{NQ} \cdot \overline{MN}$$

Esta igualdad implica que los segmentos $\overline{LN} \cdot \overline{PN}$ y $\overline{NQ} \cdot \overline{MN}$ son iguales, lo que sugiere la proporcionalidad de los segmentos entre los triángulos. Ahora, consideremos los triángulos $\triangle LMN$ y $\triangle PQN$. Por la propiedad de los segmentos proporcionales en triángulos semejantes, podemos afirmar que estos triángulos son semejantes.

Continuación de la demostración:

Una vez que se ha establecido la semejanza de los triángulos $\triangle LMN$ y $\triangle PQN$, podemos afirmar que los ángulos correspondientes entre triángulos semejantes son iguales.

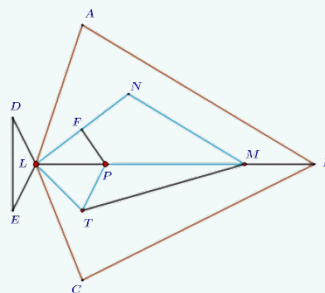
Por lo tanto, se concluye que $\angle L = \angle Q$ y que $\triangle LMN \sim \triangle PQN$.



Problema 4.2.8

Dado los segmentos proporcionales:

$$\frac{\overline{LN}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{LT}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{LP}}.$$

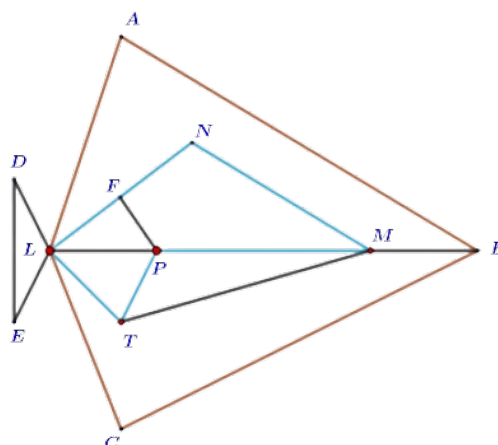


Demostrar que $\overline{NM} \parallel \overline{LT}$, y que los $\triangle LNM \sim \triangle LPT$

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las diferentes características que posee la figura 4.17 se puede visualizar que los dos triángulos tienen dos lados paralelos y dos lados proporcionales correspondientes

Figura 4.18: Problema 18



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.15 por tanto las propiedades que se repiten son:

- Los tres segmentos son proporcionales $\frac{\overline{LN}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{LT}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{LP}}$: Los lados proporcionales son lados de dos o más figuras geométricas que mantienen una relación de proporcionalidad entre sus longitudes. En otras palabras, si dos figuras geométricas son proporcionales, significa que los lados correspondientes de estas figuras están en proporción constante entre sí.
- Los lados paralelos $\overline{NM} \parallel \overline{LT}$: Los segmentos paralelos son dos segmentos de línea que se extienden en la misma dirección y nunca se cruzan, manteniendo siempre la misma distancia entre ellos.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de triángulos con tres lados proporcionales correspondientes. En general, si tres segmentos son proporcionales, entonces los triángulos formados por los extremos de los segmentos son semejantes.

Nivel 4- Deducción forma:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el criterio de semejanza de triángulos(L-L-L). En

el caso de la figura 4.17 los tres segmentos son proporcionales. Por lo tanto, los triángulos formados por los extremos de los segmentos son semejantes.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Dado que $\frac{\overline{LN}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{LT}}$, sabemos que los segmentos son proporcionales. Además, la igualdad $\frac{\overline{LN}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{LP}}$ nos proporciona otra proporción entre los segmentos.

Si observamos las proporciones dadas, notamos que $\frac{\overline{LN}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{LT}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{LP}}$. De estas relaciones, deducimos que $\frac{\overline{LM}}{\overline{LT}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{TP}}$.

Por la transitividad de la igualdad, $\frac{\overline{LM}}{\overline{LT}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{LT}}$. De esta última igualdad se sigue que $\overline{NM} \parallel \overline{LT}$, ya que los segmentos \overline{LM} y \overline{LN} son proporcionales a \overline{LP} y \overline{TP} , respectivamente, y tienen la misma razón de proporcionalidad con \overline{LT} .

Luego, sabemos que $\overline{NM} \parallel \overline{LT}$. Además, como hemos establecido que $\frac{\overline{LN}}{\overline{TP}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{LT}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{LP}}$, podemos afirmar que los triángulos $\triangle LNM$ y $\triangle LPT$ son semejantes por la propiedad de los lados proporcionales en triángulos semejantes.

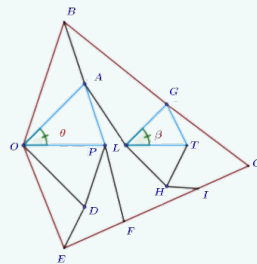
Por lo tanto, hemos demostrado que $\overline{NM} \parallel \overline{LT}$ y que los triángulos $\triangle LNM$ y $\triangle LPT$ son semejantes. ■

Problema 4.2.9

Dado los segmentos proporcionales:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{GL}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{LT}}$$

$$\angle O \cong \angle L$$

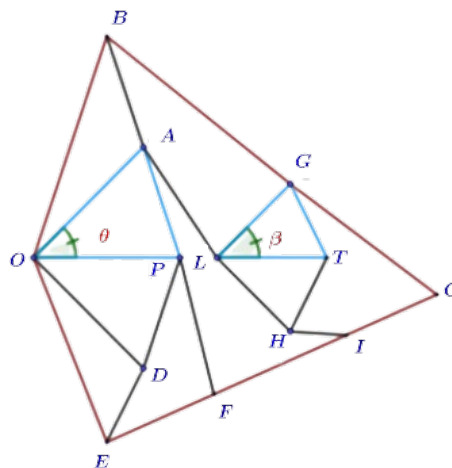


Demostrar que $\overline{OP} \cdot \overline{GT} = \overline{LT} \cdot \overline{AP}$.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.19 e puede visualizar que los dos triángulos tienen dos lados paralelos y dos lados proporcionales correspondientes.

Figura 4.19: Problema 19



Nivel 2- Análisis:

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.18 por tanto las propiedades que se repiten son:

- Dos segmentos proporcionales $\frac{\overline{AO}}{\overline{GL}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{LT}}$: Los segmentos proporcionales son dos segmentos de línea o segmentos de una figura geométrica que mantienen una relación de proporcionalidad entre sus longitudes.
- Dos ángulos $\angle O \cong \angle L$: Los ángulos congruentes son dos ángulos que tienen la misma medida, es decir, que tienen la misma amplitud o apertura.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1 y 2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de segmentos proporcionales con ángulos congruentes. En general, si dos segmentos son proporcionales con ángulos congruentes, entonces los productos de los segmentos correspondientes son iguales.

Nivel 4- Deducción forma:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el teorema de Pitágoras. En el caso de la figura, los dos segmentos \overline{AO} y \overline{OP} son proporcionales con ángulos congruentes. Por lo tanto, los productos de los segmentos correspondientes son iguales.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Dadas las relaciones de proporcionalidad entre segmentos y la congruencia de ángulos, consideramos los triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle GLT$. Observamos que los segmentos \overline{AO} , \overline{OP} y \overline{AP} forman el triángulo $\triangle AOP$, mientras que los segmentos \overline{GL} , \overline{LT} y \overline{GT} forman el triángulo $\triangle GLT$.

Por la hipótesis dada, se tiene la proporción $\frac{\overline{GL}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{LT}}{\overline{OP}}$. Además, $\angle O \cong \angle L$ por la hipótesis.

Utilizando el criterio de semejanza (L-A-L), concluimos que los triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle GLT$ son semejantes. Dado que los triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle GLT$ son semejantes, se cumple la igualdad de razones de sus lados correspondientes:

$$\frac{\overline{LT}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{GT}}{\overline{AP}}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $\overline{LT} \cdot \overline{GT}$, obtenemos:

$$\overline{OP} \cdot \overline{GT} = \overline{LT} \cdot \overline{AP}$$

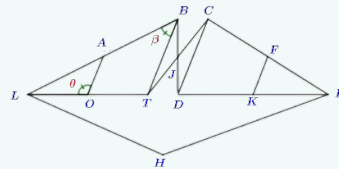
Por lo tanto, utilizando la semejanza de los triángulos $\triangle AOP$ y $\triangle GLT$, hemos establecido la igualdad deseada $\overline{OP} \cdot \overline{GT} = \overline{LT} \cdot \overline{AP}$.



Problema 4.2.10

Dado los ángulos proporcionales:

$$\angle O = \angle B$$

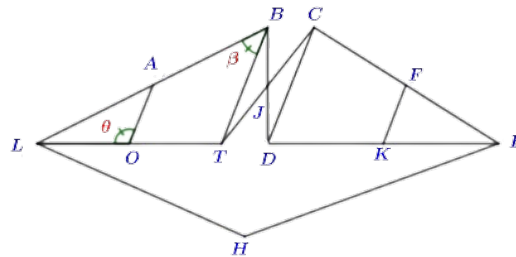


Demostrar que $\frac{\overline{LA}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{LT}}{\overline{BT}}$.

Nivel 1- Visualización:

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.19 se puede observar que los dos ángulos congruentes y segmentos proporcionales.

Figura 4.20: Problema 20

**Nivel 2- Análisis:**

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.19 por tanto las propiedades que se repiten son:

- Dos ángulos congruentes $\angle O = \angle B$: Los ángulos congruentes son dos ángulos que tienen la misma medida, es decir, que tienen la misma amplitud o apertura.
- segmentos proporcionales $\frac{\overline{LA}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{LT}}{\overline{BT}}$: Los segmentos proporcionales son dos segmentos de línea o segmentos de una figura geométrica que mantienen una relación de

proporcionalidad entre sus longitudes.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1,2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de ángulos congruentes. En general, si dos ángulos son congruentes, entonces las razones de los lados opuestos a esos ángulos son iguales.

Nivel 4- Deducción forma:

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3, podemos abordar la demostración de la siguiente manera: podemos utilizar el teorema de semejanza de triángulos por ángulos. En el caso de la figura 4.19 los dos ángulos $\angle O$ y $\angle B$ son congruentes. Por lo tanto, las razones de los lados opuestos a esos ángulos son iguales.

Nivel - Rigor:

Demostración:

Dada los segmentos \overline{LA} y \overline{LT} son adyacentes a $\angle O$, y los segmentos \overline{AO} y \overline{BT} son adyacentes a $\angle B$.

Por la hipótesis, tenemos que $\angle O = \angle B$. Por lo tanto, los ángulos $\angle OLA$ y $\angle BLT$ son suplementarios.

Como los ángulos $\angle OLA$ y $\angle BLT$ son suplementarios, se cumple que:

$$\angle OLA + \angle BLT = 180^\circ$$

Restando ambos lados de la igualdad por $\angle B$, obtenemos:

$$\angle OLA = 180^\circ - \angle B$$

Por el teorema de la proporción de los ángulos, tenemos que:

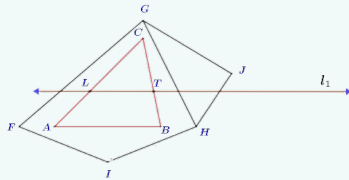
$$\frac{\overline{AO}}{\overline{LA}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{LT}}$$



Problema 4.2.11

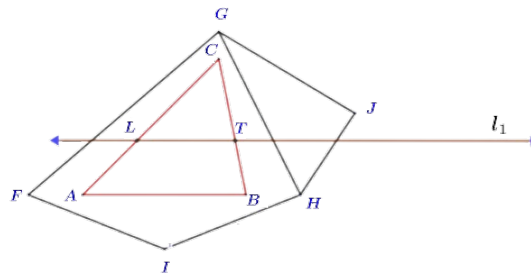
Sea $\triangle ABC$ un triángulo y l_1 un recta paralela al segmento \overline{AB} , entonces

$$\frac{LC}{AC} = \frac{CT}{CB}$$

**Nivel 1- Visualización:**

Comenzamos por reconocer las distintas propiedades que posee la figura 4.20 podemos observar que una recta es paralela a un segmento.

Figura 4.21: Problema 21

**Nivel 2- Análisis:**

A partir del nivel 1 podemos clasificar las propiedades que se observan en la figura 4.18 por tanto las propiedades que se repiten son:

- La recta l_1 es paralela al segmento \overline{AB} : Los segmentos paralelos son dos segmentos de línea que se extienden en la misma dirección y nunca se cruzan, manteniendo siempre la misma distancia entre ellos.
- El triángulo $\triangle ACB$: Un triángulo es una figura geométrica plana compuesta por tres segmentos de línea recta, llamados lados, que se intersecan en tres puntos no colineales, llamados vértices.

Nivel 3- Abstracción:

Con lo expuesto en los niveles 1,2 podemos generalizar el patrón observado a cualquier par de rectas paralelas. En general, si dos rectas son paralelas, entonces los segmentos perpendiculares a ellas desde un mismo punto son iguales.

Nivel 4- Deducción formal :

Basándonos en los aportes realizados por los niveles 1, 2 y 3 podemos utilizar el teorema de los ángulos correspondientes.

En el caso de la figura, la recta l_1 es paralela al segmento \overline{AB} . Por lo tanto, los segmentos perpendiculares a ellas desde un mismo punto son iguales.

Nivel 5- Rigor:

Demostración:

Para demostrar que en un triángulo $\triangle ABC$ con una recta l_1 paralela al segmento \overline{AB} , se cumple que $\frac{\overline{LC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{CB}}$, podemos emplear la propiedad de proporcionalidad de los triángulos proporcionales a lados paralelos en un triángulo.

Dada la recta l_1 paralela a \overline{AB} , forma segmentos \overline{AC} , \overline{CB} , \overline{CT} , y \overline{LC} en el triángulo $\triangle ABC$, y estos segmentos intersectan a l_1 como se muestra en la figura 4.20.

Dado que l_1 es paralela a \overline{AB} , según la propiedad de lados paralelos en un triángulo, se cumple que los segmentos \overline{LC} y \overline{CT} son proporcionales a los segmentos \overline{AC} y \overline{CB} , respectivamente. Entonces, se tiene:

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{CB}}$$

Esta es la relación de proporción requerida entre los segmentos en el triángulo $\triangle ABC$ cuando una recta l_1 es paralela al segmento \overline{AB} .



Bibliografía

- [Barrera, Reyes] **Barrera Mora, Fernando y Reyes Rodríguez, Aarón**, 2015. La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento Geométrico. *Padi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI* [en línea]. México: ICBI, no.3, pp.3-5 [consulta: Septiembre del 2023]. e-ISSN: 2007-6363. Disponible en: <https://doi.org/10.29057/icbi.v3i5.554>
- [Bastidas] Orihuela Bastidas, Julio, 2021. Congruencia de triángulos [en línea]. Perú: Cuzcan [consulta: 05 de diciembre 2023]. Disponible en: <https://archive.org/details/03-congruencia-de-triangulos/mode/2up>.
- [Cabello] **Cabello Pardo, Ana Belén**, 2013. *La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de abril* [en línea]. Tesis doctoral. España: Universidad de Salamanca [consulta: 29 de septiembre 2023]. Disponible en: https://gredos.usal.es/bitstream/10366/122919/1/DMA_CabelloPardos_AnaBelen_modelizacion_Van_Hiele.pdf
- [Cid] Cid Figueroa, Eduardo, 2009. *Geometría para la enseñanza media*. Chile: Editorial Cid. ISBN: 978 956 7705 17 7
- [Domingues] **Domínguez Zermeño, Santiago**, 2014. Pruebas y demostraciones. *Revista de Lógica y Filosofía de la Ciencia* [en línea]. Argentina: Universidad de Buenos Aire, no.2, pp. 1-9 [consulta: Octubre de 2023]. 10.24215/2797814X.2023.2.1. Disponible en: http://www.cienciorama.unam.mx/a/pdf/314_cienciorama.pdf
- [fernandez] **Fernández Nieto, Ever Lafaid**, 2018. La geometría para la vida y su enseñanza. En: *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería* [en línea]. Disponible en: [consulta: fecha de consulta].

- [Galindo] Galindo Trejo, Héctor Alejandro, et al., 2006. *Geometría y trigonometría*. México: Umbral. ISBN 970-9758-39-X.
- [Galindo] Recalde, Luis Cornelio y Murillo, Diana Marcela, 2026. Los orígenes de la geometría. *in revista de ciencias* [en línea]. Colombia:Revista de Ciencias, no.20, pp. 1-10, [consulta: diciembre de 2023]. ISSN 2697-343X. Disponible en: https://revistaciencias.univalle.edu.co/index.php/revista_de_ciencias/article/view/4677/10989
- [Gamboa] **Gamboa Araya , Ronny y Vargas Vargas, Gilberto.** 2012. El modelo de van hiele y la enseñanza de la geometría. *www.revistas.una.ac.cr/uniciencia* [En línea]. Costa Rica: uniciencia, no.1, pp.74-94 [Consulta: 22 de septiembre del 2023]. ISSN 1101 – 0275. Disponible en: <https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia...>
- [Invanep] Desarrollo cognitivo del ser humano. *Invanep* [en línea]. 30 de diciembre de 2022 [consultado el 30 de octubre de 2023]. Disponible en: https://invanep.com/blog_invanep/desarrollo-cognitivo-del-ser-humano
- [Linares] Linares, Luis José Alias, 2012. Euclides, el padre de la Geometría. *Academia de ciencias de la región de murcia* [en línea]. España: Boletín de la Real Academia de Ciencias de la Región de Murcia, no. 44, pp. 1-3, [consulta: diciembre de 2023]. ISSN 171-197. Disponible en: <https://www.um.es/acc/euclides-el-padre-de-la-geometria/>
- [Lira] Lira Contreras, Ana Rosa, et al.,2006. *Geometría y trigonometría*. Mexico: Unbral. ISBN 970-9758-34-9
- [May] May Cen, Iván de Jesús y Polya, George, 2015. George Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas *Cómo plantear y resolver problemas* [en línea]. México: Trillas, no.03, pp. 419-420 215 [Consulta: 6 de diciembre de 2023]. ISSN: 2007-8064. Disponible en:<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=457644946012>
- [Perez] **Pérez Venega María.** 2015. *Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con alumnos de 13 a 16 años en cantabria* [En línea]. Tesis Maestría. España: Universidad de Cantabria [Consulta: 22 de

septiembre del 2023]. Disponible en: <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6837/VenegasPerezIrene.pdf>

[Rivera] **Francisco Rivero**. 2023. 12 Variantes sobre el mismo tema o una demostración de como demostrar. *Revista de Filosofía* [en línea]. Argentina: Revista de Filosofía, no.3, 2023, pp.1-20 [consulta: Noviembre del 2023]. e-ISSN: 2707-2783. Disponible en: <https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2014/10/demostraciones2.pdf>

[Rojas] Rojas Cárdenas, Luis Enrique, Ramírez Baracaldo, Arturo y Rojas Cortés, Lucio, 2023. *Matemáticas básica con aplicaciones a la ingeniería* . Colombia: Ecoe ediciones. ISBN: 978 956 7705 17 7

[Romero] **Romero, Enzo Martín**. 2021. *El proceso de enseñanza – aprendizaje de la geometría y sus dificultades* [En línea]. Tesis. España: Universidad pública en San Cristóbal de La Laguna [Consulta: 22 de septiembre del 2023]. Disponible en: <https://riull.u11.es/xmlui/handle/915/25425?locale-attribute=en>

[Venegas] **Venegas Pérez, María**, 2015. *Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con alumnos de 13 a 16 años en cantabria* [en línea]. Trabajo fin de máster. España: Universidad de Cantabria [consulta: octubre 2023]. Disponible en: <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/6837?show=full>

[Vila] Vila, Anton y Callejo Ma Luz. *Matemáticas para aprender a pensar*. España: Narcea . ISBN: 9788427730687, 8427730683



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
CERTIFICADO DE CUMPLIMIENTO DE LA GUÍA PARA
NORMALIZACIÓN DE TRABAJOS DE FIN DE GRADO

Fecha de entrega: 13/06/2024

INFORMACIÓN DEL AUTOR

Nombres – Apellidos: Andy Omar López Salcan

INFORMACIÓN INSTITUCIONAL

Facultad: Ciencias

Carrera: Matemática

Título a optar: Matemático

Ms.C. Ramón Antonio Abancín Ospina
Director del Trabajo de Integración Curricular

Dr. Carlos Eduardo Cova Salaya
Asesor del Trabajo de Integración Curricular