ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN A LA INTEGRACIÓN EN TÉRMINOS FINITOS

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: RODERICK ALEXANDER HACKNEY GAROFALO

DIRECTOR: Dr. RAMÓN ANTONIO ABANCÍN OSPINA, MSc.

Riobamba – Ecuador

2024

Yo, Roderick Alexander Hackney Garofalo, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 21 de noviembre de 2023

Roderick Alexander Hackney Garofalo
0604702092

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación, **INTRODUCCIÓN A LA INTEGRACIÓN EN TÉRMINOS FINITOS**, realizado por el señor: **RODERICK ALEXANDER HACKNEY GAROFALO**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
Dra. Martha Ximena Davalos Villegas **PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**		20/05/2024
Dr. Ramón Antonio Abancín Ospina **DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		20/05/2024
Dr. Carlos Eduardo Cova Salaya **ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		20/05/2024

DEDICATORIA

A todos quienes hicieron posible este trabajo.

Roderick

AGRADECIMIENTO

A todos quienes hicieron posible este trabajo.

Roderick

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

La Carrera de Matemática de la ESPOCH aborda el tema de integración en la materia de Análisis Matemático, sin embargo, se evidencia una carencia en el enfoque hacia la integración en términos finitos puesto que este tema no es abordado en el programa de estudio de la materia. Por ello, este trabajo tiene como propósito desarrollar un documento destinado a servir como guía de estudio para los estudiantes del Análisis Matemático, centrándose específicamente en la integración en términos finitos. El enfoque de este trabajo de investigación es de índole documental, con una orientación cualitativa que se justifica por la revisión bibliográfica relacionada con el tema. Se llevó a cabo un estudio detallado basado en la selección de las fuentes bibliográficas más destacadas, explorando teoremas y lemas que determinan la existencia de la antiderivada elemental de una función elemental. Adicionalmente, se abordaron métodos numéricos para calcular la integral de una función dada, siempre y cuando sea factible. Al concluir esta investigación, se ha elaborado el documento titulado *Introducción a la Integración en Términos Finitos*, el cual se anticipa proporcionará una comprensión más profunda a los estudiantes de la Carrera de Matemática. Este documento les permitirá determinar fácilmente si una función elemental posee una antiderivada elemental. Como una extensión sugerida para la presente investigación, se propone llevar a cabo un estudio acerca de la existencia de antiderivadas de funciones en el ámbito de los números complejos o en espacios de dimensiones superiores. Asimismo, se sugiere la formulación de métodos más eficaces para el cálculo de integrales.

Palabras clave: <MATEMÁTICA>, <INTEGRACIÓN>, <ANÁLISIS MATEMÁTICO>, <ÁLGEBRA DIFERENCIAL>, <INTEGRALES>, <FUNCIONES ELEMENTALES>, <CAMPOS DIFERENCIALES >, <MÉTODOS NUMÉRICOS>.
0574-DBRA-UPT-2024

SUMMARY/ABSTRACT

The Mathematics program at ESPOCH addresses the topic of integration within the course Mathematical Analysis. However, a lack of focus on integration in finite terms is evidenced, as this topic is not covered in the course curriculum. Therefore, this research aims to develop a document intended to serve as a study guide for students of Mathematical Analysis, focusing specifically on finite integration. The approach of this research work is documentary in nature, with a qualitative orientation justified by the literature review related to the topic. A detailed study was conducted based on the selection of the most outstanding bibliographic sources, exploring theorems and lemmas that determine the existence of the elementary antiderivative of an elementary function. Additionally, numerical methods to calculate the integral of a given function when feasible, were addressed. At the conclusion of this research, a document titled Introduction to Finite Term Integration was produced, which is expected to provide a deeper understanding for students of the Mathematics program. This document will allow them to easily determine whether an elementary function has an elementary antiderivative. As a suggested extension to the present research, it is proposed to carry out a study on the existence of antiderivatives of functions in the realm of complex numbers or in higher-dimensional spaces. Furthermore, the formulation of more efficient methods for calculating integrals is also recommended.

Keywords: <MATHEMATICS>, <INTEGRATION>, <MATHEMATICAL ANALYSIS>, <DIFFERENTIAL ALGEBRA>, <INTEGRALS>, <ELEMENTARY FUNCTIONS>, <DIFFERENTIAL FIELDS>, <NUMERICAL METHODS>.

Lic. María Eugenia Camacho, M.Sc.
0601609597

INTRODUCCIÓN

Dentro de los varios campos de estudio de la matemática, el Análisis Matemático destaca puesto que aborda varios conceptos de gran relevancia, como funciones, series, límites, derivación e integración. En este contexto, surge el concepto de función elemental, la cual se define como una función que va de los reales a los complejos y que se expresa mediante operaciones aritméticas finitas y composición finita de funciones algebraicas, logarítmicas y exponenciales. Algunos ejemplos de funciones elementales incluyen a las funciones polinomiales, racionales y algebraicas, por otro lado, algunos ejemplos de funciones no elementales son: la función Gamma, la función Zeta de Riemman, la función error, entre otros.

Por otro lado, la derivación de funciones elementales es un proceso usualmente sencillo, ya que únicamente se debe seguir una serie de reglas. Sin embargo, la integración de funciones elementales no es tan sencilla, a pesar de que existen numerosas técnicas de integración, como la sustitución, la integración por partes, la integración trigonométrica, la sustitución trigonométrica y las fracciones parciales entre otras. Estas técnicas no siempre son efectivas para hallar una antiderivada en forma elemental de una función elemental, por ejemplo, la función $f(x) = e^{x^2}$ no posee una antiderivada elemental, esto puede ser demostrado como resultado del teorema de Liouville, el cual será demostrado más adelante. Cabe recalcar que existe una cantidad infinita de funciones que no poseen una antiderivada en forma elemental, además que operaciones algebraicas finitas o composición finita de funciones elementales no siempre resulta en una función sin primitiva elemental.

Vale recalcar que el cálculo de integrales resulta ser sumamente útil en varias áreas, pero al no poseer la antiderivada elemental de una función no se puede recurrir a los teoremas fundamentales del cálculo para calcular la integral, por lo que el uso de métodos numéricos será de suma utilidad.

Dentro de la Carrera de matemática de la ESPOCH aunque se imparte la cátedra de Análisis Matemático no se llega a abordar no esta temática (Integración en términos finitos) por lo que este trabajo surge como respuesta a esta carencia, sirviendo de guía a los estudiantes y personas interesadas en el tema, así se estructuró el presente trabajo en 5 capítulos, y un documento adjunto.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Plantamiento del problema

La Escuela Superior Politécnica de Chimborazo posee una amplia cantidad de documentos dedicados al Análisis matemático y al Cálculo Integral. A pesar de esta riqueza documental, es importante destacar que estas áreas de conocimiento son tan vastas que no se logra abordar exhaustivamente todos los temas que engloban. Un aspecto específico que ha quedado en segundo plano es la integración en términos finitos, un tema particularmente intrigante y de gran relevancia en el contexto del análisis matemático, la complejidad y profundidad de la integración en términos finitos hace evidente la necesidad de contar con documentación especializada que se adentre de manera detallada en este tema específico. Esta carencia de información detallada representa una oportunidad para la generación de contenido que permita a los estudiantes y entusiastas de las matemáticas comprender de manera más completa y rigurosa esta área específica del conocimiento matemático. La creación de documentación que aborde la integración en términos finitos no solo llenaría este vacío, sino que también enriquecería el panorama académico y proporcionaría una herramienta valiosa para aquellos que buscan una comprensión más profunda y especializada en el fascinante mundo del cálculo integral.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo General*

Realizar un estudio general del tema de integración en términos finitos, basado en la bibliografía existente más importante (Principalmente en el trabajo de Liouville en el área), con el fin de elaborar un documento que sirva de guía de estudio para los alumnos de Análisis Matemático de la Carrera de Matemática en la ESPOCH.

1.2.2. *Objetivos especificos*

- Explorar algunos de los desarrollos históricos más importantes de la integración en términos finos, incluyendo el trabajo de importantes matemáticos como Riemann, Lebesgue, y otros utilizando archivos históricos relacionados con el tema, para tener un mejor trasfondo histórico.

- Estudiar las propiedades de las integrales no elementales, empleando teoremas, lemas y corolarios relacionados con ellas en pro de una mejor comprensión del tema.

- Analizar diferentes técnicas para resolver integrales no elementales, incluyendo algunos métodos numéricos, expansiones en serie y funciones especiales, utilizando las propiedades de este tipo de integrales para resolver cualquier tipo de integral definida.

- Desarrollar un documento que sirva de guía para estudiantes del Análisis Matemático de la Carrera de Matemática (estructurado en cuatro capítulos) aplicando un enfoque cualitativo según indica (Namakforoosh, 2000).

1.3. Justificación

El concepto de integración surge como una piedra angular del Análisis Matemático, especialmente en el Cálculo. Su dominio no solo abre las puertas a una comprensión profunda de los fenómenos físicos y naturales, sino que también facilita la comprensión de otras áreas de la matemática.

Sin embargo, la ESPOCH carece de material bibliográfico específico sobre este tema. Esta vacío en la documentación sobre la integración en términos puede repercutir negativamente en el aprendizaje y la capacidad de los estudiantes para aplicar estos conceptos dentro de la matemática misma, así como en situaciones prácticas dentro de la ingeniería o las ciencias económicas.

El propósito de este proyecto de integración curricular es subsanar esta carencia, proporcionando a los estudiantes de la ESPOCH una monografía titulada *Introducción a la Integración en Términos Finitos* que les permita comprender mejor este tema, esta monografía apunta a presentar algunos teoremas denominados teoremas de imposibilidad, que sirven para determinar si una función elemental puede poseer una antiderivada que sea elemental, además se va a estudiar métodos para determinar la integral de una función siempre y cuando esto sea posible.

Así este proyecto servirá como fuente de consulta a los estudiantes que estén estudiando las integrales, además de cualquier persona interesada en el tema.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

El concepto de integración es fundamental en el Análisis Matemático porque nos permite calcular volúmenes, encontrar el área bajo una curva y resolver ecuaciones diferenciales, entre otras cosas, dentro del mismo destaca una de sus ramas que busca encontrar soluciones precisas a integrales utilizando una combinación finita de funciones elementales, constantes y operaciones matemáticas básicas.

La búsqueda de soluciones en términos finitos ha llevado a la creación de una variedad de enfoques y estrategias de integración. Las reglas fundamentales de integración, como la regla de potencia, la regla de constante y la regla de suma, así como los métodos de integración como la integración por sustitución, por partes, trigonométrica y fracciones parciales, sirven como base para determinar si una función f puede ser integrada en términos finitos (Stewart, 2015). Estos enfoques sistemáticos ayudan a los matemáticos a desentrañar soluciones básicas para una amplia gama de funciones, brindándoles herramientas para determinar si una función posee una antiderivada elemental.

A pesar de su importancia, la integración indefinida tiene limitaciones. No todas las funciones poseen antiderivadas escritas en términos finitos. Ciertos tipos de funciones, como los polinomios, tienen antiderivadas bien definidas que pueden expresarse en términos finitos (e.g, $\int x dx = x^2/2 + c \ : \ c \in \mathbb{R}$). Sin embargo, muchas funciones carecen de antiderivada en terminos finitos, por lo que si queremos hallar la integral definida de una función sobre un intervalo no será posible utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo, por lo que será necesario el uso de métodos numéricos.

Un ejemplo clásico de una función que no tiene una antiderivada que se puede expresar en términos finitos es $f(x) = e^{-x^2}$ que se utiliza para definir la función de error de la siguiente manera:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

esta función es una herramienta valiosa para comprender y analizar las distribuciones gaussianas y los fenómenos relacionados. Además, la función de error puede utilizarse para hallar integrales de funciones dadas, por ejemplo:

$$\int \operatorname{sen}(x^2)dx = \frac{\sqrt{2}i+\sqrt{2}}{4} \cdot erf\left(\frac{\sqrt{2}i+\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{4} \cdot erf\left(\frac{\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{2}\right)$$

este ejemplo puede encontrarse en (Cherry, 1985).

Además, la integración en términos finitos tiene múltiples usos en varios campos ya sea dentro de la matemática mismo o en la ingeniería.

2.1. Referencias teóricas

En este estudio de investigación, se plantea llevar a cabo una búsqueda, recopilación, análisis y redacción de material bibliográfico relevante sobre el tema de Integración en términos finitos. El objetivo principal es elaborar un documento guía de estudio. Además, es importante destacar la selección cuidadosa de fuentes bibliográficas especializadas en matemáticas que se utilizarán durante la realización de este proyecto de investigación documental. A continuación, se presentan las referencias bibliográficas consideradas para este propósito:

- Calculus. (Stewart, 2015).
- Integration in finite terms with special functions: the error function. (Cherry, 1985)
- An invitation to integration in finite terms. (Marchisotto y Zakeri, 1994).
- The problem of integration in finite terms. (Risch, 1969)

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

Debido al propósito del proyecto de investigación, se puede decir que tiene un enfoque cualitativo, ya que con base en la selección bibliográfica más sobresaliente referente al tema de integración en términos finitos, se realizó una investigación, que apoyará a los futuros estudiantes de Análisis Matemático de la ESPOCH, a comprender el tema presentado.

Segundo, el alcance de la investigación abarca la búsqueda, recopilación y análisis de material bibliográfico específico relacionado con la integración en términos finitos. Se procura proporcionar una guía completa de estudio que permita a los estudiantes y personas interesadas en el tema comprender y aplicar eficientemente estos conceptos matemáticos.

Tercero, el diseño de la investigación se enmarca en un enfoque documental, debido a que se recopilan, analizan y sintetizan datos provenientes de fuentes bibliográficas especializadas en el Análisis Matemático.

Cuarto, esta investigación se basa en la revisión de literatura especializada en la integración en términos finitos para la recopilación de información y la elaboración de un documento guía, lo que la clasifica como documental, además se debe recalcar que esta no implica la recopilación de datos de primera mano ni la realización de experimentos.

Quinto, los métodos utilizados incluyen la búsqueda de fuentes bibliográficas especializadas en integración en términos finitos, el análisis crítico de la información recopilada y la síntesis coherente de los hallazgos.

Sexto, la selección cuidadosa de referencias bibliográficas pertinentes, el análisis comparativo de enfoques teóricos y la organización sistemática de la información recopilada son los principales técnicas utilizadas, por otro lado, para presentar los conceptos clave de la integración en términos finitos, se utilizan técnicas de síntesis.

Por último, los instrumentos utilizados incluyen bases de datos académicas, bibliotecas virtuales y repositorios especializados en matemática. La monografía resultante busca presentar la información mas importante hallada al momento de realizar la investigación, por lo que el presente trabajo de investigación es de tipo documental, puesto que utiliza como fuente primaria de datos información certificada que puede encontrarse en libros y artículos relacionados al tema. Vale recalcar que se hizo uso del editor de texto LaTeXpara la redacción del documento.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En el presente capítulo, se expondrán los resultados alcanzados al culminar este proyecto de investigación. La redacción de este apartado se justifica por la necesidad de resumir y describir de manera concisa los logros y contribuciones obtenidos a lo largo del estudio. Como producto principal de esta investigación, se ha generado un documento guía de estudio que comprende tres capítulos para su análisis, junto con un apéndice. La estructura de estos elementos se organizó estratégicamente, considerando su complejidad, con el objetivo de facilitar una comprensión más efectiva por parte del lector interesado en el tema.

Para tal propósito se estructuró el documento guía de la siguiente forma:

- Introducción
- Capítulo 1: Funciones
  1. Funciones Elementales
  2. Funciones no Elementales
  3. Propiedades de las Funciones Elementales
- Capítulo 2: Integración de Funciones Elementales
  1. Campos Diferenciales
  2. Teoremas de Imposibilidad
  3. Propiedades
  4. Ejemplos Adicionales
- Capítulo 3: Métodos para la Integración
  1. Polinomios de Taylor
  2. Regla del Trapecio
- Apéndice A: Otras formas de aproximar funciones

1. Series de Padé
2. Aproximaciones de Padé

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Se llevó a cabo una investigación preliminar para adquirir conocimientos previos sobre el tema de integración en términos finitos, revisando la bibliografía existente, destacando el uso de libros y ariculos, relacionados al análisis matemático y al álgebra defirencial. Posteriormente para relizar la selección de tal documentación.

Se llevó a cabo un estudio enfocado en varios teoremas utilizados para determinar la existencia de antiderivadas elementales en funciones. Se destacan teoremas relevantes, tales como el teorema de Laplace y los teoremas de Liouville, los cuales desempeñan un papel crucial en este contexto. Además de presentar estos fundamentos teóricos, la investigación incluyó ejemplos concretos de funciones elementales que carecen de antiderivadas elementales.

Como resultado, se ha creado una monografía diseñada para ser una fuente de consulta (repartida en 4 capítulos), específicamente enfocado en ayudar a los estudiantes de la carrera de Matemática en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo que demuestren interés en el tema de integración. La monografía no solo aborda los teoremas y lemas más notables, sino que también proporciona ejemplos de funciones elementales que no poseen antiderivadas que se puedan expresar mediante operaciones aritméticas finitas de funciones elementales o su composición.

5.2. Recomendaciones

A los estudiantes futuros que tengan el interés de dar continuidad al proyecto de investigación se les sugiere ampliar y enriquecer el texto incorporando análisis más profundos sobre aspectos específicos que no fueron abordados. Una de las áreas clave para la expansión podría ser el estudio de la existencia antiderivadas de funciones multivariables.

Además, se recomienda explorar el campo de los algoritmos diseñados para determinar la existencia de antiderivadas, entre ellos, el algoritmo de Risch. Dicho algoritmo, reconocido por su relevancia en el ámbito de la teoría de la integración, ofrece un método para determinar si una función dada posee una antiderivada elemental. Los estudiantes pueden profundizar en el funcionamiento y los fundamentos teóricos del algoritmo de Risch, así como en su aplicación práctica. La comprensión detallada de este algoritmo proporcionará una perspectiva avanzada sobre la existencia de antiderivadas en contextos más complejos.

Es importante señalar que el algoritmo de Risch es especialmente útil porque puede proporcionar una antiderivada si es que existe y señalar explícitamente cuando una antiderivada elemental no existe.

La ampliación del proyecto hacia áreas adicionales dentro de la teoría de la integración abre un abanico de posibilidades para la formación de los estudiantes. Este enriquecimiento del conocimiento no solo ampliará su perspectiva, sino que también aportará al desarrollo del campo en sí mismo.

BIBLIOGRAFÍA

1. **CHERRY, Guy W.** Integration in finite terms with special functions: the error function. *Journal of Symbolic Computation*. 1985, **1**(3), 283-302.

2. **MARCHISOTTO, Elena Anne & ZAKERI, Gholam-Ali**. An invitation to integration in finite terms. *The College Mathematics Journal*. 1994, **25**(4), 295-308.

3. **NAMAKFOROOSH, Mohammad Naghi**. *Metodología de la investigación*. Editorial Limusa, 2000.

4. **RISCH, Robert H**. The problem of integration in finite terms. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1969, **139**, 167-189.

5. **STEWART, J.** *Calculus*. Cengage Learning, 2015. ISBN 9781305480513. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=spiaBAAAQBAJ.

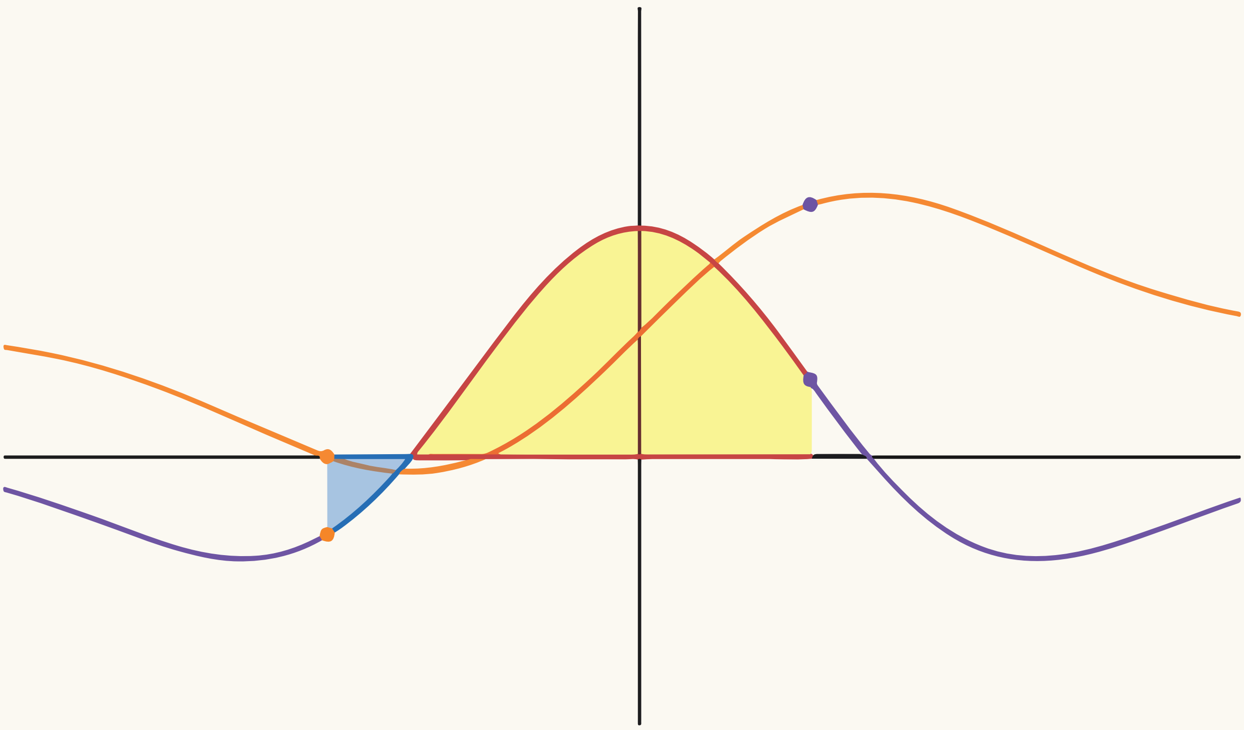
ANEXOS

ANEXO A: INTRODUCCIÓN A LA INTEGRACIÓN EN TÉRMINOS FINITOS

Introducción a la

INTEGRACIÓN

en Términos Finitos

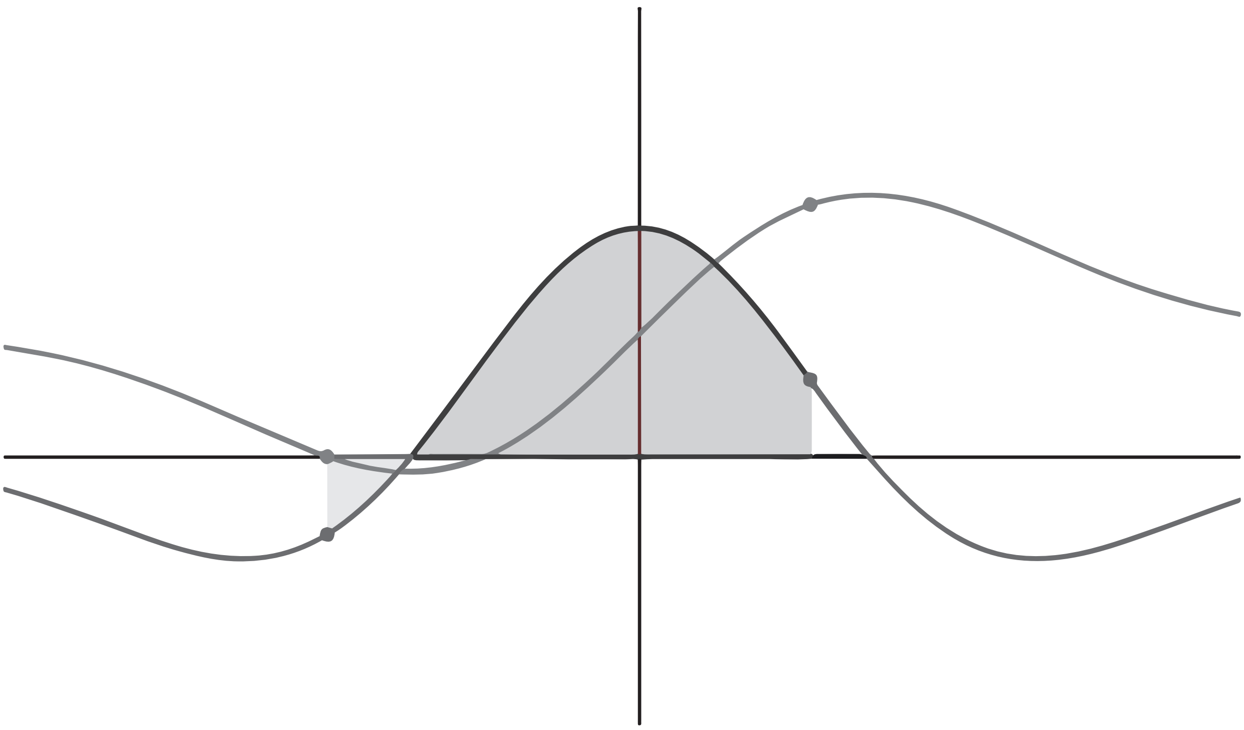


RODERICK A. HACKNEY

Introducción a la

INTEGRACIÓN

en Términos Finitos



RODERICK A. HACKNEY

A mis padres, Adrián y Maritza

Agradecimientos

La culminación de este proyecto representa mucho más que el fruto de un esfuerzo personal; es el resultado de la valiosa contribución de un grupo de personas que, de diversas maneras, han sido fundamentales para que esta investigación cobrara vida.

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor de tesis, el Dr. Ramón Antonio Abancín Ospina. Su paciencia, vasto conocimiento y orientación constante han sido pilares en cada fase de este trabajo, brindándome la dirección y el apoyo necesarios para superar cada desafío. A todos mis profesores, les estoy profundamente agradecido por inculcar en mí la curiosidad insaciable y el ansia constante de conocimiento, elementos que han sido cruciales en mi formación académica y personal.

Un especial reconocimiento va dirigido a mi familia, el soporte más firme en mi vida. A mis padres, les debo mi eterna gratitud por su amor incondicional, por inculcarme valores como la perseverancia y la importancia del esfuerzo. A mi hermana, le agradezco por ser un apoyo inquebrantable y una fuente de felicidad incluso en los momentos más retadores. Y a MFM, cuya presencia constante en este viaje ha sido un faro de luz y guía.

Deseo hacer una mención especial a mis amigos, quienes han caminado junto a mí en cada etapa de este viaje. Su aliento, distracciones oportunas y, más importante aún, su amistad genuina y desinteresada, han sido un regalo invaluable.

Por último, mi gratitud se extiende a todas aquellas personas que, de manera directa o indirecta, han sido parte de este viaje. Cada palabra de ánimo, cada crítica constructiva y cada gesto de apoyo han dejado una marca indeleble en este trabajo y en mi vida, enseñándome lecciones valiosas y contribuyendo a mi crecimiento personal y profesional.

Prólogo

La matemática es un lenguaje universal que nos permite describir, comprender y predecir fenómenos naturales y sociales. A través de su evolución, ha proporcionado herramientas esenciales que han permitido avances significativos en diversas disciplinas. Una de las áreas más fascinantes y desafiantes de las matemáticas es el cálculo integral, mientras que muchos problemas integrales pueden ser resueltos utilizando técnicas estándar, existen ciertas funciones que se resisten a estos métodos, y es aquí donde la temática de Integración en términos finitos cobra relevancia.

Este trabajo busca profundizar en el estudio de métodos y técnicas avanzadas para abordar la integración de funciones que, a primera vista, parecen no integrables en términos convencionales. Se explorarán aproximaciones, algoritmos y teorías modernas, con el objetivo de proporcionar un marco más amplio y flexible para abordar estos problemas complejos.

El viaje que el lector emprenderá al adentrarse en estas páginas no es solo una exploración técnica, sino también un testimonio de la perseverancia y la curiosidad humana. Es un recordatorio de que, incluso frente a los desafíos más intrincados, el ingenio y la determinación pueden abrir puertas a nuevos horizontes de comprensión.

Espero que este libro no solo ofrezca herramientas y conocimientos valiosos para aquellos en el campo matemático, sino que también inspire a otros a cuestionar, explorar y, finalmente, expandir los límites del conocimiento humano.

Riobamba, Octubre 2023 *Roderick Hackney*

Índice general

Índice de figuras

Introducción

«El hecho de que no podamos encontrar una solución no significa que no la haya»

– Andrew Wiles

El cálculo integral tiene sus orígenes en la antigüedad, pero fue desarrollado y perfeccionado por matemáticos como Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss y otros en los siglos XVII y XVIII. El cálculo integral se basa en el concepto de integral, que es una generalización de la suma infinitesimal de infinitos elementos. La integral se define como el área bajo la curva de una función entre dos puntos dados. La integral también se puede interpretar como la inversa de la derivada, que es otra operación fundamental del cálculo, la historia del cálculo integral se puede dividir en varias etapas:

Orígenes: En el siglo XII, el matemático indio Bhaskara II escribió un libro sobre astronomía llamado Siddhanta Shiromani, donde introdujo algunas ideas sobre el cálculo integral. Sin embargo, estos métodos no fueron muy difundidos ni reconocidos hasta mucho después.

Siglo XVII: En este siglo, Newton y Leibniz inventaron el cálculo diferencial e integral de forma independiente. Ambos utilizaron el método de exhaución o sucesión geométrica para hallar las integrales indefinidas o primitivas de las funciones. También desarrollaron el teorema fundamental del cálculo, que establece que la derivada y la integral son operaciones inversas.

Siglo XVIII: En este siglo, Euler introdujo el concepto de función primitiva o antiderivada en su obra Introductio in analysin infinitorum (Introducción al análisis infinitesimal). Euler también aplicó el cálculo a problemas geométricos como la longitud de arco y el volumen sólido de revolución.

Siglo XIX: En este siglo, Lagrange generalizó el concepto de función primitiva a funciones no diferenciables o discontinuas. Lagrange también introdujo los métodos numéricos para aproximar las integrales definidas mediante series infinitas o algoritmos iterativos.

Siglo XX: En este siglo, Gauss desarrolló la teoría analítica del álgebra lineal y la geometría diferencial. Gauss también demostró varias propiedades importantes del cálculo integral como la regla fundamental del producto y la regla fundamental del cociente. Cauchy fue uno de los primeros en aplicar el análisis funcional al estudio del cálculo integral. Cauchy también introdujo los conceptos de límite superior e inferior para definir las integrales definidas. Riemann fue uno de los fundadores del análisis complejo y desarrolló una nueva geometría basada en funciones complejas llamada geometría riemanniana. Riemann también formuló las hipótesis sobre los números primos que llevaron a su nombre. Dirichlet fue otro pionero del análisis complejo y contribuyó al estudio de las series infinitas y las funciones especiales. Lebesgue fue uno de los creadores del análisis funcional moderno y definió una nueva medida para integrar funciones complejas llamada medida Lebesgue. Hardy fue uno de los líderes del movimiento analítico británico y estudió temas como las series armónicas, las funciones modulares y las transformadas integrales. Littlewood fue uno de los colaboradores más destacados de Hardy y contribuyó al desarrollo del análisis funcional con sus trabajos sobre series armónicas parciales. Kolmogorov fue otro gran matemático ruso que hizo importantes aportes al análisis funcional con sus estudios sobre series divergentes uniformemente convergentes (SDUC), series divergentes no uniformemente convergentes (SDNUC) e hipotesis sobre números primos (hipotesis Riemann).

Darse cuenta de que algunas funciones no tienen antiderivadas elementales no fue un momento de un descubrimiento único, sino más bien un proceso gradual a lo largo de siglos con contribuciones de varios matemáticos con eventos clave como

Siglo XII: Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, aunque desarrollaron el cálculo de forma independiente, ambos enfrentaron dificultades para integrar ciertas funciones como e^{x^2}. Esto insinuaba la posibilidad de funciones que carecieran de antiderivadas elementales.

Siglo XIII: Leonhard Euler hizo más intentos de integrar e^{x^2} reconoció su comportamiento único, pero no pudo expresarlo en términos de funciones existentes para la época.

Siglo XIX: Adrien-Marie Legendre y Carl Friedrich Gauss exploraron funciones hipergeométricas e identificaron algunas sin antiderivadas elementales conocidas, lo que plantea la cuestión de un fenómeno más amplio, Augustin-Louis Cauchi formalizó la definición de integral indefinida y sentó las bases para pruebas rigurosas de no integrabilidad.

Pierre-Joseph Liouville en 1837, dio una guía definitiva con su teorema, afirmando que las únicas funciones con antiderivadas elementales son un conjunto específico que involucra polinomios, exponenciales, logaritmos y composiciones de estos. Esto demostró la existencia de funciones no elementales.

Siglo XX: Con el desarrollo de funciones y ecuaciones diferenciales más complejas, matemáticos como Joseph Liouville y Niels Henrik Abel estudiaron funciones trascendentales como la función de error y las funciones de Bessel, demostrando aún más la diversidad de antiderivadas no elementales.

Era moderna: La investigación continúa, la búsqueda de nuevas funciones y sus propiedades de integrabilidad continúa, y los matemáticos utilizan técnicas avanzadas como el álgebra informática y la teoría de Galois.

En última instancia, darse cuenta de que algunas funciones carecen de primitivas elementales fue un esfuerzo de colaboración impulsado por la búsqueda de comprender las funciones y sus integrales. El teorema de Liouville proporcionó una prueba fundamental, pero la exploración de diferentes funciones y el desarrollo de herramientas matemáticas continúan moldeando nuestra comprensión de este fascinante mundo.

1

Funciones

«... la fuente de toda gran matemática es el caso especial, el ejemplo concreto. Es frecuente en matemáticas que cada instancia de un concepto de aparente gran generalidad sea en esencia lo mismo que un caso especial pequeño y concreto»

– Paul R. Halmos, *I Want to be a Mathematician (1985)*

1.1. Funciones elementales

En el ámbito del análisis matemático, el estudio de las funciones y sus propiedades es fundamental. Las funciones no sólo permiten captar las relaciones entre variables, sino que también son objeto de estudio crucial en el cálculo, donde la diferenciación y la integración desempeñan un papel fundamental. Entre la basta cantidad de funciones que existen, una clase determinada conocida como funciones elementales posee especial importancia debido a su simplicidad y ubicuidad.

En esta sección del libro, se busca establecer de manera rigurosa la definición de una función elemental. Este proceso sienta las bases para poder determinar en el futuro si una función elemental posee una antiderivada elemental.

Definición 1.1 (Función elemental)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : X \to \mathbb{C}$ se dice elemental si se puede expresar mediante operaciones aritméticas finitas (suma, resta, multiplicación, división y potenciación) o composición finita de las siguientes funciones:*

- $f(x) = c$ *tal que* $c \in \mathbb{C}$.
- $f(x) = x^n$ *tal que* $n \in \mathbb{C}$.
- $f(x) = log_b(x)$ *tal que* $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $f(x) = b^x$ *tal que* $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Nótese que en la definición no se agregan a las funciones trigonométricas ni la función valor absoluto, ya que estas se pueden construir con las funciones antes mencionadas como indican los lemas presentados a continuación.

Lema 1.1. *Las funciones polinómicas son elementales.*

Demostración. Por definición las funciones polinómicas se expresan como $f(x) = a_0 + a_1(x) + \cdots + a_n x^n$ dónde $a_n \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, nótese que todos los $a_n x^n$ son elementales, puesto que se obtienen mediante el producto de dos funciones elementales a_n y x^n, además ya que f se expresa como la suma finita de los $a_n x^n$, por lo tanto esta deberá ser elemental por definición. $\square$

Lema 1.2. *Las funciones racionales son elementales.*

Demostración. Por definición las funciones racionales son aquellas que se expresan como cocientes de polinomios (i.e, $f(x) = p(x)/q(x)$) y ya que $p(x)$ y $q(x)$ son elementales, su cociente por definición también los será. $\square$

Lema 1.3. *Las funciones algebraicas son elementales.*

Demostración. Por definición las funciones algebraicas son aquellas que se expresan como $f(x) = \sqrt[n]{r(x)}$ donde $r(x)$ es una función racional (que como ya se demostró es elemental), nótese que $f(x) = g(r(x))$ donde $g(x) = \sqrt[n]{x}$ (que también es elemental), por lo tanto ya que f puede expresarse como composición de funciones elementales, entonces esta por definición también lo será. $\square$

Ejemplo 1.1. La función $f(x) = \sqrt{1 - x^n}$ es algebraica y por ende elemental, además cave recalcar que $0 < \int_{-1}^{1} f(x)dx < 2$ siempre que n sea un número par positivo.

Nota. Toda función polinómica es una función racional y toda función racional es algebraica.

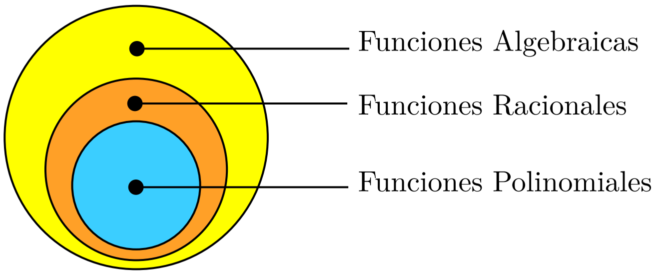


Figura 1.1: Funciones algebraicas, racionales y polinomiales

Lema 1.4. *Las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas son elementales.*

Demostración. Las funciones trigonométricas pueden se escritas a través de funciones logarítmicas y exponenciales, por ejemplo

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}ie^{-ix} - \frac{1}{2}ie^{ix} \qquad \text{y} \qquad \cos(x) = \frac{e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix}}{2},$$

que son elementales, a partir de estas funciones se puede ver que las funciones tangente, secante, cosecante y cotangente son elementales.

Por otro lado, las funciones trigonométricas inversas están dadas por

$$\operatorname{arc\,sen}(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) \text{ y } \operatorname{arc\,cos}(x) = \frac{\pi}{2} + i\ln\left(\sqrt{1-x^2} + ix\right),$$

que son elementales, a partir de estas funciones se puede ver que las funciones arcotangente, arcosecante, arcocosecante y arcocotangente son elementales y de forma análoga se puede probar que las funciones hiperbólicas y sus inversas son elementales. □

Ejemplo 1.2. Las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ y $g(x) = \cos(x^2)$ son elementales, además estas son utilizadas para definir las funciones de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$ y $C(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt$, cave recalcar que las funciones de Fresnel no son elementales.

Ejemplo 1.3. La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es elemental, esta se usa para definir la integral de Dirichlet $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ y la función $Si(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt$ que evidentemente no es elemental.

Lema 1.5. *Son elementales funciones de la forma* $f(x) = g(x)^{h(x)}$ *donde* $g(x) \neq 0$ *y* $h(x)$ *son elementales.*

Demostración. Para todos los valores de x tal que $g(x)$ y $h(x)$ están definidas y son distintas de cero, $g(x)^{h(x)} = e^{h(x)\ln(g(x))}$ por lo que $f(x)$ se puede expresar mediante funciones elementales, así se concluye también lo será. □

Ejemplo 1.4. Las funciones $f(x) = x^x$ y $g(x) = x^{-x}$ son elementales, además estas son usadas para definir dos identidades llamadas «el sueño de sophomore», las cuales son

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-m} \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 x^x dx = -\sum_{m=1}^{\infty} (-m)^{-m},$$

cuyos valores numéricos aproximados son 1,291 y 0,783 respectivamente.

Lema 1.6. *La función*

$$f(x) = |x| = \left\{ \begin{array}{ll} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{array} \right. ,$$

es una función elemental.

Demostración. Puesto que la función $|x|$ se puede representar como $\sqrt{x^2}$ la cual es la composición de dos funciones elementales $g(x) = x^2$ y de $h(x) = \sqrt{x}$, entonces está también deberá ser elemental por definición. □

Lema 1.7. *Sea f una función definida por*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} g(x), & x < a \\ h(x), & x > a \end{array} \right. ,$$

donde $g(x)$ es una función elemental en $(-\infty, 0)$ y $h(x)$ es una función elemental en $(0, \infty)$. La función f con dominio $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ es una función elemental.

Demostración. Nótese que

$$\frac{|x| + x}{2x} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{array} \right. ,$$

por otro lado,

$$\frac{-|x| + x}{2x} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{array} \right. ,$$

así, aplicando un pequeño cambio podemos reescribir a f como

$$f(x) = g(x) \cdot \frac{|(x-a)| + (x-a)}{2(x-a)} + h(x) \cdot \frac{-|(x-a)| + (x-a)}{2(x-a)},$$

cuyo dominio es $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, evidentemente f es una función elemental ya que satisface la definición. $\square$

A partir de este lema es más fácil ver que existen funciones elemenatales «extrañas», por ejemplo:

Ejemplo 1.5. La función f dada por

$$f(x) = -\frac{-|x+1| + x + 1}{2(x+1)} - \frac{-|x| + x}{2(x)} + \frac{|x-1| + x - 1}{2(x-1)},$$

es una función elemental, además es bastante similar a la función piso y cuya gráfica está dada por

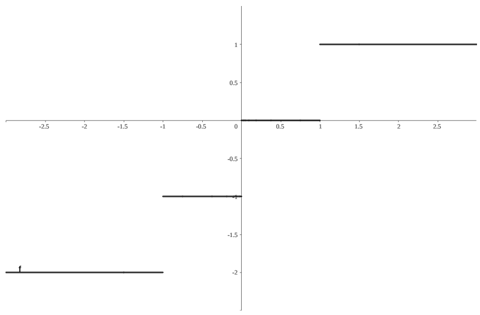


Figura 1.2: Aproximación de la función piso

Si se agregan k términos, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} -\frac{-|x+n| + x + n}{2(x+n)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{-|x-n| + x - n}{2(x-n)}, \ k < \infty$$

que se asemejará más a la función piso a medida de que k sea más grande.

Las funciones elementales son notablemente versátiles y complejas en su comportamiento, sirviendo como bloques de construcción para funciones más complicadas, algunos ejemplos adicionales de funciones elementales son:

Ejemplo 1.6. La función $\frac{1}{\ln(x)}$ es elemental.

Ejemplo 1.7. La función e^{-x^2} es elemental.

Ejemplo 1.8. La función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ es elemental, además es utilizada para definir la función $Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Ejemplo 1.9. La función $f(x) = \ln(\ln(x))$ es elemental.

Ejemplo 1.10. La función $f(x) = x^{c-1}e^{-x}$ es una función elemental, esta es usada para definir las funciones gamma incompletas, las cuales son

$$\Gamma(a,x) = \int_x^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt \qquad \text{y} \qquad \gamma(a,x) = \int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt$$

1.2. Funciones no elementales

Definición 1.2. *Una función f se la considera* ***no elemental*** *cuando no puede ser expresada mediante operaciones aritméticas finitas o conposición finita de funciones elementales.*

Estas funciones son a menudo objeto de estudio en matemáticas avanzadas y desempeñan un papel crucial en la resolución de problemas más complejos y abstractos. A medida que la matemática avanza, se descubren nuevas funciones y se desarrollan métodos para comprender y trabajar con ellas, algunos ejemplos notables de dichas funciones incluyen:

Ejemplo 1.11. La función Gamma $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, la cual es una función compleja que generaliza la función factorial a los números reales, no tiene una expresión elemental sencilla y suele representarse mediante una integral.

Ejemplo 1.12. La función Error $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, la cual se utiliza en teoría de la probabilidad, estadística y otros campos para describir la distribución acumulativa de la distribución normal estándar y no es expresable en términos de funciones elementales.

Ejemplo 1.13. La función Zeta de Riemann $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, la cual es una función que desempeña un papel fundamental en la teoría de números, pero carece de una expresión elemental.

Algunas funciones por partes no son elementales como

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & x \leq 5 \\ \ln(x), & x > 5 \end{cases}.$$

Ejemplo 1.14. La función $li(x)$ usada principalmete en teoría de números y definida como $li(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln(t)} dt$ con $x \neq 0$ un número real positivo no es elemental, nótese que $li(x)$ tiene una singularidad en $x = 1$.

Definición 1.3 (Antiderivada elemental)**.** *Una función F es una antiderivada elemental de f en $[a, b]$ si, y sólo si,*

- *F es elemental.*
- *F es continua en $[a, b]$.*
- *$F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Nota: Es habitual que se usen otros términos para referirse a que una función $f \in \mathcal{F}$ no tiene una antiderivada elemental, los términos más habituales son:

- f no tiene primitiva elemental.
- f no es integrable en términos finitos.
- $\int f dx$ no es elemental.

Nota. Es habitual que al momento de escribir una función con relativa complejidad muy probablemente no posea una antiderivada elemental.

1.3. Propiedades de las funciones elementales

El conocimiento de las propiedades de las funciones elementales es esencial para el análisis, modelado y resolución de problemas matemáticos y científicos. Estas funciones proporcionan un marco sólido y ampliamente aplicable en las matemáticas y las ciencias porque son funciones simples y bien comprendidas que pueden representar una amplia variedad de fenómenos naturales y se pueden combinar de diversas maneras para modelar situaciones más complejas, lo que las convierte en herramientas fundamentales para investigadores, científicos, ingenieros y estudiantes en una variedad de disciplinas. En esta sección del libro se explorarán algunas de sus propiedades.

Lema 1.8. *El conjunto de las funciones elementales representado por $\mathcal{F}$ es un campo bajo la suma y producto usual de funciones.*

Demostración. Evidentemente $\mathcal{F}$ es no vacío, conmutativo y abeliano para ambas operaciones, existen los elementos identidad $f(x) = 0$ para la suma y $f(x) = 1$ para el producto y la ley distributiva se cumple, por otro lado, la suma y el producto son cerrados por la propia definición de función elemental. También nótese que existen los inversos de la suma y la multiplicación:

- Para toda $f \in \mathcal{F}$, existe $-f = f \cdot (-1)$ tal que $f - f = 0$.
- Para toda $f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$, existe $f^{-1} = \frac{1}{f}$ tal que $f \cdot f^{-1} = 0$.

Por lo tanto, es un campo. $\square$

Este lema hace referencia a que siempre que se sumen, resten, multipliquen o dividan funciones elementales se obtendrá otra función elemental (algo bastante intuitivo desde la definición). En el próximo capítulo también se verá que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo la diferenciación pero $\mathcal{F}$ no es cerrado bajo la integración.

Lema 1.9. *Las funciones elementales son continuas en su dominio.*

Demostración. Para realizar la demostración se analizarán los siguientes casos

- Si $f(x) = c$ para $c \in \mathbb{C}$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = c$ y $f(a) = c$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (dominio de f), por lo que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y por lo tanto, f es continua en su dominio.
- Si $f(x) = x$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = a$ y $f(a) = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (dominio de f), por lo que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y, por lo tanto, f es continua en su dominio.
- Si $f(x) = log_b(x)$ dónde $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = log_b(a)$ y $f(a) = log_b(a)$ para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dominio de f), por lo que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y, por lo tanto, f es continua en su dominio.
- $f(x) = b^x$ dónde $b \in \mathbb{C}$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = b^a$ y $f(a) = b^a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (dominio de f), por lo que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y, por lo tanto, f es continua en su dominio.

Por otro lado, las funciones $f+g,\ f-g,\ f/g,\ fg,\ f\circ g,\ g\circ f$ dónde f y g son cualquiera de los casos anteriores serán continuas en sus dominios (intersección de los dominios de f y g), por lo tanto las funciones elementales son siempre continuas sobre sus dominios. $\square$

2

Integración de funciones elementales

«La fuerza motriz de la invención matemática no es el razonamiento, sino la imaginación»

– De Morgan

En este capítulo, se aborda la cuestión de que si toda función elemental tiene una antiderivada elemental. La respuesta es negativa, ya que existen funciones elementales que no admiten tal antiderivada. Un ejemplo notable es la función $f(x) = e^{x^2}$, cuya antiderivada no es elemental, como se muestra en el ejercicio 2.13. Para llegar a esta conclusión, se utiliza el Álgebra Diferencial, donde el teorema de Liouville es la herramienta clave que permite establecer criterios para la existencia de una antiderivada en términos finitos.

2.1. Campos diferenciales

Los campos son conceptos fundamentales dentro del Álgebra, dentro de un campo, es posible realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división (exceptuando la división por cero), siguiendo propiedades similares a las de los números reales y complejos. Además, los campos se enriquecen al incorporar derivadas en su estructura, este capítulo busca ofrecer una visión general sobre los principios básicos de los campos diferenciales, así como sus propiedades distintivas.

Definición 2.1 (Operador de derivación)**.** *Sea* $\mathcal{R}$ *un anillo abeliano unitario, llamamos* ***operador de derivación*** *o simplemente* ***derivación*** *a un operador* $\partial : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ *tal que* $\partial(a+b) = \partial(a) + \partial(b)$ *y* $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$ *para todo* $a,\ b \in \mathcal{R}$.

Usualmente cuando en un anillo hay un único operador diferencial denotamos a $\partial(a)$ como a', así para operadores diferenciales sucesivos se tiene que $\partial(\partial(\partial(a))) = a'''$, cuando existen una cantidad n de derivaciones se escribirá $a^{(n)}$.

Definición 2.2. *Sea* $\mathcal{R}$ *un anillo abeliano (conmutativo) unitario, se dice que* $\mathcal{R}$ *es un anillo diferencial si existe un conjunto finito* Δ *de operadores de derivación sobre* $\mathcal{R}$ *tal que* $\partial_m(\partial_n(a)) = \partial_n(\partial_m(a))$*, para todo* $a \in \mathcal{R}$ *y para todo* $\partial_m,\ \partial_n \in \Delta$.

La notación $(\mathcal{R}, \Delta)$ será utilizada para referirse a un anillo diferencial $\mathcal{R}$ con un conjunto de operadores de derivación Δ. Cuando sólo hay un operador de derivación (i.e, $\Delta = \{\partial\}$) se habla a menudo de un anillo diferencial ordinario; en caso contrario, se habla de un anillo diferencial parcial, si el anillo diferencial es un dominio integro o un campo entonces se dirá que es un dominio integro diferencial o un campo diferencial respectivamente.

Ejemplo 2.1. Cualquier anillo $\mathcal{R}$ en el cual los elementos de Δ operan trivialmente ($\partial(a) = 0$ para cualquier $a \in \mathcal{R},\ \partial \in \Delta$) es un anillo diferencial.

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ un anillo diferencial cualquiera, entonces para cualquier $\partial_m \in \Delta$ y para cualquier $a,\ b \in \mathcal{R}$ se tiene que:

- $\partial_m(a+b) = 0 = 0 + 0 = \partial_m(a) + \partial_m(b)$.
- $\partial_m(ab) = 0 = 0 \cdot b + a \cdot 0 = \partial_m(a)b + a\partial_m(b)$.

Por otro lado, sean $\partial_m, \partial_n \in \Delta$, entonces se cumple que:

$$\partial_m(\partial_n(a)) = \partial_m(0) = 0 = \partial_n(0) = \partial_n(\partial_m(a)),$$

por lo tanto es un anillo diferencial. □

Ejemplo 2.2. El campo de las funciones elementales $\mathcal{F}$ es un anillo diferencial con el operador diferencial habitual d/dx.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ el campo de las funciones elementales, entonces para $\frac{d}{dx}$ (definición usual de derivada) y $f,\ g \in \mathcal{F}$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x)).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(f(x)g(x))\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)(g(x+h)-g(x))+g(x)(f(x+h)-f(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= f(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(f(x)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{d}{dx}$ es un operador diferencial y por ende $\mathcal{F}$ es un campo diferencial. □

Ejemplo 2.3. El anillo de todas las funciones reales definidas y diferenciables en cada punto de una región dada en el espacio de n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con el conjunto de operadores de derivación dado por $\Delta = \{\partial/\partial x_1,\ \partial/\partial x_2,\ \cdots,\ \partial/\partial x_n\}$ es un anillo diferencial.

Demostración. La resolución se realiza de manera análoga al anterior ejercicio. □

Ejemplo 2.4. Sea R un anillo diferencial, se puede construir un anillo no conmutativo con un operador diferencial (este no es un anillo diferencial) de R mediante el anillo no conmutativo de las matrices $n \times n$ dónde los elementos de cada entrada los de R y el operador diferencial es aquél que aplica el operador diferencial de R a cada entrada de la matriz.

Demostración. Este ejemplo puede ser hallado en [Crespo and Hajto, 2011] página 123, ejemplo 5.2.6. □

Lema 2.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo diferencial y el símbolo $'$ un operador diferencial de Δ, entonces para todo $a, b \in \mathcal{R}$ se cumple que*

(I) $1' = 0$

(II) $(a^n)' = na^{n-1}a' \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

(III) $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$

Demostración. La demostración se debe realizar por casos,

(I) Nótese que $1' = (1 \cdot 1)' = 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1' = 1' + 1'$ y ya que $\mathcal{R}$ por lo tanto $1' = 0$.

(II) La demostración se la hará por inducción, para $n = 2$ se cumple que $(a^2) = (a \cdot a)' = aa' + a'a = 2aa'$ por lo que se cumple el enunciado, suponiendo que se cumple para m que $(a^m)' = ma^{m-1}a'$ entonces para $m + 1$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
(a^{m+1})' &= (a^m a)' \\
&= (a^m)'a + a^m a' \\
&= ma^{m-1}a'a + a^m a' \\
&= ma^m a^{-1}a'a + a^m a' \\
&= ma^m(a^{-1}a)a' + a^m a' \\
&= ma^m a' + a^m a' \\
&= (m+1)a^m a'
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(a^n)' = na^{n-1}a'$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(III) $\left(\frac{a}{b}\right)' = (ab^{-1})' = a'b^{-1} + a(b^{-1})' = a'b^{-1} - ab^{-2}b' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$.

□

Ejemplo 2.5. En el anillo $\mathbb{Z}$ el único operador de derivación es el trivial.

Demostración. Nótese que cualquier elemento n en $\mathbb{Z}$ puede ser escrito de la siguiente forma

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{n-veces}}$$

Así, al aplicar cualquier operador diferencial ∂_1 se tiene que

$$\partial_1(n) = \partial_1(1+1+\cdots+1) = \partial_1(1)+\partial_1(1)+\cdots+\partial_1(1) = 0+0+\cdots+0 = 0.$$

Análogamente, al aplicar cualquier operador diferencial ∂_2 se tiene que

$$\partial_2(n) = \partial_2(1+1+\cdots+1) = \partial_2(1)+\partial_2(1)+\cdots+\partial_2(1) = 0+0+\cdots+0 = 0.$$

de dónde $\partial_1 = \partial_2$ por lo tanto existe un único operador diferencial y este opera trivialmente como ya se vió anteriormente. □

Ejemplo 2.6. En el anillo $\mathbb{Q}$ el único operador de derivación es el trivial.

Demostración. Se realiza de manera análoga al anterior ejemplo. □

Definición 2.3 (Subanillo diferencial)**.** *Sea $\mathcal{R}_0$ un subanillo de una anillo diferencial $\mathcal{R}$, se dice que $\mathcal{R}_0$ es un subanillo diferencial de $\mathcal{R}$ si es cerrado bajo el conjunto de operadores de derivación de $\mathcal{R}$*

Ejemplo 2.7. $\mathbb{Z}$ es un subanillo diferencial de $\mathbb{Q}$.

Demostración. Puesto que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ son anillos diferenciales bajo el operación de derivación trivial, además $\mathbb{Z}$ es un subanillo de $\mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Z}$ debe ser un subanillo diferencial de $\mathbb{Q}$ □

Definición 2.4 (Campo de extensión diferencial). *Sea $\mathcal{R}$ un campo diferencial, se dice que $\mathcal{R}_1$ es un campo de extensión diferencial de $\mathcal{R}$ si es un campo de extensión de $\mathcal{R}$ y es un campo diferencial bajo los operadores de derivación de $\mathcal{R}$.*

Definición 2.5 (Homomorfismo diferencial). *Un homomorfismo diferencial entre dos anillos diferenciales $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ es una aplicación $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ la cual es un homomorfismo de anillos (i.e. $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ y $\phi(1) = 1$) que preserva la diferenciación (i.e. $\phi(a') = \phi(a)'$).*

Ejemplo 2.8. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos anillos diferenciales tal que $\mathcal{R}$ es un subanillo diferencial de $\mathcal{S}$, entonces el homomorfismo identidad entre ambos anillos es un homomorfismo diferencial.

Definición 2.6 (Constante). *Sea $\mathcal{R}$ un anillo diferencial, un elemento $c \in \mathcal{R}$ se dice* ***constante*** *si $\partial(c) = 0$ para todo $\partial \in \Delta$.*

Lema 2.2. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo diferencial, el conjunto de todas las constantes denotado por $\mathcal{K}$ es un anillo diferencial, si $\mathcal{R}$ es un campo, entonces $\mathcal{K}$ es un campo diferencial.*

Demostración. Primeramente $1 \in \mathcal{K}$ ya que $1' = 0$, ahora sean $a, b \in \mathcal{K}$, entonces $(a-b)' = a' - b' = 0+0 = 0$ y $(ab)' = a'b + ab' = 0b + a0 = 0+0 = 0$, por lo tanto, $a - b,\ ab \in \mathcal{K}$. Finalmente, $\forall a \in \mathcal{K},\ a' = 0 \in \mathcal{K}$, por lo tanto $\mathcal{K}$ es un subanillo diferencial.

Por otro lado, si $\mathcal{R}$ es un campo y sea $a \in \mathcal{K}$ tal que $a \neq 0$, entonces se cumple que $(a^{-1})' = -a^{-2}a' = -a^{-2}0 = 0$, por ende $a^{-1} \in \mathcal{K}$ y por lo tanto $a^{-1} \in \mathcal{K}$ siendo así $\mathcal{K}$ un campo diferencial. □

Ejemplo 2.9. El conjunto de las constantes de $\mathcal{F}$ es $\{f \in \mathcal{F} : f(x) = c\}$ dónde c es una constante real.

Demostración. Por definición el conjunto de las constantes de $\mathcal{F}$ es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{f \in \mathcal{F} : \frac{d}{dx} f(x) = 0\} \\
&= \{f \in \mathcal{F} : \int \frac{d}{dx} f(x) dx = \int 0 dx\} \\
&= \{f \in \mathcal{F} : f(x) = c\} \qquad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

como se deseaba. □

Lema 2.3. *Sea F un campo diferencial de característica 0 y sea K/F una extensión algebraica. Un operador diferencial de F puede ser extendido a un operador diferencial en K en única forma (i.e. K se puede convertir en una campo diferencial con el operador diferencial de F y esto se puede hacer de una única forma)*

Demostración. Únicamente se demostrará la unicidad, para una demostración completa véase [Crespo and Hajto, 2011] Proposición 5.3.1.

Sea $\alpha \in K$ y sea $f(x) \in F[x]$ el polinomio minimal para α sobre F (todo elemento en una extensión algebráica es por definición algebráico). Sea $Df(x)$ la derivada del polinomio $f(x)$ (tratando los coheficientes como constantes), entonces $f(x)$ y $Df(x)$ son primos relativos ($f(x)$ es irreducible y $Df(x)$ tiene grado mínimo y es distinto de cero ya que F tiene característica 0), esto significa que $Df(\alpha) \neq 0$.

Considere que $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces se tiene que $f'(x) = nx^{n-1}x' + (a'_{n-1}x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}x') + \cdots + (a'_1x + a_1x') + a'_0$, por lo tanto, $(f(x))' = Df(x)x' + g(x)$ dónde $g(x) = a'_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a'_1x + a'_0$. Ahora α es la raíz de $f(x)$, por lo que $(f(\alpha))' = 0$. En otras palabras, $0 = Df(\alpha)\alpha' + g(\alpha)$, por lo que la única forma de definir α' es $\frac{g(\alpha)}{Df(\alpha)}$. □

Ejemplo 2.10. Consideremos $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, así como en la demostración anterior se puede determinar la derivada de $\sqrt{5}$ a través de su polinomio minimal. $(\sqrt{5})^2 - 5 = 0$, entonces $2(\sqrt{5})(\sqrt{5})' - 0 = 0$ y por lo tanto $(\sqrt{5})' = \frac{0}{2\sqrt{5}} = 0$ como ya se suponía.

Definición 2.7. *Sea F un campo diferencial. Se dice que $F(t)/F$ es una extensión logarítmica si existe algún $s \in F$ tal que $t' = \frac{s'}{s}$. Similarmente se dice que $F(t)/F$ es una extensión exponencial si existe algún $s \in F$ tal que $t' = ts'$.*

Estas definiciones imitan las propiedades que definen el logaritmo natural y la función exponencial. Supongamos que $t' = \frac{s'}{s}$ así podemos «integrar», así $t = \int t' = \ln(s)$. De manera análoga, resolviendo la «ecuación diferencial» $t' = ts'$ nos lleva a $t = e^s$.

Definición 2.8 (Extensión elemental)**.** *Sea F un campo diferencial y sea $\mathcal{K}$ su campo de constantes, una extensión algebraica diferencial E/F es una extensión elemental si existe una sucesión de campos diferenciales*

$$F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n = E$$

Dónde todo F_j con $0 \leq j \leq n$ tiene el mismo campo de constantes $\mathcal{K}$ y cada extensión F_{j+1}/F_j es una extensión algebraica, logarítmica o exponencial.

Lema 2.4. *Sea F un campo diferencial con una extensión de campo diferencial $F(t)$. Supongamos que $F(t)$ y F tienen las mismas constantes y t es transcendental sobre F (i.e, t no es algebraico sobre F).*

(I) *Sea $t' \in F$ y $f(t) \in F[t]$ con $deg(f(t)) > 0$, entonces $(f(t))' \in F[t]$ y $deg(f(t)) = deg((f(t))')$ si y solo si el coeficiente del término de mayor grado no es constante. Si el coheficiente del termino de mayor grado es constante, entonces $deg(f(t)) = deg((f(t))') + 1$.*

(II) *Sea $t'/t \in F$, entonces para todo $a \in F^{\times}$, $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, $(at^n)' = ht^n$ para algún $h \in F^{\times}$, además , si $f(t) \in F[t]$ con $deg(f(t)) > 0$, entonces $deg(f(t)) = deg((f(t))')$, también $(f(t))' = cf(t)$ para algún $c \in F$ si y sólo si $f(t)$ es monomial.*

Demostración. Sea $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in F[t]$ con $a_n \neq 0$ tal que $deg(f(t)) = n > 0$.

(I) Puesto que

$(f(t))' = a_n' t^n + (na_n t' + a_{n-1}')t^{n-1} + ((n-1)a_{n-1}t' + a_{n-2}')t^{n-2} + \cdots + (a_1 t' + a_0')$,

nótese que los coeficientes todos están en F ya que se asumió que $t' \in F$ (si $a_j \in F$, entonces $a_j' \in F$ porque F es un campo diferencial).

Recordemos que a_n no es constante si y sólo si $a_n' \neq 0$ (por definición). Por lo tanto el grado no cambia si el coheficiente del termino de mayor grado no es constante. Para el caso en el que lo sea se tiene que $a_n' = 0$. Suponga que $(na_n t' + a_{n+1}') = 0$ (i.e. el coheficiente de t^{n-1} es 0), esto implica que $(na_n t + a_{n-1})' = na_n' t + na_n t' + a_{n-1}' = na_n t' + a_{n-1}' = 0$ (se asume que $a_n' = 0$). Por lo tanto $na_n t + a_{n-1} = c$ para alguna constante $c \in F$, ya que $na_n \neq 0$ y $na_n,\ a_{n-1} \in F$ hemos demostrado que t es algebráico sobre F (contradiciendo la hipótesis de que t es transcendental sobre F), por lo tanto, $(na_n t' + a_{n-1}' \neq 0)$ y así el grado de $(f(t))'$ es $n - 1$

(II) Sea $t'/t = b \in F$, $a \in F^{\times}$, entonces $(at^n)' = a't^n + nat^{n-1}t' = (a' + nab)t^n$ ya que $t' = bt$. Si $a' + nab = 0$, entonces at^n deberá ser una constante, así t deberá satisfacer el polinomio $aX^n + c$ para la constante $c = -an^n$. Ya que $a \neq 0$ y $a, c \in F$, entonces, t es algebraico sobre F

(nuevamente una contradicción), por lo tanto, $a'nnab \neq 0$ (i.e. $(at^n)' = ht^n$ donde $h = a' + nab \in F^\times$).

Nótese que los cálculos anteriores muestra que cada término diferente de cero de $f(t)$ lleva a un término distinto de cero (de igual grado) en $(f(t))'$. Por lo tanto $deg(f(t)) = deg((f(t))')$, por otro lado, si $f(t)$ es un monomio diferente de cero (i.e. $f(t) = at^n$), los cálculos anteriores muestran que $(at^n)' = ht^n$ así $(f(t))' = cf(t)$ dónde $c = h/a \in F^\times$

Análogamente, supóngase que $(f(t))' = cf(t)$ para algún $c \in F$ los cálculos anteriores muestran que $c = h/a_j = (a'_j + ja_jb)/a_j$ para todo $a_j \neq 0$. Si $a_m, a_l \neq 0$ (donde $m \neq l$), entonces

$$\frac{a'_m + ma_mb}{a_m} = \frac{a'_l + la_lb}{a_l}.$$

Eso significa que $(a'_l + la_lb)a_m = (a'_m + ma_mb)a_l$. Por lo tanto,

$$\left(\frac{a_mt^m}{a_lt^l}\right)' = \frac{(a'_m + ma_mb)a_lt^{m+l} - (a'_l + la_lb)a_mt^{m+l}}{a_l^2t^{2l}} = 0.$$

Así, $\frac{a_mt^m}{a_lt^l} = z$ para alguna constante $z \in F$. Así, $a_mt^m - za_lt^l = 0$ (t satisface un polinomio distinto de cero sobre F). Por lo que se ha demostrado que t es algebráico sobre F (nuevamente otra contradicción). Por lo tanto, al menos un coheficiente es distinto de cero (i.e. $f(t)$ es un monomio).

□

2.2. Teoremas de imposibilidad

Con los fundamentos sentados por los conceptos y análisis previos, se explorará un conjunto de teoremas conocidos como «teoremas de imposibilidad». Estos teoremas caracterizan funciones que carecen de una antiderivada expresable de manera elemental. Entre ellos, destacan el teorema de Laplace, el teorema de Liouville junto con sus derivados, y el teorema de Chevyshev. Es importante subrayar que este capítulo se limitará exclusivamente al campo $\mathcal{F}$ de las funciones elementales.

2.2.1. El teorema de Laplace

Teorema 2.1 (Teorema de Laplace). *Sea f una función racional (i.e, puede escribirse como cociente de dos polinomios), entonces su antiderivada* *dada por $\int f(x)dx$ es elemental. De hecho, es racional o la suma de una función racional y un número finito de múltiplos constantes de logaritmos de funciones racionales.*

Demostración. La demostración se realiza expandiendo el polinomio en fracciones parciales, de donde es más sencillo integrar, dicha demostración se puede encontrar en el capítulo 4 de [Hardy, 2005]. □

Ejemplo 2.11. La función $F(x) = \int \frac{(x^2+1)^2+x}{x(x^2+1)}dx$, es elemental.

Demostración. Por el teorema 2.1 ya que

$$\frac{(x^2+1)^2+x}{x(x^2+1)}$$

es una función racional entonces su antiderivada debe ser elemental. Más aún esta viene dada por

$$\int \frac{(x^2+1)^2+x}{x(x^2+1)}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}i\ln(1-ix) - \frac{1}{2}i\ln(1+ix) + \ln(x) + c$$

□

Nota. Al momento de demostrar que una función $f \in \mathcal{F}$ posee antiderivada elemental o que carece de la misma se pueden utilizar métodos de integración para «transformar» la integral en una más sencilla con la cual trabajar, los ejemplos mostrados a continuación detallan dicha situación.

Ejemplo 2.12. Si $f(x) = \cos^m(x)\operatorname{sen}^n(x)$ tal que $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces $\int f(x)dx$ es elemental.

Demostración. Aplicando el método de sustitución trigonométrica universal (también conocido como sustitución de Weierstrass) se puede aplicar el siguiente cambio de variable:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

de donde se puede reescribir a $\int f(x)dx$ como

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^m \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{2^{n+1}t^n(1-t^2)^m}{(1+t^2)^{m+n+1}}dt\end{aligned}$$

Notese que $\int f(x)dx$ se pude expresar como la integral del coeficiente de dos polinomios $2^{n+1}t^n(1-t^2)^m$ y $(1+t^2)^{m+n+1}$ por lo que por el teorema 2.1, $\int f(x)dx$ debe ser elemental. □

El ejemplo presentado anteriormente se lo pude generalizar, de la siguiente forma

Lema 2.5. *Todo elemento del campo* $R(\text{sen}(x), \cos(x))$ *posee una antiderivada elemental.*

Demostración. Sea $f \in R(\text{sen}(x), \cos(x))$, entonces $\int f(x)dx$ puede ser reescrita como una integral de una función racional mediante el método de sustitución trigonométrica universal, por lo tanto por el teorema 2.1, f posee una antiderivada elemental. □

Nota. A pesar de que toda función racional tiene una antiderivada elemental, el proceso de hallar tal no es necesariamente sencillo, para esto se puede recurrir a algoritmos de integración de funciones racionales como lo es el algoritmo de Hermite.

Ejemplo 2.13. La función

$$F(x) = \int \frac{1+\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}dx$$

es elemental

Demostración. Nótese que

$$\frac{1+\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} \in R(\text{sen}(x), \cos(x))$$

por lo que por el Lema 2.5 $F(x) = \int \frac{1+\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}dx$ debe ser elemental. Más aún esta viene dada por

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1+\text{sen}(x)}{\cos(x)}dx &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \\
&= 2\int \frac{t}{t^2+1}dt - \frac{1}{t-1}dt \\
&= \ln(t^2+1) - 2\ln(t-1) + c \\
&= \ln\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) - 2\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right) + c
\end{aligned}
$$

□

2.2.2. Los teoremas de Liouville

Teorema 2.2 (Teorema de Liouville)**.** *Sea F un campo diferencial de característica 0. Sea $\alpha \in F$. Si $y' = \alpha$ tiene una solución $\boldsymbol{y}$ en una extensión elemental de F (con las mismas constantes), entonces existen constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ y elementos $u_1, u_2, \cdots, u_n, v \in F$ tal que*

$$\alpha = v' + c_1\frac{u_1'}{u_1} + c_2\frac{u_2'}{u_2} + \cdots + c_n\frac{u_n'}{u_n}.$$

Demostración. Supóngase que $y = \int \alpha$, una solución de $y' = \alpha$ es elemental sobre F. Esto implica que existe una torre de campos diferenciales:

$$F \subseteq F(t_1) \subseteq F(t_1, t_2) \subseteq \cdots \subseteq F(t_1, t_2, \cdots, t_N),$$

tal que todos esos campos tienen las mismas constantes, $y \in F(t_1, t_2, \cdots, t_N)$ y cada t_i es o bien algebraico, logarítmico o exponencial sobre $F(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1})$.

Se demostrará por inducción. Si $N = 0$ y $y \in F$ y por ende, $\alpha = y' \in F$ por lo que se cumple. Supóngase que el enunciado es verdadero para cualquier torre de altura $N-1$. Nótese que la torre sin contar con F tiene una altura de $N-1$. Por lo tanto por inducción, existen constantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ y elementos $u_1, u_2, \cdots, u_m, v \in F(t_1)$ tal que

$$\alpha = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}.$$

Necesitamos conseguir elementos es F (no $F(t_1)$). Para hacer esto consideramos varios casos: t_1 es algebraico o transcendental (entonces cuando t_1 este debe ser logarítmico o bien exponencial).

Caso 1: Supóngase que $t_1 = t$ es algebraico sobre F. Existen algunos polinomios diferentes de cero en $F[t]$ tal que $u_i = U_i(t)$ y $v = V(t)$. Considéreselos distintos conjugados de t en alguna clausura algebraica de $F(t)$ (o algún campo de separación sobre $F(t)$), $t = \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_s$. Ahora $E = F(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_s)$ es una extensión algebrica de F, entonces se extiende de una manera única como campo diferencial.

Existe un automorfismo de E fijando F tal que $t = \tau_1$ envía a τ_j (esta es la definición de «conjugado»), llamaremos a esta aplicación σ_j, entonces tenemos que

$$\alpha = \sigma_j(\alpha) = \sigma_j\left(V(t)' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{U_i'(t)}{U_i(t)}\right) = V(\tau_j)' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{U_i'(\tau_j)}{U_i(\tau_j)},$$

esto ya que α y todos los coheficientes en los polinomios U_j y V yacen en F y así están fijados por σ.

Añadiendo todas las expresiones conjugadads y dividiéndolas entre s (nótese que s^{-1} existe porque se está trabajando en un campo de característica 0), primeramente, por diferenciación logarítmica se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{(A_1 \cdots A_s)'}{A_1 \cdots A_s} &= \frac{A_1'(A_2 \cdots A_s) + (A_1)A_2'(A_3 \cdots A_s) + \cdots + (A_1 \cdots A_{s-1})A_s'}{A_1 \cdots A_s} \\ &= \frac{A_1'}{A_1} + \cdots + \frac{A_s'}{A_s}.\end{aligned}$$

De dónde se obtiene que

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\alpha \\ &= \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\sigma_j(\alpha) \\ &= \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\left(V(\tau_j)' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{U_i'(\tau_j)}{U_i(\tau_j)}\right) \\ &= \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}V(\tau_j)' + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s}\frac{(U_i(\tau_1)\cdots U_i(\tau_s))'}{U_i(\tau_1)\cdots U_i(\tau_s)}\end{aligned}$$

Nótese que $\frac{1}{s}(V(\tau_1) + V(\tau_2) + \cdots + V(\tau_s))$ está fijado por todos los automorfismos porque es simétrico. Asimismo todos los automorfismos fijan cada $\frac{(U_i(\tau_1)\cdots U_i(\tau_s))'}{U_i(\tau_1)\cdots U_i(\tau_s)}$ porque son simétricos, por ende, cada uno de estos yacen en F.

Definiendo $v = \frac{1}{s}(V(\tau_1)+\cdots+V(\tau_s))$ y $u_i = U_i(\tau_1)\cdots(\tau_s)$ se obtiene lo deseado.

Caso 2: Supongase que $t_1 = t$ es transcendental sobre F. Nuevamente se tiene que $v, u_1, \cdots, u_n \in F(t_1) = F(t)$. Pero ahora ya que t es transcendental, se necesita considerar los polinomios racionales en t con coeficientes en F. Tales polinomios pueden ser factorizados y para cualquier $w = u_i$ se puede obtener $w = a_1(t)^{k_1}\cdots a_l(t)^{k_l}\cdot b$ donde $a_i(t) \in F[t]$ es mónico e irreducible, $k_j \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ (exponentes positivos y negativos), y $b \in F^{\times}$. Nuevamente usando la diferenciación logarítmica se tiene

$$\begin{aligned}\frac{w}{w'} &= \frac{(ba_1(t)^{k_1}\cdots a_l(t)^{k_l})'}{ba_1(t)^{k_1}\cdots a_l(t)^{k_l}} \\ &= \frac{b'}{b} + k_1\frac{a_1'(t)}{a_1(t)} + \cdots + k_l\frac{a_l'(t)}{a_l(t)}.\end{aligned}$$

Por lo que sin pérdida de generalidad se puede asumir que cada u_i es o bien mónico e irreducible $a(t) \in F[t]$ o un elemento de F.

En cuanto a v, se debe descomponer en sus fracciones parciales. Tras un posible término polinómico, cada término en la parte fraccional de esta descomposición es de la forma $\frac{g(t)}{f(t)^r}$ para algún monomio irreducible $f(t) \in F[t]$ y algún $g(t) \in F[t]$ donde $deg(g(t)) < deg(f(t))$.

Caso 2A: Supóngase que (en adición a ser transcendental) t es logarítmico sobre F. Esto significa que existe algún $a \in F^{\times}$ tal que $t' = \frac{a'}{a}$. Por ende $t' = a'/a \in F$. Por el lema anterior (lema 2.4), si $f(t) \in F[t]$, entonces $(f(t)' \in F[t]$ y $(f(t))'$ tiene un grado menor por uno de $f(t)$. Ya que $f(t)$ es irreducible (y F es separable ya que tiene característica 0), $(f(t))'$ y $f(t)$ deben ser primos relativos, nótese que:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{g(t)}{f(t)^r}\right)' &= \frac{(g(t))'(f(t))^r - g(t)r(f(t))^{r-1}(f(t))'}{(f(t))^{2r}} \\
&= \frac{(g(t))'}{(f(t))^r} - \frac{rg(t)(f(t))'}{(f(t))^{r+1}}.
\end{aligned}
$$

Ahora $deg(g(t))$ y $deg((f(t))')$ son ambos menores a $deg(f(t))$. Esto junto al hecho de que $f(t)$ es irreducible implica que $f(t)$ no divide a $g(t)$ ni a $(f(t))'$. Por lo tanto la descomposición en fracciones parciales de v' involucra a término con denominador $(f(t))^{r+1}$. Por lo tanto esto aparece en la descomposición de fracciones parciales de α. Pero $\alpha \in F$ por lo que no tiene descomposición en fracciones parciales (es su propia descomposición). Por lo tanto dichos términos no pueden aparecer en la descomposición de los v , de manera similar, no pueden aparecer en la descomposición de los u_i. Por lo tanto $u_1, u_2, \cdots, u_n \in F$ y $v = V(t) \in F[t]$.

Para este punto tenemos que

$$
\alpha = (V(t))' - \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}.
$$

Donde c_i, u_i, u_i' y α todas yacen en F. Por lo tanto $(V(t))' = c\frac{a'}{a} + d'$ donde $a, d \in F$ y c es una constante. Así tenemos que

$$
\alpha = dt + c\frac{a'}{a} + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i},
$$

como se deseaba.

Caso 2B: Supóngase que (en adición a ser transcendental) t es exponencial sobre F. Esto significa $\frac{t'}{t} = b$ para algún $b \in F$. Recordemos que el lema anterior dice que $deg(f(t)) = deg((f(t))')$ y $f(t)$ divide a $(f(t))'$ solo si $f(t)$ es monomial.

Por lo que si $f(t)$ es monico, irreducible y $f(t) \neq t$, entonces $f(t)$ no es monomial y así $f(t)$ no divide $(f(t))'$. Como antes, si $f(t) \neq t$, entonces $\frac{(f(t))'}{f(t)}$ puede ser escrito como un polinomio en t más una fracción propia con denominador $f(t)$.

Llegando a la misma contradicción puesto que $\frac{g(t)}{(f(t))^r}$ aparece en la descomposición en fracciones parciales de v, entonces v' va a tener un término en su descomposición con denominador $(f(t))^{r+1}$, por lo que este aparece en la descomposición de $\alpha \in F$ (la cual no tiene parte fraccional). Lo mismo aplica para las u_i. Por lo tanto, las únicas partes fraccionales que pueden aparecer deben tener denominador $f(t)^m = t^m$. Esto implica que $v = V(t) = \sum a_j t^j$ para algún $a_j \in F$, donde la suma está sobre un conjunto de números enteros (algunos pueden ser negativos). Similarmente, todos los $u_i \in F$ con una posible excepción de algún $u_i = t$, sin pérdida de generalidad dígase que $u_i = t$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} = c_i \frac{t'}{t} + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i},$$

pero $\frac{t'}{t} = b' \in F$. Por lo tanto, nuevamente

$$(V(t))' = \alpha - c_1 b' - \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}.$$

Recordando que $(at^n)' = ht^n$ para algún $h \in F^{\times}$. Pero $(V(t))'$ no tiene t términos (esta pertenece a F), por lo tanto,

$$\alpha = c_i \frac{t'}{t} + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' = (c_1 b + v)' + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i}.$$

Como se deseaba. □

Ahora con el teorema de Liouville presente podemos demostrar que algunas funciones elementales no tienen antiderivadas en forma elemental.

Lema 2.6. *Sean $f(x), g(x)$ funciones racionales distintas de cero y además $g(x)$ no es constante, entonces $\int f(x)e^{g(x)}$ es elemental si y solo si $f(x) = a'(x) + a(x)g'(x)$ para alguna función racional $a(x)$.*

Demostración. Vamos a suprimir la variable x y escribir $f = f(x)$, $g = g(x)$, etc. Sea $F = \mathbb{C}(x)$ y $t = e^g$ de tal manera que tengamos $t'/t = g'$ (i.e, $F(t)$ es una extensión exponencial). Por otro lado, ya que g no es constante, $F(t)$ es una extensión transcendental pura de F. Supóngase que $\int fe^g dx = \int ftdx$ es elemental, por el teorema de Liouville podemos escribir

$$ft = v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} = \frac{a'}{b^k} - k\frac{ab'}{b^{k+1}}.$$

Para algún $v,\ u_1,\ \cdots,\ u_n \in F(t)$ y $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$

Como en la demostración del teorema de Liouville, podemos factorar cada $u_i \notin F$ en un producto de potencias de elementos irredicubles de $F[t]$ y de ahí utilizando la diferenciación logaritmica, se puede garantizar que cada $u_i \neq F$ es distinto, mónico e irreducible.

Ahora imaginémonos que v ha sido extendido en su descomposición en fracciones parciales (con respecto al anillo $F[t]$). Si esta descomposición de tuviera algún término (distinto de cero) a/b^k (necesariamente con $deg(a) < deg(b)$ y $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ como esto es parte de lo que toma para ser un término bajo una descomposición de fracciones parciales), entonces al calcular v' vamos a tener un término

$$\frac{a'b^k - akb^{k-1}b'}{b^{2k}} = \frac{a'}{b^k} - k\frac{ab'}{b^{k+1}}$$

Nótese que $v' = ft - \sum c_i u_i'/u_i$ donde los u_i de grado mayor a cero son distintos, mónicos e irreducibles y solo aparecen en los denominadores elevados a la primera potencia. Esto significa que o bien $a'b^k - akb^{k-1}b' = 0$ (i.e, $(a/b)' = 0$) o $k = 1$ (i.e, solo la primera potencia de b pueden aparecer en el denominador)

Ahora si $k = 1$, tenemos que

$$\frac{a'}{b} - \frac{ab'}{b^2}$$

y por ende el segundo término no puede se irreducible (después de reducir solo las potencias de grado uno pueden aparecer), así b debe dividir $-ab'$ (en $F[t]$).

Ahora ya que b es irreducible, entonces b o bien divide a $-a$ o b' , pero $deg(a) < deg(b)$, entonces b debe dividir a b', pero por la segunda parte del lema 2.4, tenemos que $deg(b) = deg(b')$, esto significa que $b' = cb$ para algún $c \in F$. Nuevamente por el lema 2.4, b debe ser monomial. Este es irreducible, mónico y monomial, entonces $b = t$.

Por otra parte, $a'b^k - akb^{k-1}b' = 0$, así $a'b = kab'$. Por lo tanto b divide a kab', de dónde se concluye que $b = t$. Nótese que esto implica que los únicos términos fraccionales en la descomposición en fracciones parciales de v tienen denominadores $b^k = t^k$ esto nos lleva a $v = \sum p_j t^j$ para algún $p_j \in F$ (la suma recorre un conjunto finito de enteros), nótese que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} &= ft - v' \\ &= ft - \sum p_j t^j,\end{aligned}$$

y u_j esta o bien en F o es mónico irreducible. Por lo tanto el único $u_i \notin F$ será $u_i = t$. En este caso, $u_i' = t'/t \in F$ lo que implica que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \in F.$$

Ya para este punto tenemos que

$$\begin{aligned}ft &= v' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} \\ &= \sum p_j t^j + \sum p_j j t^{j-1} t' + q,\end{aligned}$$

donde $q = \frac{u_i'}{u_i} \in F$. Recordando que $t'/t = g' \in F$ entonces

$$ft = \sum p_j' t^j + \sum j p_j g' t^j + q$$

Comparando los coeficientes de t^1, obtenemos que $f = p_1' + 1p_1g'$, si $a = p_1$, se concluye que $f = a' + ag'$ como se deseaba.

Por último, supóngase que $f = a' + ag'$ para algún $a \in F$, entonces $\int fe^g = \int (a' + ag')e^g = ea^g$. $\square$

A este último lema también se lo conoce como Teorema fuerte de Liouville, siendo este también sumamente útil para demostrar que algunas funciones no tienen primitiva elemental, algunos ejemplos que detallan lo dicho se presentan a continuación.

Ejemplo 2.14. La función $F(x) = \int e^{x^2} dx$ no es elemental

Demostración. Usando el lema 2.6, entonces $f(x) = 1$ y $g(x) = x^2$, por lo que si $F(x)$ fuese elemental, entonces existiría una solución racional $a(x) \in \mathbb{C}(x)$ tal que

$$1 = a'(x) + 2xa(x) \tag{2.1}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a(x) = p(x)/q(x)$ donde $p(x), q(x)$ son polinomios primos relativos y $q(x) \neq 0$, así

$$a'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)} \tag{2.2}$$

reemplazando 2.2 en 2.1 se obtiene que

$$q(x)[q(x) - 2xp(x) - p'(x)] = -p(x)q'(x)$$

Supongamos que q posee una raíz r de multiplicidad $k \geq 1$, entonces r es una raíz de $q(x)[q(x) - 2xp(x) - p'(x)]$ con multiplicidad mayor o igual a k, por otro lado, ya que p y q son primos relativos, entonces r es una raíz de $-p(x)q'(x)$ con multiplicidad $k - 1$, esto implicaría que necesariamente $q(x)$ debe ser una constante, recordando que $a(x) = p(x)/q(x)$, entonces $a(x)$ debe ser un polinomio, si nos fijamos en los grados de la igualdad 2.1, entonces

$$0 = deg(a'(x) + 2xa(x))$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto no existe tal $a(x)$ con lo que se concluye que $F(x) = \int e^{x^2}$ no es elemental. $\square$

Ejemplo 2.15. La función $F(x) = \int \frac{e^x}{x} dx$ no es elemental

Demostración. Usando el lema 2.6, entonces $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x$, entonces si F fuera elemental, entonces debería existir una función racional $a(x) \in \mathbb{C}(x)$ tal que

$$\frac{1}{x} = a'(x) + a(x) \tag{2.3}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a(x) = p(x)/q(x)$ donde $p(x), q(x)$ son polinomios primos relativos y $q(x) \neq 0$, así

$$a'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)} \tag{2.4}$$

reemplazando 2.4 en 2.3 se obtiene que

$$q(x)^2 = x[p'(x)q(x) - p(x)q'(x) + p(x)q(x)]$$

Supongamos que $q(x)$ tiene alguna raíz $r \neq 0$ de multiplicidad k, por lo que nuevamente regresamos a la misma contradicción que la del ejemplo anterior. Por lo que la única raíz que puede tener es $q(x)$ es 0.

Ya que $q(x)^2 = x[p'(x)q(x) - p(x)q'(x) + p(x)q(x)]$, 0 es una raíz (y debe ser repetida), entonces $q(x) = cx^k$ para algún $k > 1$ de dónde:

$$\begin{aligned} x^k(ckp(x)) &= xp(x)kcx^{k-1} \\ &= xp(x)q'(x) \\ &= q(x)[xp'(x) + p(x) - q(x)] \\ &= cx^k[xp'(x) + p(x) - cx^k] \end{aligned}$$

lo que implica que $kp(x) = xp'(x) + p(x) - cx^k$ que es equivalente a $(k-1)p(x) = xp'(x) - cx^k$, así, $p(x)$ tiene a 0 como raíz, pero entonces

$p(x)$ y $q(x)$ ya no serían primos relativos lo que es una contradicción con lo que se concluye que $F(x)$ no es elemental. $\square$

Ejemplo 2.16. La función $F(x) = \int x^{2n} e^{ax^2} dx$ no es elemental para $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Usando el lema 2.6, entonces $f(x) = x^{2n}$ y $g(x) = ax^2$, entonces si F fuera elemental, entonces debería existir una función racional $a(x) \in \mathbb{C}(x)$ tal que

$$x^{2n} = a'(x) + a(x) \cdot 2ax. \tag{2.5}$$

Supongamos que $a(x) = p(x)/q(x)$ dónde p y q son polinomios primos relativos, de dónde

$$a'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)} \tag{2.6}$$

así, reemplazando 2.6 en 2.5 se obtiene que

$$x^{2n}q^2(x) = p'(x)q(x) - p(x)q'(x) + 2axp(x)q(x)$$

que puede ser escrito como

$$[x^{2n}q(x) - p'(x) - 2axp(x)]q(x) = -p(x)q'(x)$$

Si r es un cero de multiplicidad $k \geq 1$ de $q(x)$, entonces r es una raíz de $[x^{2n}q(x) - p'(x) - 2axp(x)]q(x)$ con multiplicidad mayor o igual a k, por otro lado ya que p y q son primos relativos, entonces r es una raíz de $-p(x)q'(x)$ con multiplicidad $k-1$, esto implicaría que necesariamente q debe ser una constante. Sin pérdida de generalidad, sea $q(x) = 1$, entonces 2.5 se transforma en

$$x^{2n} = p'(x) + 2axp(x) \tag{2.7}$$

Vamos a demostrar que 2.7 no tiene solución, esto comparando sus coeficientes. Ya que p es un polinomio en x, entonces para $n \geq 1$, el grado de $p(x)$ debe ser $2n-1$. Sea $p(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} c_j x^j$, sustituyendo en 2.7 se obtiene

$$x^{2n} = c_1 + \sum_{j=1}^{2n-2} [(j+1)c_{j+1} + 2ac_{j-1}]x^j + 2ac_{2n-2}x^{2n-1} + 2ac_{2n-1}x^{2n}$$

De esto se concluye que $c_1 = 0$, $c_{2n-2} = 0$, $2ac_{2n-1} = 1$ y por último $(j+1)c_{j+1} + 2ac_{j-1} = 0$. Estas últimas igualdades implican que como $c_1 = 0$, entonces $c_3 = 0$, $c_5 = 0, \cdots$, $c_{2n-1} = 0$ pero esto claramente contradice la tercer ecuación $c_{2n-1} = 1/(2a)$. Por lo tanto no existe un polinomio p que satisfaga 2.7 para $n \geq 1$. Si $n \leq 0$ entonces 2.7 claramente no tiene solución polinomial. Con lo que se concluye que no existe una función racional $a(x)$ que satisfaga 2.5. □

Ejemplo 2.17. La función $F(x) = \int x^{-n}e^{cx}dx$ con n un entero positivo y c una constante diferente de cero no es elemental.

Demostración. La demostración se realiza de manera análoga a lo presentado en el ejemplo anterior. □

Ejemplo 2.18. La función $F(x) = \int e^{x^n}dx$, donde n es una número natural mayor a 2 no es elemental

Demostración. Usando el lema 2.6, entonces $f(x) = 1$ y $g(x) = x^n$, por lo que si $F(x)$ fuese elemental, entonces existiría una solución racional $a(x) \in \mathbb{C}(x)$ tal que

$$1 = a'(x) + nx^{n-1}a(x) \tag{2.8}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a(x) = p(x)/q(x)$ donde $p(x), q(x)$ son polinomios primos relativos y $q(x) \neq 0$, así

$$a'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)} \tag{2.9}$$

reemplazando 2.9 en 2.8 se obtiene que

$$q(x)[q(x) - nx^{n-1}p(x) - p'(x)] = -p(x)q'(x)$$

Supongamos que q posee una raíz r de multiplicidad $k \geq 1$, entonces r es una raíz de $q(x)[q(x) - nx^{n-1}p(x) - p'(x)]$ con multiplicidad mayor o igual a k, por otro lado, ya que p y q son primos relativos, entonces r es una raíz de $-p(x)q'(x)$ con multiplicidad $k-1$, esto implicaría que necesariamente $q(x)$ debe ser una constante, recordando que $a(x) = p(x)/q(x)$, entonces $a(x)$ debe ser un polinomio, si nos fijamos en los grados de la igualdad 2.8, entonces

$$0 = deg(a'(x) + nx^{n-1}a(x))$$

lo cual es una contradicción y por lo tanto no existe tal $a(x)$ con lo que se concluye que $F(x) = \int e^{x^n}$ no es elemental. □

Ejemplo 2.19. La función $F(x) = \int e^{p(x)}dx$ no es elemental cuando p es un polinomio de grado mayor o igual a 2.

Demostración. La demostración es análoga a lo presentando en el ejemplo anterior. □

Ejemplo 2.20. La función $F(x) = \int \frac{\text{sen}(x)}{x}dx$ no es elemental.

Demostración. Se puede reescribir la integral como

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{x}dx = \mathfrak{Im}\left(\int \frac{e^{ix}}{x}dx\right)$$

utilizando lo demostrado en el Ejemplo 2,15 se puede concluir que

$$\int \frac{e^{ix}}{x}dx$$

no es elemental, por lo tanto

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{x}dx$$

tampoco lo será.

□

Ejemplo 2.21. La función $F(x) = \int \frac{\cos(x)}{x} dx$ no es elemental.

Demostración. La resolución es análoga al ejercicio anterior. □

Ejemplo 2.22. La función $F(x) = \int \frac{1}{\ln(x)} dx$ no es elemental.

Demostración. basta realizar un cambio de variable, en este caso consideremos $u = \ln(x)$ de donde se obtiene que

$$\int \frac{1}{\ln(x)} = \int \frac{e^u}{u} du,$$

por lo que si $\int \frac{1}{\ln(x)} dx$ fuese elemental, entonces $\int \frac{e^u}{u}$ también lo sería, lo cual no es verdadero. □

Ejemplo 2.23. Las funciones

(I) $F(x) = \int \sqrt{\ln(x)} dx$.

(II) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} dx$.

(III) $F(x) = \int \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}} dx$.

(IV) $F(x) = \int e^{e^x} dx$.

no son elementales.

Demostración. Al igual que en los ejemplos anteriores basta realizar un cambio de variable, para (I) y (II) la sustitución que se debe realizar es $t^2 = \ln(x)$, para (III) se debe tomar $t^2 = x$ y para (IV) se debe tomar $t = e^x$. □

Ejemplo 2.24. La función $F(x) = \int \operatorname{sen}(p(x)) dx$ no es elemental cuando p es un polinomio de grado mayor o igual a 2.

Demostración. Se puede reescribir la integral como

$$\int \operatorname{sen}(p(x))dx = \mathfrak{Im}\left(\int e^{ip(x)}dx\right)$$

como ya se demostró con anterioridad $\int e^{ip(x)}dx$ no es elemental ya que $ip(x)$ es un polinomio de grado mayor o igual a 2, por lo tanto F no posee una antiderivada elemental.

□

Ejemplo 2.25. La función $F(x) = \int \cos(p(x))dx$ no es elemental cuando p es un polinomio de grado mayor o igual a 2.

Demostración. La demostración se realiza de manera análoga al anterior ejemplo. □

Teorema 2.3 (Teorema de Liouville - Hardy)**.** *Si $f(x)$ es una función racional, $\int f(x)\ln(x)dx$ es elemental si y sólo si existe una función racional $a(x)$ y una constante k tal que $f(x) = \frac{k}{x} + a'(x)$*

Demostración. Únicamente demostraremos que si $f(x) = \frac{k}{x} + a'(x)$, entonces $\int f(x)\ln(x)dx$ es elemental.

En efecto, se puede escribir a $\int f(x)\ln(x)dx$ como

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{k}{x} + a'(x)\right)\ln(x)dx &= \int \frac{k}{x}\ln(x)dx + \int a'(x)\ln(x)dx \\ &= \frac{k}{2}(\ln(x))^2 + \ln(x)a(x) + \int \frac{a(x)}{x}dx\end{aligned}$$

El último término $\int \frac{a(x)}{x}dx$ es elemental por el teorema de laplace, puesto que el integrando es una función racional. □

El teorema de Liouville-Hardy nos brinda otra prueba para determinar si una función posee una antiderivada elemental. Consideremos el ejemplo:

Ejemplo 2.26. La función $F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x-r}$ dónde r es un número distinto de cero no es elemental.

Demostración. Nótese que $1/(x-r) = k/x + a'(x)$ lo que implica que $a(x) = ln(x-r) - k\ln(x) + c$, lo cual no es una función racional para cualquier valor de k. □

2.2.3. El teorema de Chevyshev

Teorema 2.4 (Integral binómica de Chevyshev)**.** *La función* $F(x) = \int x^m(b+ax^n)^p dx$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$ *y* $a, b, n \neq 0$, *es elemental si y sólo si uno de los tres números* p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ *es entero.*

Demostración. Únicamente se demostrará que si uno de los tres números p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ es entero, entonces la integral $\int x^m(b+ax^n)^p dx$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$ y $a, b, n \neq 0$, es elemental. Una demostración completa del teorema se la puede encontrar en [Chebyshev, 1899] página 147.

Consideremos $ax^n = bt$ por lo que la integral $\int x^m(b + ax^n)^p dx$ se transforma a:

$$\begin{aligned}
&\int x^m(b+ax^n)^p dx \\
&= \int \left(\frac{bt}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot (b+bt)^p \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot b^p \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \int t^{\frac{m}{n}} \cdot (1+t)^p \cdot t^{\frac{1}{n}-1} dt \\
&= \frac{b^{\frac{m+1}{n}+p}}{na^{\frac{m+1}{n}}} \int t^{\frac{m+1}{n}-1}(1+t)^p dt
\end{aligned}$$

Aquí se puede omitir a

$$\frac{b^{\frac{m+1}{n}+p}}{na^{\frac{m+1}{n}}},$$

ya que su presencia no afecta a la demostración de que F es elemental, además consideremos $r = \frac{m+1}{n} - 1$ (que es un racional), por lo que basta analizar a

$$\int t^r(1+t)^p dt$$

- Caso 1 (p es entero): En este caso solo bastaría expandir $(1+t)^p$ de dónde

$$\begin{aligned}\int t^r(1+t)^p dt &= \int t^r \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \int t^{r+k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{t^{r+k+1}}{r+k+1} + c\end{aligned}$$

- Caso 2 ($\frac{m+1}{n}$ es entero): Si $\frac{m+1}{n}$ es entero r también lo será, por lo que si aplicamos la sustitución $v = 1+t$ obtenemos

$$\int (v-1)^r v^p dv$$

  nótese que si r es cero es inmediato, si r es positivo basta expandir el polinomio $(v-1)^r$ y distribuir v^p y si r es negativo, tenemos un cociente de polinomios que por el teorema (2.1) de Laplace sabemos que es elemental.

- Caso 3 ($\frac{m+1}{n} + p$ es entero): Este caso se demuestra de manera similar a los anteriores

Por lo tanto, en cualquier caso F es elemental. □

Ejemplo 2.27. la función $F(x) = \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$ no es elemental.

Demostración. Usando el teorema 2.4, obtenemos los coeficientes $m = 0,\ n = 2,\ p = 1/3$, de donde

- p no es entero ya que $p = 1/3$
- $\frac{m+1}{n}$ no es entero ya que $\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$
- $\frac{m+1}{n} + p$ no es entero ya que $\frac{m+1}{n} + p = \frac{0+1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

por lo tanto $F(x)$ no puede ser elemental. □

Ejemplo 2.28. la función $f(x) = \sqrt{\text{sen}(x)}$ no posee una antiderivada elemental.

Demostración. Usando un cambio de cambio de variable (en este caso una sustitución trigonométrica):

$$\text{sen}(x) = u, \qquad dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

de donde

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sqrt{\text{sen}(x)}dx \\ &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du \end{aligned}$$

aplicando el teorema 2.4, entonces se obtienen los coeficientes $m = \frac{1}{2},\ n = 2,\ p = -\frac{1}{2}$, de donde

- p no es entero ya que $p = -\frac{1}{2}$
- $\frac{m+1}{n}$ no es entero ya que $\frac{m+1}{n} = \frac{1/2+1}{2} = \frac{3}{4}$
- $\frac{m+1}{n} + p$ no es entero ya que $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1/2+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

por lo tanto $F(x)$ no puede ser elemental. □

Ejemplo 2.29. la función $F(x) = \int \sqrt{\cos(x)}dx$ no es elemental.

Demostración. La demostración se realiza de manera análoga al enterior ejemplo. □

Nota. A pesar de que $\int \sqrt{\text{sen}(x)}dx$ y $\int \sqrt{\cos(x)}dx$ no son elementales, $\int \sqrt{\tan(x)}dx$ si lo es, el ejemplo mostrado a continuación aborda lo dicho.

Ejemplo 2.30. La función $F(x) = \int \sqrt{\tan(x)}dx$ es elemental.

Demostración. En este caso (al igual que los anteriores) se debe realizar una sustitución,

$$\tan(x) = u, \qquad dx = \frac{1}{1+u^2}du$$

de donde

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sqrt{\tan(x)}dx \\ &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{1+u^2}du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}}(1+u^2)^{-1}du \end{aligned}$$

En este caso $p = -1$ que es un entero y por lo tanto F es elemental, cabe recalcar que a pesar de que $\sqrt{tan(x)}$ tiene primitiva elemental, no es fácil encontrarla, lo que nos puede llevar a pensar que no existe tal. □

Lema 2.7. *Sean $r, s \in \mathbb{Z}$, $F(x) = \int (1-x^r)^{1/s}$ es elemental si y sólo si alguna de las condiciones siguientes se cumple:*

(I) $s = \pm 1$

(II) $r = \pm 1$

(III) $s = r = 2$

(IV) $s = -r$

Demostración. Únicamente se demostrará que si alguna de las condiciones presentadas con anterioridad se cumple, entonces F es elemental

(I) Si $s = \pm 1$, entonces $p = \pm 1$ que es entero y por lo tanto F es elemental

(II) Si $r = \pm 1$, entonces $n = \pm 1$, de donde $\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{n} = \pm 1$ que es entero y por lo tanto F es elemental.

(III) Si $s = r = 2$, entonces $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$ de donde $\frac{m+1}{n} + p = \frac{0+1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ que es entero y por lo tanto F es elemental.

(IV) $s = -r$, entonces $n = r = -s$ y $p = \frac{1}{s}$ de donde $\frac{m+1}{n} + p = \frac{0+1}{-s} + \frac{1}{s} = 0$ que es entero y por lo tanto F es elemental.

Por lo tanto en cualquier caso F es elemental. □

Ejemplo 2.31. La función $F(x) = \int \sqrt{1-x^2}dx$ es elemental.

Demostración. Dicha función es elemental ya que satisface la condición *III* del Lema 2.6 ($r = s = 2$). □

2.2.4. Funciones inversas

Este último resultado es una aplicación interesante de la integración por partes.

Teorema 2.5. *Sea $f(x)$ y $f^{-1}(y)$ inversas una de la otra en algún intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, entonces*

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int f^{-1}(y)dy$$

Demostración. Aplicando integración por partes con $u = f(x)$ y $dv = dx$ y observando que $x = f^{-1}(y)$ y $dy = f'(x)dx$, entonces se puede reescribir a $\int f(x)dx$ como sigue:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= xf(x) - \int xf'(x)dx \\ &= xf(x) - \int f^{-1}(y)dy\end{aligned}$$

□

Teorema 2.6. *Si $f(x)$ y $f^{-1}(y)$ son funciones elementales sobre un intervalo cerrado e inversas una de la otra, entonces $\int f(x)dx$ es elemental si y solo si $\int f^{-1}(y)dy$ es elemental.*

Demostración. Primeramente, si $\int f(x)dx$ es elemental, entonces se tiene que $\int f(x)dx = F(x) \in \mathcal{F}$, de donde

$$F(x) = xf(x) - \int f^{-1}(y)dy$$

despejando $\int f^{-1}(y)dy$ se obtiene que

$$\int f^{-1}(y)dy = xf(x) - F(x)$$

por lo tanto debe ser elemental ya que se expresa a través de funciones elementales $xf(x) - F(x)$. De manera análoga se demuestra que si $\int f^{-1}(y)dy$ es elemental, entonces $\int f(x)dx$ es elemental. $\square$

Ejemplo 2.32. La función $F(x) = \int \sqrt{\ln(x)}dx$ no es elemental.

Demostración. Sea $y = \sqrt{\ln(x)}$, entonces su inversa está dada por $x = e^{y^2}$, notemos que $\int e^{y^2}dy$ no es elemental como ya se demostró anteriormente, por lo tanto, por el teorema 2.5, $F(x) = \int \sqrt{\ln(x)}dx$ no es elemental. $\square$

Ejemplo 2.33. La función $f(x) = \sqrt[n]{\ln(x)}$ con n un natural mayor a dos, no posee una antiderivada elemental.

Demostración. La función $f(x) = \sqrt[n]{\ln(x)}$ con n un natural mayor a dos, no posee una antiderivada elemental puesto que su inversa e^{y^n} tampoco posee una antiderivada elemental. $\square$

2.3. Propiedades

Lema 2.8. *El conjunto de las funciones $f \in \mathcal{F}$ no es cerrado bajo la suma, el producto o la composición de funciones*

Demostración. La demostración se la realizará por casos

- Para la suma: Sea $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$ y $g(x) = 1 - \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$, se sabe que f y g no poseen antiderivadas elementales, pero $\int f(x) + g(x)dx$ es igual a

$$\int \sqrt{\operatorname{sen}(x)} + 1 - \sqrt{\operatorname{sen}(x)}dx = \int 1dx = x + c$$

- Para el producto: Sea $f(x) = e^{x^2}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ se sabe que f y g no poseen antiderivadas elementales, pero $\int f(x) \cdot g(x)dx$ es igual a

$$\int e^{x^2} \cdot e^{-x^2} dx = \int 1dx = x + c$$

- Para la composición de funciones: Sea $f(x) = e^{x^n}$ y $g(x) = \sqrt[n]{\ln(x)}$, se sabe que f y g no poseen antiderivadas elementales, pero $\int f(g(x))dx$ es igual a

$$\int e^{\left(\sqrt[n]{\ln(x)}\right)^n} dx = \int e^{\ln(x)} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$\square$

2.4. Ejemplos adicionales

En esta sección del libro se busca en listar algunos ejemplos de funciones que no poseen antiderivada elemental, para demostrar lo tal se debe recurrir a los teoremas presentados con anterioridad.

2.4.1. Funciones algebraicas

Las siguientes funciones algebráicas, dónde destacan las funciones elípticas carecen de una antiderivada elemental:

1. $f(x) = \sqrt{ax^n + b}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos y $n \in \mathbb{Q}$ tal que $n > 0$.
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax^n+b}}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos y $n \in \mathbb{Q}$ tal que $n > 0$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ con $0 < k < 1$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ con $0 < k < 1$
5. $f(x) = \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}$ donde p y q son polinomios primos relativos (i.e, sin raíces en común) y $deg(q) \geq 3$ y $deg(p) < \frac{deg(q)}{2} - 1$
6. $f(x) = x^m(ax^n + b)^p$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $a, b, n \neq 0$ y $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p \notin \mathbb{Z}$ (véase el Teorema 2.3 Intrgral binómica de Chevyshev).

Nota. Nótese que al integrar 3 y 4 se puede utilizar un cambio de variable, como sigue

- $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}}dt$
- $\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2(t)}dt$

2.4.2. Funciones trigonométricas

Las siguientes funciones trigonométricas no poseen una antiderivada elemental.

1. $f(x) = \cos(p(x))$ y $g(x) = \operatorname{sen}(p(x))$ no poseen antiderivada elemental cuando p es un polinomio de grado mayor o igual a 2.
2. $f(x) = \operatorname{sen}^p(x)\cos^q(x)$ con $p, q \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p+1}{2}$, $\frac{q-1}{2}$, $\frac{p+q}{2} \notin \mathbb{Z}$.
3. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ y $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ y $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$
5. $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \sqrt{x}\cos(x)$
6. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$ y $g(x) = \sqrt{\cos(x)}$
7. $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ y $g(x) = \cos(e^x)$
8. $f(x) = \ln(x)\operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \ln(x)\cos(x)$
9. $f(x) = x\tan(x)$ y $g(x) = x\cot(x)$
10. $f(x) = x\sec(x)$ y $g(x) = x\csc(x)$
11. $f(x) = \sec(\sqrt{x})$ y $g(x) = \csc(\sqrt{x})$
12. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x^2)$ y $g(x) = \arccos(x)$
13. $f(x) = \sqrt{\operatorname{arc\,sen}(x)}$ y $g(x) = \sqrt{\arccos(x)}$
14. $f(x) = \operatorname{arc}\sec^2(x)$ y $g(x) = \operatorname{arc}\csc^2(x)$
15. $f(x) = \frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{x}$ y $g(x) = \frac{\arccos(x)}{x}$

2.4.3. Funciones exponenciales y logarítmicas

Las siguientes funciones logarìtmicas y exponenciales no poseen una antiderivada elemental:

1. $f(x) = e^{x^2}$.
2. $f(x) = e^{1/x}$.
3. $f(x) = e^{1/x^2}$.
4. $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$.
5. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$.
6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$.
7. $f(x) = e^{e^x}$.
8. $f(x) = \ln(\ln(x))$.
9. $f(x) = \sqrt{x}e^{ax}$ con $a \neq 0$.
10. $f(x) = \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}}$ con $a \neq 0$.
11. $f(x) = e^x \ln(x)$.
12. $f(x) = x^x$.

Aún más general, las siguientes funciones no poseen antiderivadas elementales:

1. $f(x) = e^{p(x)}$ con p un polinomio de grado mayor o igual a 2.
2. $f(x) = x^{2n}e^{ax^2}$ con $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $f(x) = \frac{e^{ax+b}}{x^n}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
4. $f(x) = e^{ax} \ln^n(bx)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5. $f(x) = \ln^n(\ln(ax^k))$ con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $a, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
6. $f(x) = \frac{\ln(ax^n+b)}{x}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$
7. $f(x) = \frac{\ln(x)}{p(x)}$ con p un polinomio, $deg(p) \geq 0$ y sin raíces repetidas.
8. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-r}$ dónde r es un número real distinto de 0.

2.4.4. Funciones hiperbólicas

Las siguientes funciones hiperbólicas no poseen atiderivada elemental.

1. $f(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{x}$ y $g(x) = \frac{\cosh(x)}{x}$
2. $f(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$ y $g(x) = \cosh\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{senh}(x)$ y $g(x) = \sqrt{x}\cosh(x)$
4. $f(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = \frac{\cosh(x)}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \operatorname{senh}(e^x)$ y $g(x) = \cosh(e^x)$
6. $f(x) = \ln(x)\operatorname{senh}(x)$ y $g(x) = \ln(x)\cosh(x)$
7. $f(x) = \operatorname{sen}(p(x))$ y $g(x) = \cos(p(x))$ donde p es un polinomio de grado mayor o igual a 2.

3

Métodos para la integración

«En lo que respecta al Cálculo, una aproximación infinitamente precisa ya no es una aproximación»

– Andrew Wiles

En los capítulos anteriores ya vimos que existen funciones elementales que no poseen una antiderivada elemental, pero supongamos que se desea hallar el área bajo la curva de una función f (siempre que sea posible), en este caso lo natural es buscar una función F tal que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

pero al no existir tal F (al menos en forma elemental) se debe recurrir a métodos matemáticos o métodos numéricos para hallar $\int_a^b f(x)dx$. Durante este capítulo se explorarán algunos de los más notables, para realizar el cálculo de integrales definidas.

3.1. Polinomios de Taylor

El hallazgo realizado por Newton y otros, de que muchas funciones conocidas pueden ser expresadas como "polinomios de orden infinito.º "series de potencias", marcó un significativo triunfo para el Cálculo. Este descubrimiento reveló la capacidad de representar diversas funciones mediante expansiones infinitas, cuyos coeficientes pueden ser determinados mediante leyes elegantes y claras. Esta perspicaz conexión entre las funciones y las series de potencias ha demostrado ser esencial en el análisis matemático, permitiendo un enfoque más comprensible y manipulable de funciones complejas a través de herramientas como los polinomios de Taylor.

Los polinomios de Taylor son aproximaciones polinómicas locales de funciones reales alrededor de un punto específico. Estos polinomios se construyen utilizando las derivadas de la función en ese punto.

Teorema 3.1. *Sea f un función real o compleja infinitamente diferenciable en el vecindario de un número a real o complejo, entonces f se puede expresa como:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

donde $f^{(n)}(a)$ representa la derivada de orden n de f evaluada en el punto a.

El teorema de Taylor se introduce comúnmente durante el estudio del cálculo, por lo que no es necesario ahondar profundamente en él en este contexto. En cambio, nos enfocaremos en su aplicación práctica en el cálculo de integrales indefinidas. No obstante, es valioso recordar algunas de las expansiones de Taylor de funciones ampliamente reconocidas.

- $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
- $$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
- $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
- $$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Problema 3.1. Calcule el valor de la siguiente integral

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(x^2)dx$$

Resolución. Utilizando la serie de Taylor de $\cos(x)$, entonces para $\cos(x^2)$, la serie de Taylor estará dada por

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$$

Reemplazando en la integral obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(x^2)dx &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^{4n}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{4n+1}}{4n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}
\end{aligned}$$

si evaluamos la serie desde $n = 0$ hasta $n = 100$ obtenemos que

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(x^2)dx \approx 0{,}97745142429132974$$

la cual es una aproximación al valor de la integral.

Nota. A través de las series de taylor es como se definen las integrales de Fresnel presentadas en el Capítulo 1, **Ejemplo 1.2**, dichas están dadas por:

- $$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}$$

- $$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$$

y cuyo gráfico es el siguiente

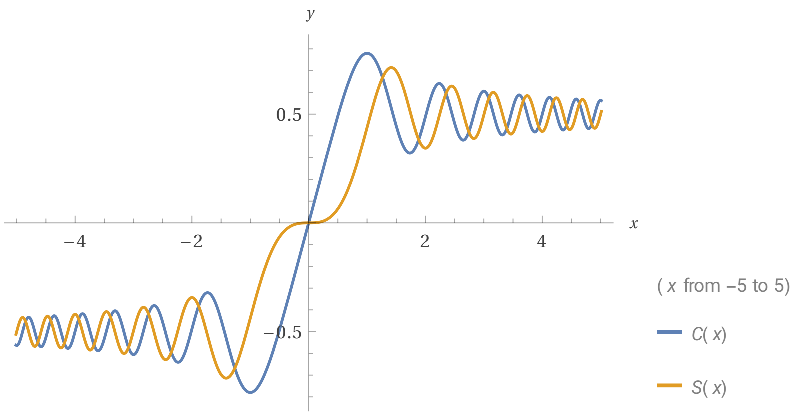


Figura 3.1: Funciones de Fresnel

Problema 3.2. Calcule el valor de la siguiente integral

$$\int_0^1 x^x dx$$

Resolución. Este problema resulta ligeramente más complejo que el anterior, pero de igual manera se requiere del uso de series de Taylor, vale recalcar que este es una de las identidades del «sueño de sophomore» presentadas en el Capítulo 1, **Ejemplo 1.4**.

Se puede reescribir a la integral como

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x dx &= \int_0^1 e^{\ln(x^x)} dx \\
&= \int_0^1 e^{x\ln(x)} dx \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln(x))^n}{n!} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln(x))^n}{n!} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (\ln(x))^n dx
\end{aligned}$$

Por el momento únicamente nos enfocaremos en $\int_0^1 x^n(\ln(x))^n dx$, lo primero a realizar va a ser un cambio de variable, tomando $u = -\ln(x)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n(\ln(x))^n dx &= \int_\infty^0 (e^{-u})^n(-u)^n(-e^{-u}) du \\
&= (-1)^n \int_0^\infty e^{-(n+1)u} u^n du
\end{aligned}$$

Nuevamente aplicando un cambio de variable, en este caso $t = (n+1)u$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
(-1)^n \int_0^\infty e^{-(n+1)u} u^n du &= (-1)^n \int_0^\infty e^{-t} \cdot \frac{t^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{n+1} dt \\
&= \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \\
&= \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \Gamma(n+1) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Con esto podemos calcular $\int_0^1 x^x dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^x dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (\ln(x))^n dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^m} \\
&= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^m} \\
&= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^m m^m} \\
&= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(-m)^m} \\
&= -\sum_{m=1}^{\infty} (-m)^{-m}
\end{aligned}$$

si evaluamos la serie desde $n = 0$ hasta $n = 100$ obtenemos que

$$\int_0^1 x^x dx \approx 0{,}7834305107121344070 59$$

la cual es una aproximación al valor de la integral.

3.2. Regla del trapecio

La regla del trapecio es un método numérico utilizado en cálculo integral para estimar el valor de una integral definida. Consiste en aproximar el área bajo la curva de una función mediante trapezoides que se forman al dividir el intervalo de integración en segmentos pequeños. Cada trapezoide se construye conectando dos puntos consecutivos en la curva, y la suma de las áreas de estos trapezoides proporciona una estimación del área total bajo la curva (véase la Figura 3.2). A medida que se reduce el tamaño de los segmentos, la aproximación se acerca al valor real de la integral.

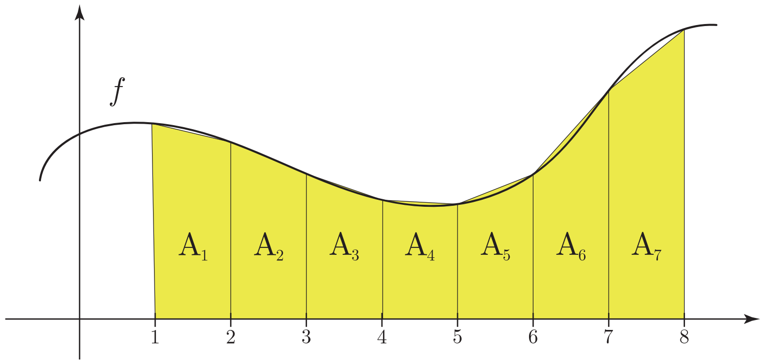


Figura 3.2: Regla del trapecio

La regla del trapecio es a menudo preferida sobre la aproximación por rectángulos (en cualquiera de sus formas) debido a que proporciona una estimación más precisa de la integral definida, la principal ventaja de los trapezoides radica en que se asemejan más a la forma de la curva, especialmente cuando la función varía significativamente, como se muestra en le Figura 3.3.

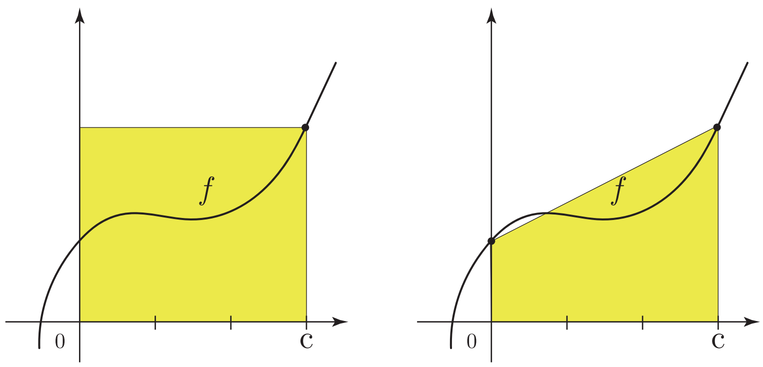


Figura 3.3: Aproximaciones de f

Al usar trapezoides, la regla del trapecio tiene en cuenta la pendiente de la función en cada punto, lo que ayuda a reducir el error de aproximación en comparación con la aproximación por rectángulos. Los trapezoides permiten capturar de manera más efectiva las variaciones locales de la función, proporcionando una estimación más precisa del área bajo la curva.

A medida que se utilicen más trapezoides, la aproximación del área será mejor

3.2.1. Deducción

A continuación se llegará a la fórmula para aproximar el área de f utilizando métodos numéricos.

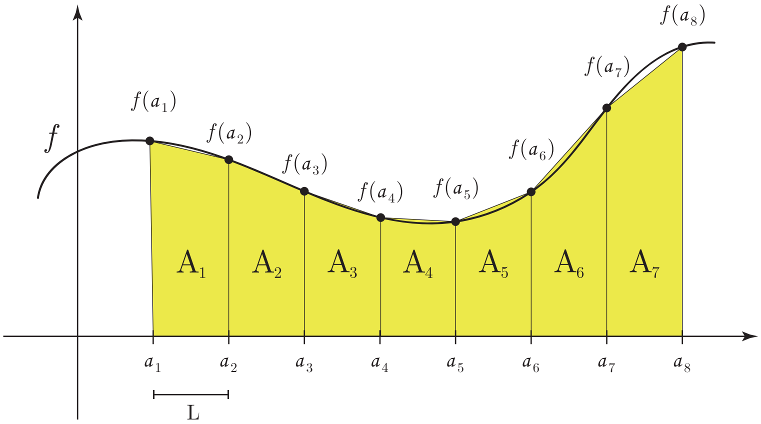


Figura 3.4: Aproximaciones de f

Sea f una función integrable y positiva en un intervalo cerrado $[a_1, a_n]$, para aproximar la integral de la función mediante trapecios, se consideran los puntos equidistantes $a_1,\ a_2\ a_3, \cdots, a_n$ y se calcula la longitud L de los subintervalos, que está dada por

$$L = \frac{a_n - a_1}{n-1},$$

con esto podemos podemos calcular las áreas encerradas en cada paralelogramo (hasta un total de $n-1$) las cuales están dadas por

$$A_n = L \cdot \frac{f(a_n) + f(a_{n+1})}{2}$$

por lo que el área total estará dada por

$$\begin{aligned}
A_t &= A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} \\
&= L \cdot \frac{f(a_1)+f(a_2)}{2} + \cdots + L \cdot \frac{f(a_{n-1})+f(a_n)}{2} \\
&= \frac{L}{2}[f(a_1) + 2f(a_2) + 2f(a_3) + \cdots + 2f(a_{n-1}) + f(a_n)] \\
&= L\left[\frac{f(a_1)+f(a_n)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f(a_k)\right]
\end{aligned}$$

Problema 3.3. Calcule aproximadamente el valor de la siguiente integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}dx,$$

utilizando la regla del trapecio, tomando 11 puntos (incluyendo los extremos del intervalo).

Resolución. Primeramente comencemos con un gráfico que detalle el problema

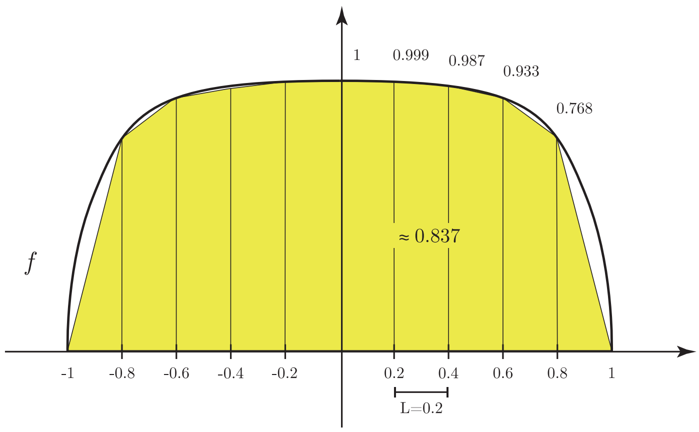


Figura 3.5: función $f = \sqrt{1-x^4}$

Nótemos que como $f(x) = \sqrt{1-x^4}$ es una función par, entonces podemos reescribir la integral como

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}dx = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^4}dx$$

nótese que en este caso basta tomar 6 puntos en el intervalo $[0,1]$ equidistantes, cuya longitud L estará dada por

$$L = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

Ahora procedemos a calcular en valor de la función en cada punto (se trabajará con 3 decimales de precisión).

n	x	$f(x)$
1	0.000	1.000
2	0.200	0.999
3	0.400	0.987
4	0.600	0.933
5	0.800	0.768
6	1.00	0.000

con esto, reemplazando el la fórmula de la regla del trapecio obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}dx &= 2\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^4}dx \\
&\approx 2L\left[\frac{f(a_1)+f(a_6)}{2} + \sum_{k=2}^{5} f(a_k)\right] \\
&\approx 2\cdot\frac{1}{5}\left[\frac{0+1}{2} + 0{,}999 + 0{,}987 + 0{,}933 + 0{,}768\right] \\
&\approx 1{,}675
\end{aligned}$$

dado que el valor real (con 3 decimales de exactitud) de la integral es 1,748, podemos ver que nuestro valor obtenido es una muy buena aproximación (aproximando el valor real en un 95.82 %).

Apéndice A

Otras formas de aproximar funciones

Como se expuso en el Capítulo 3, el empleo de series de potencia, especialmente las series de Taylor, suelen representar una herramienta valiosa para calcular la integral de una función en un intervalo determinado, siempre y cuando la función lo permita. No obstante, es crucial destacar que no todas las series o métodos para aproximar funciones son aptos para este propósito. A continuación, se evidenciará que no toda serie o método de aproximación es idóneo para el cálculo de integrales y se explicarán los motivos.

A.1. Series de Fourier

Las series de Fourier son una herramienta matemática que permite representar una función periódica como una suma infinita de funciones sinusoidales. Estas funciones sinusoidales tienen frecuencias que son múltiplos de la frecuencia fundamental de la función periódica original.

Dada una función periódica f que sea continua e integrable en un intervalo $[-L, L]$, entonces su serie de Fourier está dada por

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde

- $$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$
- $$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$
- $$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Nótese que surge un problema al usar estas series, por ejemplo, considérese la función cuya antiderivada no sea elemental como $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}$, de la cual se desea hallar

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}dx$$

si al igual que con las series de Taylor se deseara aproximar f mediante series de Fourier para posteriormente pasar a integrar, entonces surgirán varios problemas, el primero de ellos será determinar A_0, que está dado por

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)}dx$$

cuya integral que es justo lo que se desea hallar, por lo tanto no es recomendable recurrir a las series de Fourier.

A.2. Aproximantes de Padé

Un aproximante de Padé es una aproximación de una función mediante una función racional $p(x)/q(x)$. La notación $R_{m/n}(x)$ se utiliza para representar una serie de Padé, donde m y n son los grados de los polinomios en el numerador y denominador de la función racional, respectivamente.

$$R_{m/n}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{1+\sum_{k=1}^{n} b_k x^k} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n x^n}$$

Los aproximantes de padé son relativamente mejores que las series de Taylor, uno de los motivos es que dichas es que las series de Padé a menudo presentan un mejor comportamiento en los límites del dominio de convergencia en comparación con las series de Taylor, lo que las hace más adecuadas para aproximar funciones en regiones más extensas.

Por ejemplo el aproximante de Padé de la función $f(x) = e^{-x^2}$ es

$$R_{10/10}(x) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{72}x^6 + \frac{1}{1008}x^8 - \frac{1}{30240}x^{10}}{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{72}x^6 + \frac{1}{1008}x^8 + \frac{1}{30240}x^{10}}$$

nótese que ambas funciones f y su aproximante son sumamente idénticas, por lo que, por ejemplo al desear calcular

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

se podría aproximar dicha mediante

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{72}x^6 + \frac{1}{1008}x^8 - \frac{1}{30240}x^{10}}{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{72}x^6 + \frac{1}{1008}x^8 + \frac{1}{30240}x^{10}} dx$$

en este caso ya no existe el problema de la no existencia de la antiderivada en forma elemental del aproximante puesto que es una función racional y por el teorema de Laplace su antiderivada es elemental, pero surge uno nuevo, la dificultad de calcular la integral del determinante, es este el motivo por el cual esta aproximación no es usada en el cálculo de integrales definidas. Si se desea saber más sobre las series de Padé es recomendable revisar el libro [George Jr et al., 1975].

Conclusiones

Para abordar el tema de la integración en términos finitos, se realizó una investigación preliminar. Se revisó bibliografía relevante, incluyendo libros y artículos sobre análisis matemático y álgebra diferencial, seleccionando cuidadosamente la documentación más útil para el estudio.

El estudio se centró en diversos teoremas que permiten determinar la existencia de antiderivadas elementales en funciones. Se destacaron teoremas de gran importancia, como el teorema de Laplace y los teoremas de Liouville, que son fundamentales en este contexto. Además de la presentación teórica, se analizaron ejemplos concretos de funciones elementales que no poseen antiderivadas elementales.

Fruto de la investigación, se ha creado una monografía de consulta dividida en 4 capítulos. Esta obra está dirigida a estudiantes de la carrera de Matemática en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo que deseen profundizar en el tema de integración. La monografía no solo expone los teoremas y lemas más relevantes, sino que también ofrece ejemplos de funciones elementales sin antiderivadas expresables mediante operaciones aritméticas finitas o su composición.

La presente monografía representa un aporte valioso para el aprendizaje de los estudiantes de Matemática, brindándoles una herramienta útil para comprender en profundidad el tema de la integración en términos finitos.

Bibliografía

[Chebyshev, 1899] Chebyshev (1899). *Oeuvres de PL Tchebychef*, volume 1. Commissionaires de l'Académie impériale des sciences.

[Cherry, 1985] Cherry, G. W. (1985). Integration in finite terms with special functions: the error function. *Journal of Symbolic Computation*, 1(3):283–302.

[Crespo and Hajto, 2011] Crespo, T. and Hajto, Z. (2011). *Algebraic groups and differential Galois theory*, volume 122. American Mathematical Soc.

[De Barra, 2003] De Barra, G. (2003). *Measure Theory and Integration*. Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications. Elsevier Science.

[Gallian, 2016] Gallian, J. (2016). *Contemporary Abstract Algebra*. Cengage Learning.

[George Jr et al., 1975] George Jr, A. et al. (1975). *Essentials of Padé approximants*. Elsevier.

[Hardy, 2005] Hardy, G. (2005). *The Integration of Functions of a Single Variable*. Dover phoenix editions. Dover Publications.

[Kolchin, 1973] Kolchin, E. (1973). *Differential Algebra & Algebraic Groups*. ISSN. Elsevier Science.

[Raab and Singer, 2022] Raab, C. and Singer, M. (2022). *Integration in Finite Terms: Fundamental Sources*. Texts & Monographs in Symbolic Computation. Springer International Publishing.

[Stewart, 2015] Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning.