ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

EL MODELLUS 4.0 COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN LOS ESTUDIANTES DEL III NIVEL DE MECATRÓNICA DE LA UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS ESPEL, EN EL PERÍODO MARZO – AGOSTO 2014

AUTOR: IBETH DE LOS ÁNGELES DELGADO MONTENEGRO

Proyecto de Investigación, presentado ante el Instituto de Postgrado y Educación Continua de la ESPOCH, como requisito parcial para la obtención del grado de Magíster en Matemática Básica

RIOBAMBA - ECUADOR

Diciembre - 2015

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

CERTIFICACIÓN:

EL TRIBUNAL DE TRABAJO DE TITULACIÓN CERTIFICA QUE:

El Proyecto de Investigación, titulado "El Modellus 4.0 como herramienta didáctica para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales en los estudiantes del III Nivel de Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPEL, en el período Marzo- Agosto 2014", de responsabilidad de la Sra. Ing. Ibeth de los Angeles Delgado Montenegro ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.

Tribunal:

Ing. Wilian Pilco ____________________
PRESIDENTE

Dr. Juan Vargas ____________________
DIRECTOR

Ing. Jorge Sánchez ____________________
MIEMBRO

Ing. Pablo Montalvo ____________________
MIEMBRO

DOCUMENTALISTA SISBIB ESPOCH ____________________

Riobamba, Diciembre - 2015

DERECHOS INTELECTUALES

Yo, Ibeth de los Angeles Delgado Montenegro, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en el presente Proyecto de Investigación, y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

____

0400916516

AGRADECIMIENTO

A mi padre Dios por darme la oportunidad de culminar este trabajo; por ponerme en el camino a personas maravillosas que de una u otra forma me brindaron su apoyo y su entusiasmo para seguir siempre adelante.

A mi Familia, a mis amigos por su comprensión y permanente motivación

Al tutor de esta tesis, Dr. Juan Vargas, por compartir generosamente conmigo sus valiosos conocimientos.

A los miembros del tribunal, Ing. Jorge Sánchez e Ing. Pablo Montalvo, por toda su colaboración y apoyo.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

La presente investigación buscó evaluar la implementación del Modellus 4.0 como facilitador de aprendizajes activos de ecuaciones diferenciales ordinarias, para lo cual se eligieron dos grupos de investigación con los estudiantes de dos paralelos del III Nivel de Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE extensión Latacunga - UFA ESPEL, en el período Marzo – Agosto 2014. A un paralelo se lo seleccionó como experimental y al otro de control; sobre el primero se implementó un ambiente de aprendizaje virtual aplicando el Modellus 4.0 y en el segundo la clase expositiva, no sin antes establecer cuatro semanas de clases magistrales en ambos grupos, a fin de realizar una prueba diagnóstica de maduración. La investigación mostró en el diagnóstico que la metodología expositiva por sí misma no cubre todas las necesidades del proceso de enseñanza-aprendizaje. Las medias en el diagnóstico bordearon el $\frac{6}{10}$ en ambos grupos. En la evaluación final se demostró que el grupo experimental es 1.15 veces mejor que el grupo de control, bajo criterios de estadística paramétrica. Se concluye por inferencia, que esta superioridad del grupo experimental se debe a la aplicación metodológica en el proceso enseñanza-aprendizaje. Se recomienda ampliar la propuesta a otras carreras.

PALABRAS CLAVE: <EDO [Ecuaciones Diferenciales Ordinarias]>, <UFA ESPEL [Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE extensión Latacunga]>, <MODELLUS 4.0>, <ENSEÑANZA - APRENDIZAJE>, <ESTADÍSTICA PARAMÉTRICA> <MATEMATICA BASICA>

SUMMARY

The current study sought to evaluate the implementation of the Modellus 4.0 as facilitator of active learning of ordinary differential equations (ODE$_s$), in this regard, two research groups were selected. They were comprised by students from two sections of the third level of Mechatronics at the University of the Armed Forces ESPE Extension Latacunga – UFA ESPEL, from March to August 2014. One class identified as experimental group while another one was identified as control group, in the former class; it was implemented a virtual learning environment by applying the Modellus 4.0 whereas the expository lesson was implemented in the second group, but not before planning four weeks of lectures addressed to these two groups; in order to perform a diagnostic test of maturity. The research findings showed in the diagnosis that the expository methodology does not cover all the needs of the teaching – learning by itself.

Means in the diagnosis range 6/10 in both groups. In the final assessment it was demonstrated that the experimental group is 1.15 times better than the control group under parametric statistical criteria. It is concluded by inference that this superiority of the experimental group is due to the methodological application in the teaching-learning process. It is recommended to extend the proposal to other career areas.

KEYWORDS: <ODE [Ordinary Differential Equations]> <UFA ESPE [University of the Armed Forces; ESPE-Latacunga extension]> <Modellus 4.0>, <TEACHING-LEARNING>, <PARAMETRIC STATISTICS>, <BASIC MATHEMATICS>

CAPÍTULO I

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Problema de investigación

El problema de investigación que motivó la realización de este estudio se centró en determinar la idoneidad del software gratuito de modelación física Modellus 4.0 en el proceso educativo de ecuaciones diferenciales ordinarias; esto, en estudiantes de ingeniería de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPEL durante un semestre académico.

El lenguaje matemático es abstracto, esa es la epistemología de esta ciencia; sin embargo los estudiantes sobre los cuales se investiga y se aplica las sesiones áulicas no lo son de matemática pura sino de ingeniería.

Ellos requieren una correcta transposición concreta de los contenidos de los métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias por lo cual es necesario utilizar los recursos didácticos para la comprensión adecuada de la temática descrita; es por dicho interés que se ha realizado este estudio.

La investigación es útil porque permite a los profesores de matemática de las ingenierías disponer de un estudio que les permita plantearse la posibilidad de combinar las clases expositivas con el uso de recursos didácticos amigables, gratuitos y fáciles de utilizar; a fin de que los estudiantes sean capaces de comprender los temas pre-requisitos para las asignaturas que concreten su perfil de ingeniería.

En esta tesis se describen los siguientes capítulos:

El primer capítulo se dedica al análisis de la situación problemática del entorno del objeto de estudio; se incluye además en este capítulo la formulación del problema; los diferentes objetivos y las diversas justificaciones que permitieron la realización del presente estudio enmarcado en los límites de la didáctica de las ciencias exactas a través de las TIC.

En el segundo capítulo se describe el fundamento teórico que es el soporte a la investigación; una actualizada revisión bibliográfica muestra la tendencia de los artículos científicos de los últimos años que son relacionados tanto a la aplicación del Modellus como a las propuestas de estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Las diversas fundamentaciones y la teorización de las variables completan el capítulo.

El tercer capítulo corresponde a la metodología de la investigación incluye: el diseño y tipo de estudio; el diseño utilizado es cuasi experimental; la información de la población y tamaño muestral correspondiente según el diseño. Éste capítulo describe también los diversos métodos, técnicas e instrumentos utilizados para validar la hipótesis científica.

El cuarto capítulo incluye variables del estudio; así como las diversas operacionalizaciones que permiten facilitar la comprensión de los parámetros específicos a medirse dentro del estudio, así como la metodología general de tratamiento y manipulación de cada una de las variables.

Registra los resultados de la investigación según los diversos procedimientos de la estadística paramétrica basada en la prueba Z por tratarse de un número mayor a 30 datos numéricos; se incluyen los análisis descriptivos de cada grupo; comparación de medias y prueba de hipótesis; así como las gráficas correspondientes a cada caso.

El quinto capítulo describe los pormenores que explican y dimensionan la propuesta alternativa al estudio a través de la presentación, justificación, objetivos, contenido, temas y desarrollo específico de cada una de las diversas unidades abordadas durante la investigación sobre el grupo experimental.

Al final del documento de la investigación, se presentan las conclusiones que se relacionan tanto con las hipótesis del estudio cuanto con los objetivos mismos por cuyo propósito se implementó la propuesta. Las recomendaciones pertinentes y necesarias que se basan en las conclusiones se orientan a quienes utilicen la metodología del caso abordado en esta tesis.

1.2 Problematización

Los avances científicos del siglo XX trajeron casi una tercera revolución industrial, las nuevas tecnologías son esencialmente las tecnologías intelectuales. Esta revolución, que fue acompañada por la globalización sentó las bases de la economía del conocimiento, poniendo el conocimiento en el corazón de la actividad humana, el desarrollo y el cambio social.

La información no es conocimiento, y la incipiente sociedad mundial de la información solamente cumplirá su potencial si se facilita la aparición de sociedades pluralistas y participativas de conocimiento que incluyan antes que excluyan.

¿Esto significa que el siglo XXI ve el desarrollo de las sociedades del conocimiento compartido? Como se subraya en el Informe Mundial de la UNESCO hacia las sociedades del conocimiento, no deben haber individuos excluidos en las sociedades del conocimiento, porque el conocimiento es un bien público que debe ser accesible a todos.

En la actualidad existe un claro consenso de que el desarrollo de las sociedades del conocimiento es la mejor manera de promover el desarrollo humano sostenible. Sin embargo, hay algunos obstáculos en el camino de la concreción de las sociedades del conocimiento compartido, entre ellos se tienen:

- La brecha digital, la falta de conexión significa que no hay acceso a todos los lugares del planeta, es cierto que el número de usuarios de Internet está en constante crecimiento, pero hay dos mil millones de personas que no tienen conexión a una red eléctrica y las tres cuartas partes de la población mundial tienen poco o ningún acceso a los servicios de telecomunicaciones.

- La brecha cognitiva, aún más profunda, constituye una brecha importante pues la diferencia entre la educación en las universidades de los países del Norte y el Sur genera concentración de los conocimientos, el conocimiento está ahí para ser compartido, pero una vez convertido en información, tiene un precio muy alto.

- El desarrollo de las sociedades del conocimiento compartido es hoy obstaculizado por los factores: social, nacional, urbano, familiar y cultural que incluso afectan en la profundización de las divisiones internas de muchos países.

- Finalmente otro obstáculo es la brecha económica, pues ésta influye en la inversión que hacen los gobiernos en la educación e investigación de sus respectivos países.

A nivel universitario ecuatoriano y en concreto hablando de las ciencias exactas y su proceso de aprendizaje de las matemáticas, en los estudiantes de los primeros niveles, se observa la deserción y repitencia por no alcanzar los aprendizajes mínimos; es legendario, conocido, discutido y colocado en la palestra este proceso por haberse constituido en un filtro de promoción.

En la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) que se dicta en el III nivel de la ESPEL, se estudian los diferentes métodos y técnicas de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de acuerdo al tipo y orden; se propende que los estudiantes logren desarrollar las habilidades y destrezas suficientes para la solución óptima de problemas relacionados con la fenomenología característica de la ingeniería.

La resolución de problemas y ejercicios propuestos en clase; no siempre permiten aplicar los conocimientos adquiridos por los estudiantes hasta el III nivel ni relacionar la teoría con la práctica, por ello es importante la utilización de herramientas didácticas de la matemática con una clara aplicación en el campo de la ingeniería que permitan la abstracción de los procesos mentales de los educandos.

No se ha buscado desarrollar el pensamiento abstracto en los estudiantes; sino el alcance de una visión general sobre la resolución de problemas de la ingeniería como parte del perfil de salida del futuro egresado.

1.3 Formulación del problema

¿De qué manera la utilización del Modellus 4.0 como herramienta didáctica mejora el aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de los estudiantes del III Nivel de Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPEL, en el período Marzo - Agosto 2014?

1.4 Justificación

Se justifica teóricamente la elaboración del proyecto por cuanto existe la teoría que sirve de fundamento al estudio, esto es: la didáctica de los recursos para mejorar el aprendizaje de las matemáticas; por otro lado la base teórica referente a las ecuaciones diferenciales ha existido por alrededor de 400 años. Dichas exigencias en el campo del método científico se cumplen sin problema.

La justificación metodológica del proyecto se circunscribe en el ámbito del diseño cuasi experimental el cual se aplica mandatoriamente en los estudios orientados a la interpretación de conductas de aprendizaje en los estudiantes sobre quienes se aplican diversos parámetros didácticos para facilitar la abstracción de saberes.

Los beneficiarios del estudio son los estudiantes del III Nivel de Ingeniería Mecatrónica de la ESPEL así como toda la comunidad educativa y la misma universidad, la cual alcanzará la formación básica de los futuros ingenieros mediante procesos integrales relacionados con las ciencias exactas.

La investigación se justifica por cuanto tanto el Plan Nacional del Buen Vivir como la Ley Orgánica de Educación Superior propenden a la pertinencia en los ámbitos: académico, vinculación e investigación para el desarrollo del país; que es lo que busca la implementación de este estudio.

La investigación es original pues no existen otras en la ESPEL sobre estudiantes de Mecatrónica a través del análisis de la pertinencia del programa Modellus el cual es gratuito; fácil de usar, amigable; con lenguaje de alto nivel; adaptable; de fácil programación y con poco peso; todo lo anterior, aplicado al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se justifica la pertinencia del estudio por los temas que involucra la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que se extienden a temáticas básicas como: Crecimiento poblacional, Enfriamiento – Calentamiento de un cuerpo, Movimiento uniforme variado, Sistema mecánico masa – resorte, Circuitos eléctricos, Movimiento parabólico con y sin fuerza de fricción presentada por el aire, entre otros.

Es importante la investigación pues importante es también la temática que aborda y esto es: ecuaciones diferenciales ordinarias; mismas que un ingeniero debe dominar su análisis pues de allí se derivan aplicaciones y modelos articulados a la carrera de Mecatrónica donde se reducen procesos mediante generalizaciones matemáticas.

La investigación es viable y factible pues no contrae gastos ingentes que imposibiliten su implementación; no existen trabas por parte de las autoridades ni de la ESPOCH, generatriz del programa de maestría; ni de la ESPEL la cual se beneficia del presente proyecto; los estudiantes por otro lado han dado su beneplácito a la propuesta de aplicación de nuevas actividades didácticas que mejoren su aprendizaje.

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 *Objetivo general*

Implementar el programa Modellus 4.0 como una herramienta didáctica para mejorar el aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en los estudiantes del III Nivel de Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPEL, en el período Marzo - Agosto 2014.

1.5.2 *Objetivos específicos*

- Realizar un diagnóstico sobre la abstracción conceptual y operacional de la temática vinculada a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

- Determinar dos grupos de estudio para definir la idoneidad de la metodología propuesta.

- Elaborar un cuaderno guía basado en el Modellus 4.0 para la pragmatización de contenidos de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

- Incentivar el aprendizaje activo de ecuaciones diferencialesordinarias en el grupo experimental.

1.6 Hipótesis

El uso del programa Modellus 4.0 como herramienta didáctica mejora el aprendizaje de ecuaciones diferenciales de los estudiantes del III Nivel de Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPEL, en el período Marzo- Agosto 2014.

CAPÍTULO II

2 MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1 Revisión de la literatura

Teodoro, V. (2002, págs. 75-76) publica una investigación sobre el aprendizaje de la matemática en la interfaz de usuarios de computadoras a través de Modellus para lo cual parte de algunas particularidades del aprendizaje como las siguientes:

- el aprendizaje es un proceso activo de creación de significado de las representaciones.

- el aprendizaje tiene lugar en una comunidad de práctica donde los estudiantes aprenden tanto del propio esfuerzo como de la orientación externa.

- el aprendizaje es un proceso de familiarizar conceptos con enlaces y conceptos con representaciones.

- la manipulación directa mediante modellus permite a los estudiantes explorar objetos concretos-abstractos como los de la física y puede ser utilizado por los estudiantes con un mínimo conocimiento informático.

Como resultado de su investigación, Teodoro, V. (2002, pág. 76) demostró que las computadoras son una herramienta importante en la investigación y el desarrollo en casi todos los ámbitos científicos y campos tecnológicos; sin embargo esto todavía no se ha convertido en realidad para el aprendizaje en muchas escuelas y centros de estudios de pregrado.

En esta tesis se propone un marco para el diseño de planes de estudio donde las computadoras, y modelos de computadora en particular, son una herramienta importante para el aprendizaje. Este marco está basado en la investigación en la ciencia y la matemática y en la interfaz de usuario computadora.

Una investigación sobre las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (Dullius, M. M., Veit, E. A., &Araujo, I. S, 2013, págs. 1-18) se basó en la revisión de literatura, entrevista a profesores experimentados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, seguimiento a una clase de estudiantes que asistían a la disciplina de las ecuaciones diferenciales.

Los resultados muestran la importancia que tiene el hecho de que los profesores cambien sus métodos de enseñanza, teniendo en cuenta la posibilidad de hacer uso de los avances tecnológicos.

Algunas actividades basadas en la la metodología de la enseñanza a través de la resolución de problemas han sido diseñadas para mejorar el avance del aprendizaje del estudiante (Rossi, M. I., & Allevato, N., 2012, págs. 7-8).

Una de esas actividades tuvo como objetivo llevar a los estudiantes a través de los problemas, a construir su propio conocimiento, y a hacer una asociación entre profesor y alumno en la construcción colaborativa del pensamiento matemático.

La metodología de investigación de Rossi, M. I., & Allevato, N, (2012, págs. 7-8) incluyó procedimientos cualitativos y metodológicos donde se aplicaron la investigación participativa, la observación participante y el análisis documental.

El problema representado fue elegido con el fin de cubrir la necesidad de buscar nuevas formas de enseñanza del cálculo para responder a las preguntas de cómo tener una mejor visión y comprensión de los conceptos y mejorar el aprendizaje.

2.2 Fundamentación científica

2.2.1 *Fundamentación epistemológica*

El trabajo de Moreira (2012, págs. 61-62) y su propuesta sobre el uso de medios que estimulen la creatividad de los estudiantes a través de recursos didácticos a lo cual se suma la teoría del aprendizaje por descubrimiento de Zapata-Ros (2014, págs. 20-21) son la base para la aplicación del Modellus en el ámbito epistemológico; el aprendizaje matemático se produce a través de la experiencia y el involucramiento de los sentidos en el estudiante.

2.2.2 *Fundamentación Psicopedagógica*

El fundamento psicológico de este estudio es la importancia de diferenciar las estrategias y los recursos aplicados a los estudiantes según su estadío psicológico; así por ejemplo no es lo mismo establecer un proceso enseñanza-aprendizaje en niños (pedagogía) que en adultos (andragogía); en éste último se requieren orientaciones específicas antes que la búsqueda de un protagonismo expositivo (Piaget, 1991, págs. 82-83).

El Modellus 4.0 es ideal en este sentido, sobre todo en la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.2.3 *Fundamentación Legal*

El desarrollo de competencias básicas a través del uso de herramientas que permitan contribuir con el perfil de salida del ingeniero es uno de los propósitos de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPEL y se halla inserto en su Modelo Educativo en su capítulo 6 (ESPE, 2015); que constituye el fundamento legal de la investigación.

2.3 Fundamentación Teórica

2.3.1 *El aprendizaje Activo*

El aprendizaje activo reconoce que las personas aprenden mejor de la experiencia. El concepto de aprendizaje activo no es nuevo. En 1915, John Dewey reconoció la importancia del aprendizaje experiencial en el aula.

El Maestro y el libro ya no son los únicos instructores; las manos, los ojos, los oídos, de hecho todo el cuerpo se convierten en fuentes de información, mientras que el maestro y los libros de texto se convierten, respectivamente, en el motor de arranque y evaluador. Ningún libro o mapa se puede considerar un sustituto de la experiencia personal; no pueden tomar el lugar del viaje real (Dewey, 1995, pág. 220).

El énfasis de Dewey en la experiencia de los estudiantes se hizo eco en el pensamiento crítico moderno acerca de la educación universitaria. (Chickering, A.,& Gamson, Z., 1987, págs. 3-7) en "Siete Principios de Buena Práctica en la Educación" insisten en que la investigación muestra que los estudiantes aprenden a través de recursos didácticos.

El aprendizaje no es un deporte para espectadores; los estudiantes no aprenden mucho por sentarse en las clases para escuchar a los profesores, memorizar tareas pre-envasadas, y arrojar respuestas.

Los estudiantes tienen que hablar de lo que están aprendiendo, escribir sobre ello, relacionarlo con experiencias pasadas y aplicarlo a su vida cotidiana.

Las prácticas de enseñanza congruente con un enfoque metacognitivo del aprendizaje incluyen el sentido de decisiones, la autoevaluación y la reflexión sobre lo que funciona y lo que necesita mejorar. Se ha demostrado que estas prácticas pueden aumentar el grado en que los estudiantes transfieren su aprendizaje.

El aprendizaje activo reconoce el beneficio de la traducción de las prácticas metacognitivas en el tiempo. La premisa detrás del aprendizaje activo es que la memoria y la comprensión de las personas aumentan de forma exponencial con una mayor participación (DUQ, 2014).

Escritos que describen los esfuerzos para aumentar la participación de los estudiantes revelan que el aprendizaje activo se presenta en múltiples formas con distintos nombres. Sin embargo, el principio de la participación de los estudiantes con retroalimentación continúa constante.

En el enfoque tradicional de la educación superior, la carga de la comunicación material del curso reside principalmente en el instructor. En la instrucción centrada en el estudiante parte de esta carga se desplaza a ellos mismos.

Este es un enfoque amplio que incluye técnicas tales como sustituir las experiencias de aprendizaje activo en las clases expositivas; es determinante la asignación de problemas de tipo abierto que requieren un pensamiento crítico o creativo que no se pueden solucionar siguiendo ejemplos de texto (Chickering, A.,& Gamson, Z., 1987, págs. 3-7).

Una característica esencial de cualquier programa de desarrollo de habilidades es la práctica y la retroalimentación.

A la mayoría de los estudiantes nunca se les ha enseñado a resolver problemas de tipo abierto o pensar de manera crítica o formular problemas, por lo que la primera vez que se asigna un ejercicio de este tipo probablemente lo harán mal.

Solamente después de recoger sus productos y proporcionar comentarios constructivos después de varios trabajos similares y sesiones de retroalimentación, los estudiantes comienzan a dar el tipo de resultados que el maestro está buscando.

Entonces también se produce la retroalimentación mutua significativa en el grupo. Este enfoque sirve a un doble propósito: los estudiantes adquieren más habilidad, confianza y ganas de aprender; y, se involucran directamente.

Eric Mazur (2015, pág. 42) profesor de física en Harvard describe su técnica de aprendizaje activo como pruebas concepto; y ha desarrollado pruebas tipo concepto para ayudar al aprendizaje del estudiante en las clases magistrales.

Las pruebas tipo concepto son preguntas de opción múltiple que se intercalan a través de la conferencia para determinar en los estudiantes la comprensión de los conceptos y crear oportunidades para la instrucción. Mazur sigue la siguiente secuencia:

1. Conferencia de segmentos cortos centrándose en el concepto clave
2. Prueba de conceptos: preguntas planteadas a los estudiantes
3. Los estudiantes tienen un minuto para registrar sus respuestas (a través de las manos levantadas, sistema de respuesta personal o escrita)
4. Se les pide a 4 estudiantes convencer a sus compañeros de su respuesta
5. Los estudiantes registran una respuesta revisada después de la conversación entre pares (a través de las manos levantadas, sistema de respuesta personal o escritura)
6. Breve explicación de la respuesta correcta por el instructor.

Mazur (2015, pág. 43) utiliza la prueba de concepto como una manera informal de evaluar la comprensión del estudiante.

Si el rendimiento de los estudiantes en las pruebas concepto es satisfactoria, la conferencia puede pasar al siguiente tema. Si no, el profesor debe reducir la velocidad y repetir la conferencia en más detalle sobre el mismo tema, y volver a evaluar a los estudiantes con otro test concepto sobre el tema.

Esto evita un abismo de desarrollo entre las expectativas del profesor y la comprensión de los estudiantes.

2.3.1.1 La evaluación del aprendizaje activo

(Duffy,T. M.,& Jonassen, D. H., 2009, pág. 41) definen dos maneras en las que el aprendizaje constructivista se puede evaluar. Ellos sugieren que un método sería evaluar cómo los estudiantes son capaces de funcionar dentro de un dominio de contenido, y si podrían utilizar las herramientas y entendimientos del dominio para resolver problemas dentro de ese dominio.

Si los estudiantes están involucrados en una tarea auténtica, entonces la evaluación consistirá en saber si el estudiante ha completado con éxito su tarea.

El segundo método sugerido consiste en determinar si los estudiantes reflexionan sobre los procesos mediante los cuales llegan a sus conclusiones y documentar este proceso.

El proceso de adquisición del conocimiento debe ser evaluado de manera específica, no como cualquier producto o comportamiento observable (Wang y Fischer, 2012, pág. 33).

Según Jonassen (2009, pág. 41), evaluar cómo los alumnos van sobre la construcción de su conocimiento es más importante que el producto resultante, lo que sugiere que los procedimientos de evaluación deben convertirse en una parte del proceso de instrucción.

La meta de evaluación gratuita podría ser una parte importante de la evaluación constructivista, ya que permitiría al evaluador ser imparcial por los objetivos de la instrucción.

La evaluación de lo constructivo en el proceso de aprendizaje se puede mejorar mediante la adición de múltiples evaluadores que tienen una gama de conocimientos en el área en estudio y que representan múltiples perspectivas. Esto permite al profesor desempeñar un papel de facilitación de entrenamiento, mientras que las fuentes externas serían responsables de la sumativa de decisiones.

2.3.2 *Los recursos Didácticos Interactivos*

Los primeros esfuerzos para integrar las TIC en el proceso educativo tuvieron como resultado el desarrollo de un número de materiales didácticos con diferentes grados de valor y desarrollo de los costos de instrucción. Generalmente, el valor y el costo de la elaboración de materiales didácticos son directamente proporcionales (Padrón, 2014).

El valor y el desarrollo de materiales de aprendizaje han evolucionado en los últimos años apoyados por la tecnología. Un ejemplo simple de material didáctico es el entorno virtual de un curso; cuyo valor de instrucción es bajo, ya que los maestros usan la página web como un simple y unidireccional mecanismo de comunicación para que los alumnos tengan información sobre el curso.

El costo de desarrollo de un entorno virtual del curso ha disminuido gracias a la gran disponibilidad de herramientas hipermedia y creación web.

Sin embargo, cuando se construye un sitio web para materiales didácticos se incrementa el costo de desarrollo porque es necesario recopilar, componer y mantener el conceptual apropiado y las relaciones de navegación entre los elementos contenidos en el entorno virtual.

El valor de instrucción también se incrementa con respecto a un laboratorio virtual simple porque los alumnos cuentan con recursos relacionados que les ayuden a mejorar sus asociaciones mentales que utilizan para almacenar y recuperar información entre los nuevos conceptos que se aprenden y los conocimientos que ya tienen.

2.3.2.1 El Modellus como recurso didáctico

Se ha elegido el programa Modellus como facilitador didáctico del proceso enseñanza-aprendizaje por las siguientes razones:

- Software gratuito
- Liviano
- No requiere información específica para su instalación.
- Lenguaje de alto nivel
- Entorno virtual agradable y amigable
- No requiere conocimiento de programación
- Flexible

Como se aprecia en el listado el Modellus 4.0 es un software adecuado para su uso en el desarrollo de las clases de Ecuaciones Diferenciales; en especial para concretar el objetivo primero de la didáctica como constituye la traducción del lenguaje abstracto en concreto.

2.3.3 Categoría Variable Dependiente

2.3.3.1 Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales son aquellas que contienen las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Según el tipo

Ecuaciones diferenciales ordinarias: Son aquellas que contienen derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente (**EDO**)

$$\frac{dy}{dx} = x + 3; \quad \begin{array}{l} \mathbf{y} \text{ "variable dependiente" o Función incógnita } \mathrm{y} = \mathrm{f}(x) \\ \mathbf{x} \text{ "variable independiente "} \end{array}$$

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales: Son aquellas que contienen una o más derivadas respecto a dos o más variables independientes (**EDP**)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right\} \quad \begin{array}{l} \mathbf{u} \text{ "variable dependiente" o Función incógnita } \mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \mathbf{v} \text{ "variable dependiente" o Función incógnita } \mathbf{v} = \mathbf{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \mathbf{x}; \mathbf{y} \text{ "variables independientes "} \end{array}$$

Según el orden

El orden de una ecuación diferencial ordinaria está dado por la más alta derivada. Una EDO de orden **"n"** se representa como:

$$F\left(x, y\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \dots \dots \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Se puede expresar también como:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Y en la **forma normal**, se despeja la más alta derivada y se expresa como:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

Por ejemplo:

$x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0$ ó $y' = \frac{-y}{x^2}$ EDO; 1^{er} orden

Según la linealidad

Se puede decir que una EDO es lineal si cumple con las siguientes condiciones:

- $a_n(x)$ es función solo de "x"
- Todas las derivadas están elevadas a la primera potencia

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \dots, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad y$$

- f(x) es función sólo de "x"

Según el grado

El grado de una ecuación diferencial está dado por el exponente de su mayor derivada.
Por ejemplo:

Determinar el tipo, el orden, el grado y la linealidad de las siguientes ecuaciones:

$$x\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{d_y}{dx}\right)^4 = tan(x); \ EDO, 2^{do}\ orden, grado\ 3, no\ lineal$$

$$y\frac{dx}{dy} + xy = 9{:}\ EDO\ 1^{er}\ orden, grado\ 1, es\ lineal, la\ función\ incógnita\ es\ "x"$$

Solución de una ecuación diferencial

Se dice que una función **f** definida en un intervalo **I;** que es continua y posee **“n”** derivadas continuas en ese intervalo **I;** y que, al ser sustituida en la una ecuación diferencial de orden **“n-1”** genera una identidad**;** **es solución** de la ecuación diferencial en **ese mismo intervalo I** .

Es decir si cumple la siguiente condición:

$$F\left(x, f, f', f'', f''' \dots \dots \dots f^{(n)}\right) = 0; \ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$$

Por tanto al intervalo I se le conoce como intervalo de solución o dominio de la solución entre otros nombres, mismo que puede ser abierto, cerrado o semi abierto.

Comprobación de una solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria Solución de una EDO.

Se dice que una función "f" definida en un intervalo I es solución de un ecuación diferencial en ese intervalo I si satisface la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\int dy = \int f(x)dx$$

$y = F(x) + C$ *Solución general de la EDO*

En la mayoría de problemas que incluye ecuaciones diferenciales se trata de obtener soluciones particulares, luego de la solución general de la ecuación diferencial mediante ciertas restricciones llamadas condiciones iníciales.

Ejemplos:

- **Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son las funciones dadas, demostrar que son soluciones de la ecuación diferencial planteada como y''- y=0.**

a- $\mathbf{y_1 = e^x}$

$$y_1' = e^x\ ;\ \ y_1'' = e^x \quad \rightarrow \quad y'' - y = 0 \rightarrow\ e^x - e^x = 0$$

$$\therefore y_1 = e^x; \textit{es solución}$$

b- $\mathbf{y_2 = \cosh(\boldsymbol{x})}$

$$y_2' = \operatorname{senh}(x)\ ;\ \ y_2'' = \cosh(x) \quad \rightarrow \quad y'' - y = 0 \rightarrow\ \cosh(x) - \cosh(x) = 0$$

$$\therefore y_2 = \cosh(x); \textit{es solución}$$

Orígenes de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Se puede clasificar el origen de las ecuaciones diferenciales en dos grupos el primero cuando se originan como modelos matemáticos de fenómenos físicos, de procesos biológicos, económicos, químicos, eléctricos, mecánicos, etc. Y el segundo cuando se obtienen ecuaciones diferenciales a partir de familias de curvas geométricas conocidas.

Familia de curvas solución de una Edo

Una ecuación diferencial tiene ***generalmente un número infinito de soluciones***. Así, al resolver una ecuación diferencial de primer orden de la forma **F(x,y,y')=0** se obtiene una familia “uniparamétrica” de curvas de la forma **g(x, y, C) =0** donde la constante **C** es arbitraria.

De forma similar si se resuelve una ecuación diferencial de segundo orden de la forma **F(x,y,y’,y’’) = 0** se obtiene una familia “biparamétrica” de curvas de la forma **g(x,C_1, C_2) = 0** donde las constantes **C_1** **y** **C_2** son arbitrarias.

Por tanto al resolver una ecuación diferencial de orden **“n”** de la forma $\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', y''' \dots\dots y^{(n)}\right) = 0}$ se espera obtener una familia **“n”** paramétrica de soluciones de la forma $\boldsymbol{g(x, y, C_1, C_2, C_3 \dots\dots C_n) = 0.}$

- **Representar la familia de las curvas solución de la ecuación diferencial.**

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dy}{y^{1/2}} = \int xdx \quad \rightarrow \int \frac{dy}{y^{1/2}} = \frac{x^2}{2} + c \quad \rightarrow 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c \ \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y = \left(\frac{x^2}{4} + K\right)^2 \quad solución\ general}$$

$$cuando\ \ k = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$Si\ K = 0 \quad y = \frac{x^4}{16}\ ; \quad Si\ K = 1 \quad y = \left(\frac{x^2}{4} + 1\right)^2; \quad Si\ K = 2 \quad y = \left(\frac{x^2}{4} + 2\right)^2$$

$$Si\ K = -1 \quad y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2; \quad Si\ K = -2 \quad y = \left(\frac{x^2}{4} - 2\right)^2$$

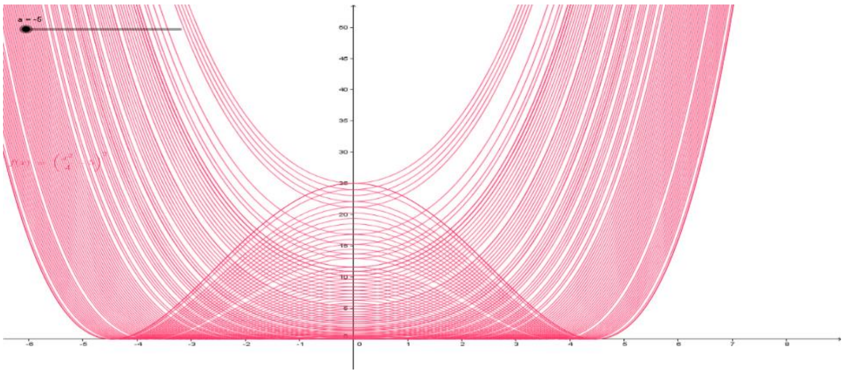


Figura 1-2. Gráfico de las curvas solución de la edo
Realizado por Ibeth, Delgado M**. 2014**

Dando valores a la constante K, cualquiera que sean éstos, nunca se va a obtener la solución trivial es decir y=0, que en este caso si es solución de la edo. **Por tanto y=0 es una solución singular de la edo.**

Problema de valor inicial

Generalmente cuando se resuelve una EDO es muy útil obtener la solución específica para una cierta condición del problema ya definida. Esta condición se le llama resolver el problema de valor inicial.

El problema de valor inicial consiste en resolver una ecuación diferencial ordinaria de orden **"n"** de la forma $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots., y^{(n-1)})$, sujeta a las condiciones:

$y(x_0) = y_0;$

$y'(x_0) = y'_0;$

$y''(x_0) = y''_0;$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$y^{(n-1)}(x_0) = {y^{(n-1)}}_0$

Donde: y_0; y'_0; …. $y^{(n-1)}{}_0$ son los valores de **"y"** y de sus **"n-1" derivadas** en un solo punto, estos valores son constantes dados en forma arbitraria y se les llama condiciones iniciales.

De donde **"una"** solución particular es $\boldsymbol{x(t) = -2\cos(4t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4t)}$

Notar que se utiliza la palabra **"una" y no "la"** solución particular; pues existen algunos casos en los que existen algunas soluciones para un PVI.

Campos direccionales

La ecuación $\mathbf{y = C}$ representa una familia de líneas horizontales, cualquier miembro de la familia $\mathbf{f(x\,,y) = C}$ se llama isóclina, representa una curva a lo largo de la cual la inclinación de las tangentes es igual.

Cuando se hace variar el parámetro C, se obtiene un conjunto de isóclinas en las que los segmentos lineales se construyen adecuadamente. La totalidad de esos segmentos lineales se llama: campo de direcciones, campo direccional, campo de pendientes o campo de elementos lineales de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

En las figuras, el campo de direcciones representa las "líneas de flujo" de la familia de curvas de solución de la ecuación diferencial $y' = y$. Si se desea una solución que pase por el punto $(0,1)$, ese debe formar una curva, que pase este punto de modo que atraviese las isóclinas con las inclinaciones adecuadas.

Ejemplos:

➢ $\frac{dy}{dx} = y$

$m\ pendiente\ de\ la\ recta\ tangente\ a\ la\ curva$

$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \ldots \ldots$

$m = y = 1; \quad m = y = -1; \quad m = y = 2; \quad m = y = -2$

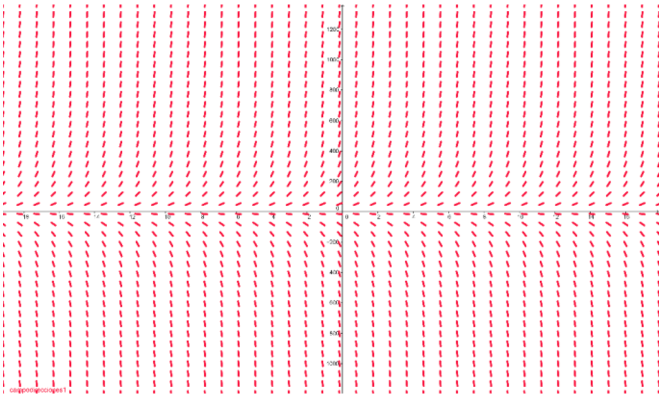


Figura 2-2. Gráfico del campo de direcciones de la edo
Realizado por Ibeth, Delgado M**. 2014**

Métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Integración Directa

Si la ecuación diferencial es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Se la puede resolver integrando directamente el diferencial ***dy*** del un lado de la ecuación con respecto a **"y";** y, la función ***f(x)*** con respecto a "*dx*".

$$\int dy = \int f(x)dx + C$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

➢ $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = x}$

$\int dy = \int x dx$

$y = \frac{x2}{2} + C$

Variables separables

Si la ecuación diferencial tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

se puede escribir como:

$$\boldsymbol{M(x)dx + N(y)dy = C}$$

Donde:

$\boldsymbol{M(x)}$=función solo de “x”; y $\boldsymbol{N(y)}$ = función solo de “y”

$$\boldsymbol{\int M(x)dx + \int N(y)dy = C}$$

➢ **Resolver la siguiente ecuación sujeta a y(π/4)=π/3**

$$\boldsymbol{tan(x) \,.\, sen^2(y)\, dx + cos^2(x) cot(y) dy = 0}$$

$$\frac{tan(x)}{cos^2(x)} dx + \frac{cot(y)}{sen^2(y)} dy = 0$$

$$\int \frac{tan(x)}{cos^2(x)}dx + \int \frac{cot(y)}{sen^2(y)}dy = C$$

$$\int \tan(x)sec^2(x)\,dx + \int \cot(y)\,csc^2(y)dy = C$$

$$\int udu + \int -\mathrm{wdw} = C \rightarrow \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = C$$

$$\boxed{\frac{tan^2(x)}{2} - \frac{cot^2(y)}{2} = C} \rightarrow Solución\ general$$

$$\frac{tan^2(\pi/4)}{2} - \frac{cot^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = C \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{-3}{2} = C \rightarrow C = 1$$

$$\boxed{tan^2(x) - cot^2(y) = 2} \rightarrow Solución\ particular$$

Reducibles a variables separables

Si la ecuación diferencial tiene la forma:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)}$$

Se puede resolver haciendo la sustitución

$$u = ax + by + c$$

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right)$$

Se reemplaza en la EDO original y se obtiene una EDO en (u,x) a variable separable.

- Resolver

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2}$$

$$u = x + y + 1; \rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \rightarrow \frac{du}{dx} - 1 = (u)^2$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1 \rightarrow \int \frac{du}{u^2 + x} = \int dx + C \rightarrow arc\ tan(u) = x + C$$

$$arc\ tan\ (x + y + 1) = x + C \ \rightarrow \quad y = \ tan\ (x + C)\ - 1 - x$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Funciones homogéneas:

Una función $\boldsymbol{f}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ se dice homogénea de grado **"n"** si cumple la condición.

$$\boldsymbol{f(tx, ty) = t^n f(x, y)}$$

- **Determinar si es homogénea**

$$\boldsymbol{f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{\frac{2x}{y}} + 4xy}$$

$$f(xy.yt) = (x^2t^2 + y^2t^2)\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2xt}}{yt}} + 4xtyt \rightarrow f(xy.yt) = t^2(x^2 + y^2)\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2x}}{y}} + t^2(4xy)$$

$$\rightarrow f(xy.yt) = t^2\left[(x^2 + y^2)\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2x}}{y}} + 4xy\right] \rightarrow f(xy.yt) = t^2[f(x, y)]$$

Es función homogénea de grado 2

La ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se dice que es homogénea si cumple con que M y N sean honogéneas, es decir:

$$\boldsymbol{M(xt,yt) = t^n N(x,y)}$$

$$\boldsymbol{N(xt,yt) = t^n M(x,y)}$$

Esta ecuación se puede resolver por variable separable utilizando cualquiera de las sustituciones siguientes:

$\boldsymbol{y = ux}$ cuando la estructura de $N = (x,y)$ es más sencilla que $M = (x,y)$

$\boldsymbol{x = vy}$ cuando la estructura de $M = (x,y)$ es más sencilla que $N = (x,y)$

$$dy = u\,dx + x\,du; \qquad dx = v\,dy + y\,dv$$

- **Resolver la siguiente ecuación diferencial**

$$\overbrace{\boldsymbol{(x-y)}}^{\boldsymbol{M(x,y)}}\boldsymbol{dx} + \overbrace{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{N(x,y)}}\ \boldsymbol{dy = 0} \qquad \boldsymbol{homog\acute{e}na\ de\ primer\ grado}$$

$$y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu; \ \ (x-ux)dx + x(udx + xdu) = 0$$

$$(1-u)dx + u\,dx + x\,du = 0; \quad dx - u\,dx + udx + x\,du = 0$$

$$dx\ + xdu = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int du = 0 + C\,; \ \ Inx + u = C; \quad In\,x + \frac{y}{x} = C$$

Ecuaciones diferenciales exactas

Sea una función que definida como: $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dy$$

A la función $\mathrm{M}(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se la llama exacta si existe una función f(x,y), $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que la diferencial de f(x,y) es:

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Donde:

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\ ; \qquad y \qquad N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Se dice que la ecuación diferencial es exacta si cumple la condición necesaria para que sea exacta la cual es:

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; Condición de los campos vectoriales conservativos

- **Verificar si la ecuación diferencial es exacta**

$$\underbrace{\boldsymbol{2xy}}_{M(x,y)}\ \boldsymbol{dx} \quad + \quad \underbrace{\boldsymbol{(x^2-1)}}_{N(x,y)}\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \qquad 2x = 2x \qquad \therefore\ es\ exacta$$

- **Resolver la siguiente ecuación diferencial**

$$\underbrace{\boldsymbol{(2xy - tgy)}}_{M(x,y)}\boldsymbol{dx} + \underbrace{\boldsymbol{(x^2 - x\,sec^2\,y)}}_{N(x,y)}\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x - sec^2 y;\ \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x - sec^2 y \qquad \therefore\ es\ exacta$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \to \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx = \int M(x,y)\, dx \to$$

$$f(x,y) = \int (2xy - tany)dx \rightarrow f(x,y) = x^2y - xtan(y) + C_1(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - xsec^2(y) + C_1'(y);$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - x\ sec^2\ y$$

$$x^2 - x\ sec^2(y) + C_1'(y) = x^2 - xsec^2(y)$$

$$C_1'(y) = \int 0\ dy;\ C_1'(y) = C;\ \ f(x,y) = x^2y - xtg(y) + C$$

$$\boxed{x^2y - xtg(y) = 0}$$

Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas

Si la ecuación diferencial no es exacta se puede reducir a exacta encontrando la función $u(x,y)$

$\boldsymbol{u(x,y)}M(x,y)dx + \boldsymbol{u(x,y)}\ N(x,y)dy = 0 \qquad sea\ exacta$

CASO 1. Si $u(x,y)$ es función solo "x"

$$\underbrace{\boldsymbol{u(x,y)}M(x,y)}_{\boldsymbol{M'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}dx + \underbrace{\boldsymbol{u(x,y)}\ N(x,y)}_{\boldsymbol{N'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}dy = 0$$

$$\frac{\partial M'(x,y)}{\partial y} = \boldsymbol{u(x,y)}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M'(x,y)}{\partial y} = \boldsymbol{u(x,y)}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\ \ porque\ u\ es\ función\ sólo\ de\ "x"$$

$$\frac{\partial N'^{(x,y)}}{\partial x} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

Para que sea exacta:

$$\frac{\partial M'(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N'(x,y)}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x};$$

$$\frac{\mathbf{1}}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial u(x,y)}{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dx = \int \frac{\partial u(x,y)}{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$$

$$\ln\big(u(x,y)\big) = \int \frac{\mathbf{1}}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dx \rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y) = e^{\int f(x)dx}}$$

$$f(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

CASO 2. Si $u(x,y)$ es función de "y"

$$\boxed{u(x,y) = e^{\int g(y)dy}}$$

$$g(y) = -\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

CASO 3. Si $u(x,y) = f(x)\,g(y)$ donde $f(x)\;y\;g(y)$ se encuentran por inspección.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = u(x,y)\frac{f'(x)}{f(x)} - M(x,y)\frac{g'(y)}{g(y)}$$

CASO 4. Si $u(x,y) = x^m y^n$ donde m y n se determinan a partir de la condiciòn suficiente y necesaria de las ecuaciones diferenciales exactas.

- **Resolver la siguiente ecuación diferencial**

$$(\boldsymbol{y^3x+1})\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{x^2y^2dy} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2x - 2xy^2 = \; y^2x \;\; dividir\;para\;N(x,y)$$

$=> 1º\;CASO$

$$f(x) = \frac{1}{\boldsymbol{x^2y^2}}y^2x = \frac{1}{x} \rightarrow u(x,y) = e^{\int\frac{1}{x}dx} \rightarrow u(x,y) = e^{\,Inx} \;\rightarrow u(x,y) = x$$

Combinaciones integrables

- **Resolver la siguiente ecuación diferencial**

$$\frac{\boldsymbol{dr}}{\boldsymbol{d\theta}} = -\frac{\boldsymbol{rsec\theta}(\boldsymbol{sec\theta}+\boldsymbol{r^2}(\boldsymbol{tg\theta}))}{\boldsymbol{r^2sec}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{tg}\;(\boldsymbol{\theta})}$$

$$(r^2sec(\theta) - tg\;(\theta))dr(rsec^2\theta + r^3sec(\theta)tg(\theta)d\theta \;\div r^2$$

$$\left(sec\theta - \frac{tg(\theta)}{r^2}\right)dr + \frac{sec^2\theta}{r} + rsec(\theta)d\theta = 0$$

$$\left(sec\theta dr + rsec\theta tg\theta d\theta\right) + (\frac{sec\theta}{r}\ d\theta - \frac{tg\theta}{r^2}dr\Big) = 0$$

$$d(rsec\theta) + d\left(\frac{tg\theta}{r}\right) = 0$$

$$sec\theta dr + r\ sec\theta\ tg\theta\ d\theta + \left(\frac{sec^2}{r}d\theta - \frac{tg\theta}{r^2}\right)dr = 0$$

$$\int d(rsec\theta) + \int d\left(\frac{tg\theta}{r}\right) = 0$$

$$rsec\theta + \frac{tg\ \theta}{r} = C$$

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma.

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = f(x);\ \frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{f(x)}{a_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad \boldsymbol{EDOL\ \ 1^{\text{o}}\ orden}$$

Factor integrable por reducible a exacta primer caso

$$F.I \qquad e^{\int P(x)xd}$$

$$e^{\int P(x)xd}\ \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)xd}\ P(x)y = e^{\int P(x)xd}\ Q(x)$$

$d\left(e^{\int P(x)xd} y\right) = e^{\int P(x)xd}\, Q(x);$ $\boxed{y = e^{-\int P(x)xd}\left\{\int e^{\int P(x)xd} Q(x)dx + C\right\}}$

- **Resolver la siguiente ecuación diferencial**

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} - e^{x} y = \frac{1}{x^{2}} sen\left(\frac{1}{x}\right) - e^{x} cos\left(\frac{1}{x}\right)} \rightarrow$$

$$P(x) = -e^{x} \; ; \; Q(x) = \frac{1}{x^{2}} sen\left(\frac{1}{x}\right) - e^{x} cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left\{\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C\right\}$$

$$y = e^{e^{x}}\left\{\left(e^{-e^{x}} cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + C\right\}; \quad \boxed{\left(cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + e^{e^{x}} C = y}$$

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primero y Segundo Orden

Entre las aplicaciones sencillas de las EDO se tienen los siguientes procesos que pueden ser resueltos por el método de variables separables.

$$\frac{dA}{dt} = kA \begin{cases} Crecimiento\ Poblacional \\ Determinación\ de\ la\ edad\ de\ fósiles \\ Desintegración\ radiactiva \\ Eliminación\ de\ medicamentos \\ Ley\ de\ Newton\ Enfriamiento - Calentamiento \\ Interés\ compuesto \\ Vaciado\ de\ tanques, etc \end{cases}$$

$$\frac{dA}{dt} - P(t)A(t) = Q(t) \begin{cases} Circuitos\ eléctricos \\ Mezclas \\ Oferta\ y\ demanda, etc \end{cases}$$

Las EDO se aplican en la geometría para encontrar las trayectorias ortogonales e isogonales a una familia de curvas dada; la ecuación diferencial puede ser resuelta por cualquiera de los métodos revisados anteriormente.

Curvas ortogonales.- Dos curvas $C_1 \ \ y \ \ C_2$ son ortogonales si sus tangentes son perpendiculares en un punto de intersección, es decir cumplen con la condición de:

$$m_{1*}m_2 = -1$$

Donde:

m_1 es la pendiente de la recta tangente a la curva C_1
m_2 es la pendiente de la recta tangente a la curva C_2

Familia de curvas ortogonales

Cuando toda las curvas de una familia de curvas ***g(x, y, C) = 0*** cortan ortogonalmente a otra familia de curvas ***h(x, y, C) = 0*** se dice que son cada una trayectoria ortogonal de la otra.

Para encontrar las trayectorias ortogonales de una familia de ***curvas dada en coordenadas rectangulares*** se resumen los siguientes pasos:

- Se halla la ecuación diferencial de la familia de curvas dada.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

- Se resuelve la ecuación diferencial de la familia ortogonal como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}$$

- Se resuelve la ecuación del diferencial del paso 2

➢ **Encontrar la familia de curvas ortogonales de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dadas.**

$$y = cx^2; familia\ de\ parábolas$$

$$C = \frac{y}{x^2} \to 0 = \frac{x^2y' - y2x}{x^4} \to x^2y' - 2x\,y = 0 \ \to \ x\,y' - 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \qquad EDO\ de\ la\ familia\ de\ curvas\ dadas$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \qquad EDO\ de\ la\ familia\ de\ curvas\ ortogonales$$

$$\int 2y\,dy = -\int x\ dx + C$$

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + C;\ \ familia\ de\ elipses\ e\ hipérbolas$$

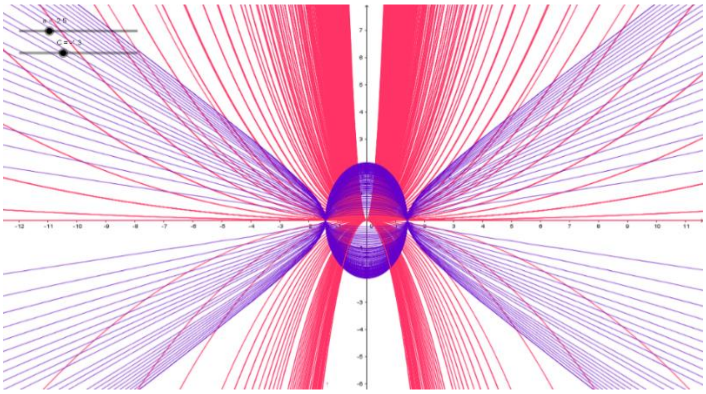


Figura 3-2. Gráfico de las trayectorias ortogonales a la edo
Realizado por Ibeth, Delgado M**. 2014**

2.3.4 *Marco epistemológico*

Visión epistemológica desde el punto de vista filosófico y psicopedagógico

- **Desde el punto de vista filosófico**

La fundamentación filosófica que sustentará la investigación se orienta a través de la educación como un medio de libertad del estudiante y no como una forma de segregación u opresión (Marx, 1996, págs. 274-276). El alumno construye libremente su conocimiento mediante las herramientas a su alcance.

- **Desde el punto vista psicopedagógico**

La propuesta del pedagogo John Dewey sobre la educación pragmática es la que sustenta el desarrollo del presente estudio. La problemática es la que define la necesidad de solución y el uso de herramientas científicas para dicha resolución. (Dewey, 1995, págs. 101-102).

2.3.5 *Categoría variable independiente: modellus 4.0*

Formato del Modellus

A continuación se describe brevemente el contenido de forma del programa.

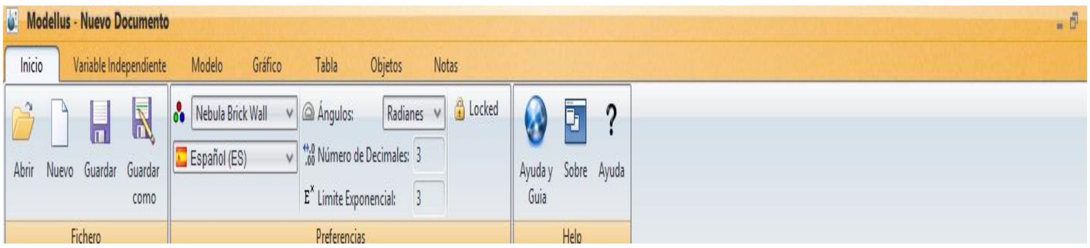


Figura 4-2. Barra de Inicio
Fuente: Programa Modellus.

La Plantilla barra de inicio permite abrir documentos previamente guardados, acceder a páginas de trabajo nuevas formato Modellus; diferentes opciones de guardado dentro del fichero, manejo de parámetros y condiciones iniciales en el apartado “preferencias”, manipulación de objetos y gráficos e inserción de notas en el “entorno de trabajo”.

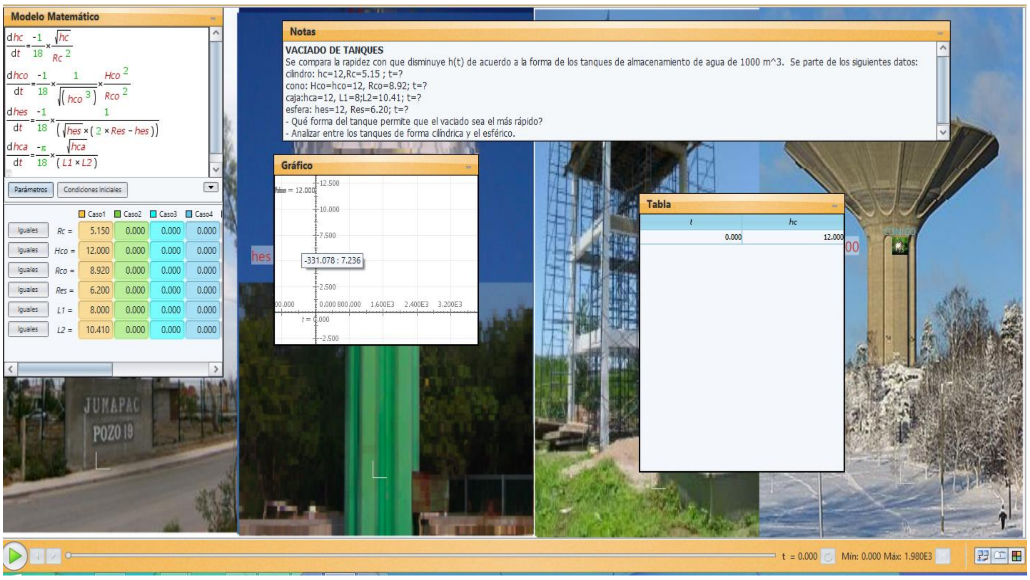


Figura 5-2. Entorno de trabajo
Fuente: Programa Modellus. 2014

El entorno de trabajo está formado por una ventana virtual en la cual se visualizan de forma óptima las simulaciones de fenómenos, los modelos matemáticos que representan esos fenómenos, instrumentos de medida, notas aclaratorias de las simulaciones; etc.

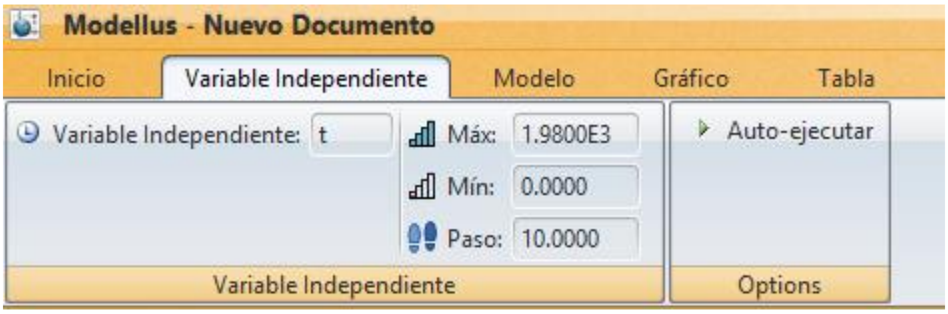


Figura 6-2. Plantilla barra variable independiente
Fuente: Programa Modellus.

En esta ventana se puede definir el parámetro independiente, el valor mínimo y el valor máximo así como así como el intervalo de cálculo.

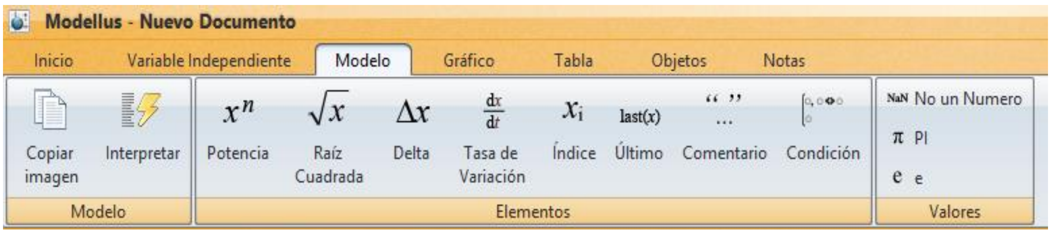


Figura 7-2. Barra Modelo

Fuente: Programa Modellus.

En el menú de "Modelo" se puede acceder a algunas opciones como: copiar imagen e "interpretar" la cual permite realizar la interpretación del modelo y verificar si la sintaxis de la ecuación es correcta.; la opción "Elementos" contiene selectores virtuales con opciones para facilitar la escritura del modelo matemático; el apartado" Valores" contiene selectores de los números irracionales pi, e y el indicador correspondiente a indeterminación.

Figura 8-2. Parámetros
Fuente: Programa Modellus.

En esta ventana se ingresan los parámetros y las condiciones iniciales de las variables.

Figura 9-2. Condiciones iniciales
Fuente: Programa Modellus.

Aquí se ingresan las condiciones iniciales de las diferentes variables, existe la posibilidad de que sean iguales en todos los casos, dependiendo del problema que se desee simular.

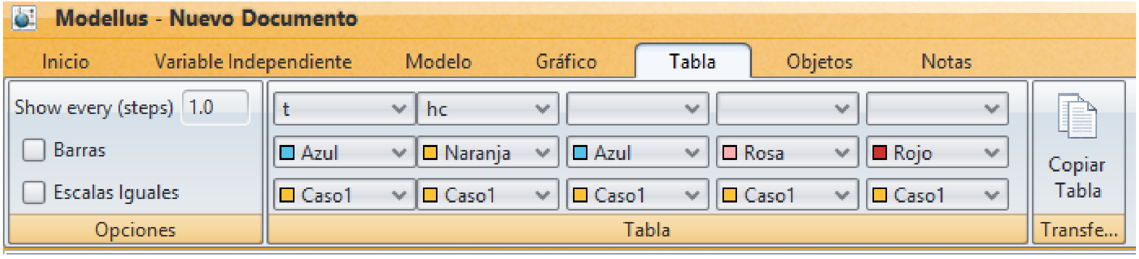


Figura 10-2. Barra Tabla
Fuente: Programa Modellus.

Se pueden escoger los parámetros y elegir diferentes colores para diferenciarlos en la simulación, también se puede asignar la escala y el intervalo en el que se desea observar los valores calculados.

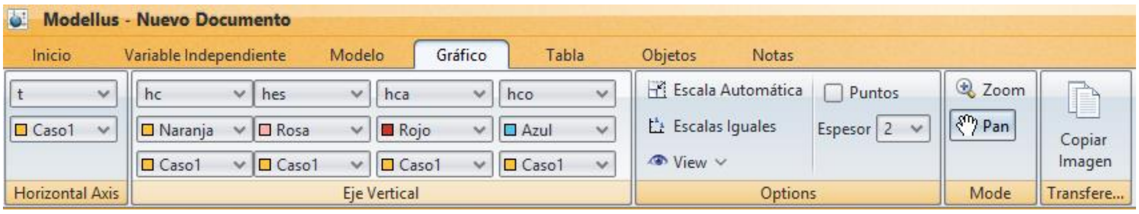


Figura 11-2. Barra Gráfico
Fuente: Programa Modellus.

Las diferentes variables que intervienen en la modelación del fenómeno se asignan a los ejes horizontal y vertical, así también los selectores de los colores que permiten identificar los casos considerados en la simulación; se puede escoger también las proyecciones, escalas, valores, nombres, etc que se desean visualizar en el gráfico.

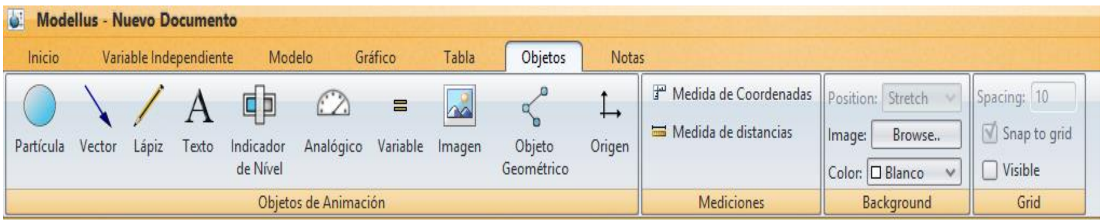


Figura 12-2. Barra Objeto
Fuente: Programa Modellus.

En esta ventana se puede escoger los tipos de objetos para simulación, los vectores asociados al objeto, los marcadores de la trayectoria, el tipo de texto, los indicadores de nivel de los elementos del movimiento si fuese necesario, el sistema de referencia y las escalas de medida, insertar imágenes para crear un ambiente como fondo de pantalla, etc.

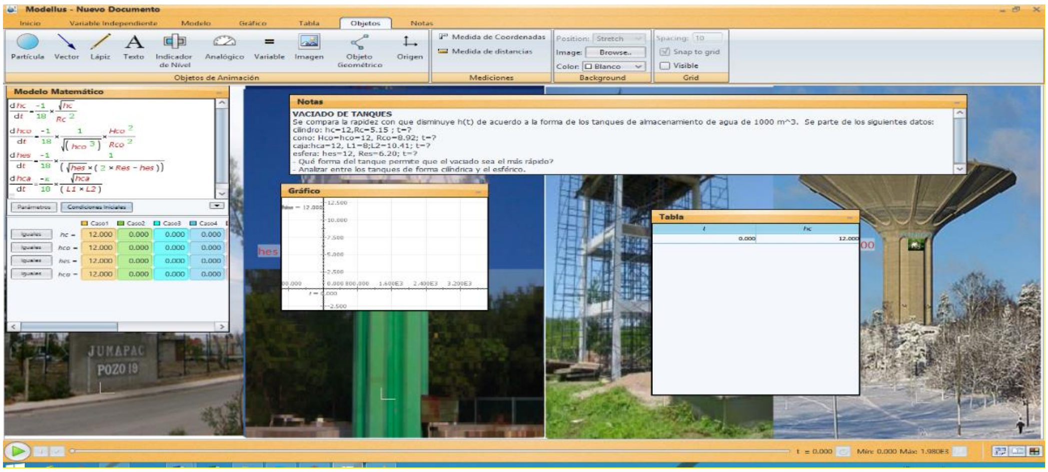


Figura 13-2. Barra Notas
Fuente: Programa Modellus. **2014**

En la ventana de notas se puede elegir el tipo de letra.

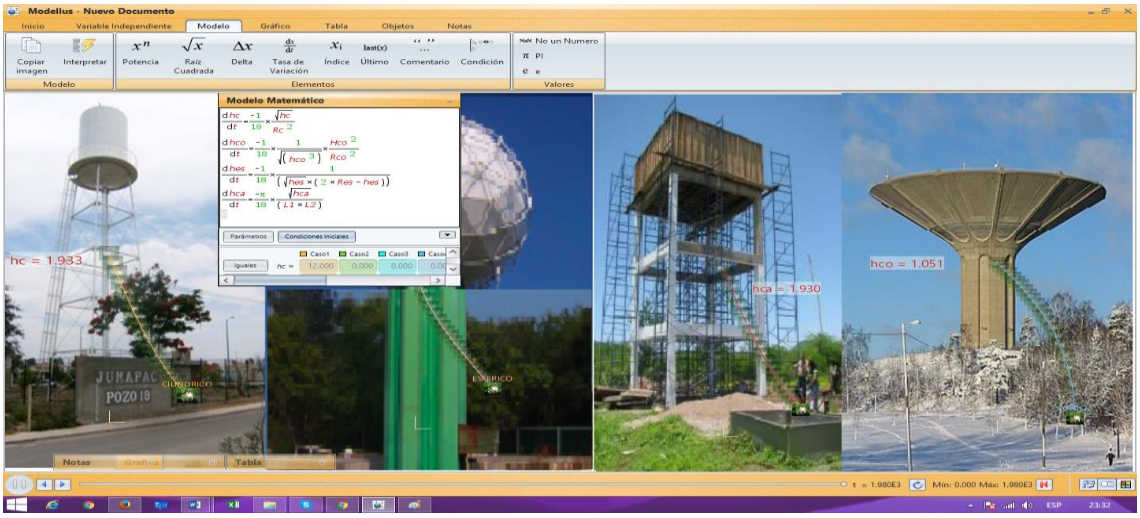


Figura 14-2. Simulación del vaciado de tanques de diferentes formas
Fuente: Programa Modellus. **2014**

El objeto motriz se representa a través de una imagen de una gota de agua; los gráficos correspondientes a la forma en que la altura varía están regidos por las ecuaciones diferenciales ordinarias que representan este fenómeno y que se aprecian en la ventana de modelo en el entorno de trabajo.

Los ejemplos guías son interactivos y permiten la participación del usuario.

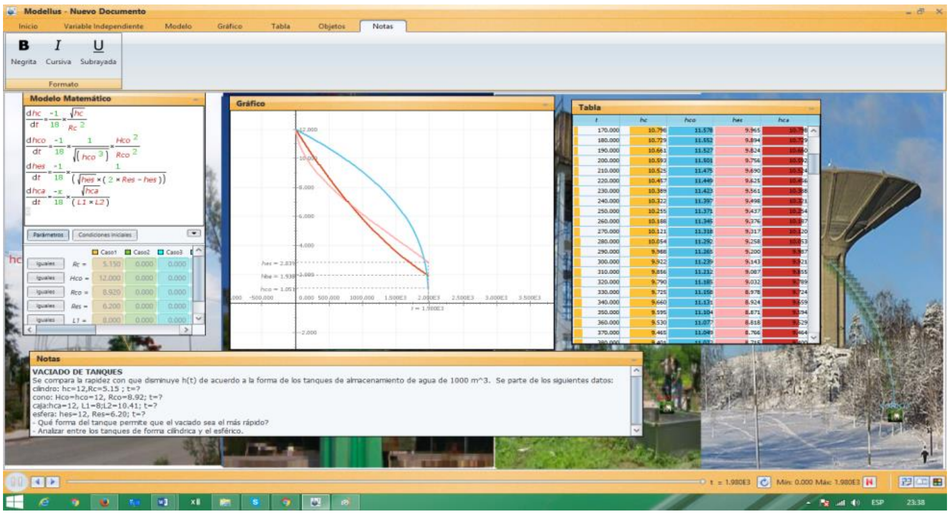


Figura 15-2. Modelación, gráfico, tabla y notas del vaciado de tanques
Fuente: Programa Modellus. **2014**

El entorno de trabajo permite observar simultáneamente la simulación, el gráfico de las variables, la tabla con los respectivos valores, el modelo matemático con las condiciones iniciales y el cuadro notas a la vez.

Moción

El programa Modellus ofrece gran versatilidad en a los “detalles personales” del usuario, como: tipo de objetos, ubicación en el entorno, tipos de escalas de medidas, tipos y colores de letras; lo que resulta en gran modo didáctico (Cruz, 2014, pág. 52)

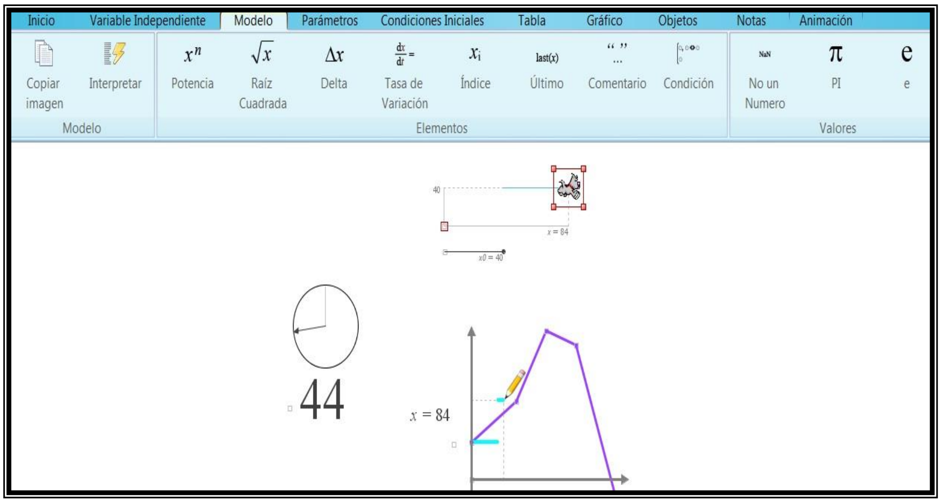


Figura 16-2. Moción
Fuente: (Cruz, 2014)

CAPÍTULO III

3. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

3.1 Diseño y Tipo de Estudio

Se utilizó el diseño cuasi experimental pues se trabajó con grupos de estudiantes del tercer nivel que están tomando la asignatura de EDO; el primer grupo fue de experimentación y el otro de control.

Tabla 1-3 Diseño Experimental

GE	O ------------------	X	O
GC	O	-	O

Realizado por Ibeth Delgado. 2014

Dónde:

GE es el grupo experimental con 33 estudiantes x 2 ensayos cada uno y un equivalente a 66 unidades experimentales.

GC es el grupo de control con 33 estudiantes x 2 ensayos cada uno y un equivalente a 66 unidades experimentales.

3.2 Determinación de la Población

La población equivalió a 66 estudiantes de dos paralelos de Tercer Nivel de Ingeniería Mecatrónica de la ESPEL.

3.3 Muestra

La muestra se determinó por conveniencia por tratarse de una población menor a 100 estudiantes.

El tamaño muestral equivale a 132 unidades experimentales desglosadas de la siguiente forma:

66 unidades experimentales resultado de dos ensayos aplicados a 33 estudiantes del grupo experimental; y 66 unidades experimentales resultado de dos ensayos aplicados a 33 estudiantes del grupo de control.

3.4 Método, Técnicas e Instrumentos

3.4.1 *Métodos*

3.4.1.1 *Método Científico*

- Problema: Capítulo I de la Tesis
- Hipótesis: Capítulo I de la Tesis
- Experimentación: Inserto y descrito en los capítulos III (Metodología) y V (Propuesta) de la tesis.
- Tabulación: En el capítulo IV del documento de tesis.
- Validación de hipótesis científica: En el capítulo IV del documento de tesis.
- Resultados: En el capítulo IV del documento de tesis.
- Conclusiones
- Divulgación, El documento de tesis.

3.4.1.2 *Método Inductivo*

Para la investigación se utilizará el método inductivo combinado con el analítico porque se van a analizar casos particulares en cuanto a la modelación de determinados procesos básicos, se relacionarán con otros procesos más complejos y se concluirá en forma general sobre la bondad del MODELLUS.

3.4.2 *Técnicas*

Se utilizarán pruebas basadas en las encuestas y cuestionarios estructurados en preguntas cerradas de conocimiento específico en los ámbitos conceptual y operacional sobre las EDO.

3.4.3 *Procesamiento de Datos*

Se aplicará la prueba Z normalizada para la tabulación de los datos recogidos desde la experimentación entre los grupos de investigación.

3.5 Materiales

Los materiales y recursos usados en la elaboración de éste estudio fueron los siguientes:

- Informáticos y Tecnológicos
- Técnicos
- Programas: Modellus 4.0 y SPSS versión 22
- Matrices de registro

CAPÍTULO IV

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Hipótesis general

El uso del programa Modellus 4.0 como herramienta didáctica mejora el aprendizaje de ecuaciones diferenciales de los estudiantes del III Nivel de Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPEL.

4.2 Variables

4.2.1 *Variable Independiente*

El Modellus 4.0 como herramienta didáctica.

4.2.2 *Variable Dependiente*

El aprendizaje de ecuaciones diferenciales

Tabla 1-4 Operacionalización de variables

Variable	Concepto

Independiente: El uso del programa Modellus como herramienta didáctica.	Implementación del pragmatismo mediante simulación en el proceso educativo de E.D.O para facilitar el aprendizaje.
Dependiente: El aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	Abstracción reductivamente estadística de las temáticas: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden: Homogéneas; Factor Integrante - Ecuaciones diferenciales exactas. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior Homogéneas con coeficientes constantes No Homogéneas con coeficientes constantes Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior.

Realizado por: Ibeth Delgado. 2014

Tabla 2- 4 Dimensionamiento de las variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Técnicas e instrumentos
Independiente: El uso del programa Modellus como herramienta didáctica.	Psicomotriz	Desarrollo de categorías Comprensión, Aplicación, Análisis	Encuesta.- Cuestionario
Dependiente: El aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales ordinarias	Estándar reductivo (no en el plano del desarrollo de la inteligencia matemática)	Supera los aprendizajes. Domina los aprendizajes. Alcanza los aprendizajes. No alcanza los aprendizajes.	Encuesta cuestionario

Realizado por: Ibeth Delgado. 2014

4.3 Análisis, Interpretación y Presentación de Resultados

Tabla 3-4 Evaluación de los grupos al diagnóstico

Lista	Experimental	Control
01	6,5	7,5
02	6,5	6
03	5	6
04	5,25	6,75
05	6	6,75
06	5,25	8,25
07	5,5	9
08	6,25	7,25
09	6	6,75
10	7,5	5,5
11	8	8
12	4,5	4,5
13	5,5	5,5
14	6	6
15	5,75	5,75
16	6	6
17	4,75	7,5
18	3,75	7
19	5,75	5
20	6,75	6
21	8,25	6
22	9	4,75
23	7,25	3,75
24	6,75	5,75
25	5,5	6,5
26	3,25	6,5
27	4,5	5
28	7,5	5,25
29	6	6
30	7,5	5,25
31	7	5,5
32	5	6,25
33	6	6

Realizado por: Ibeth Delgado. 2014

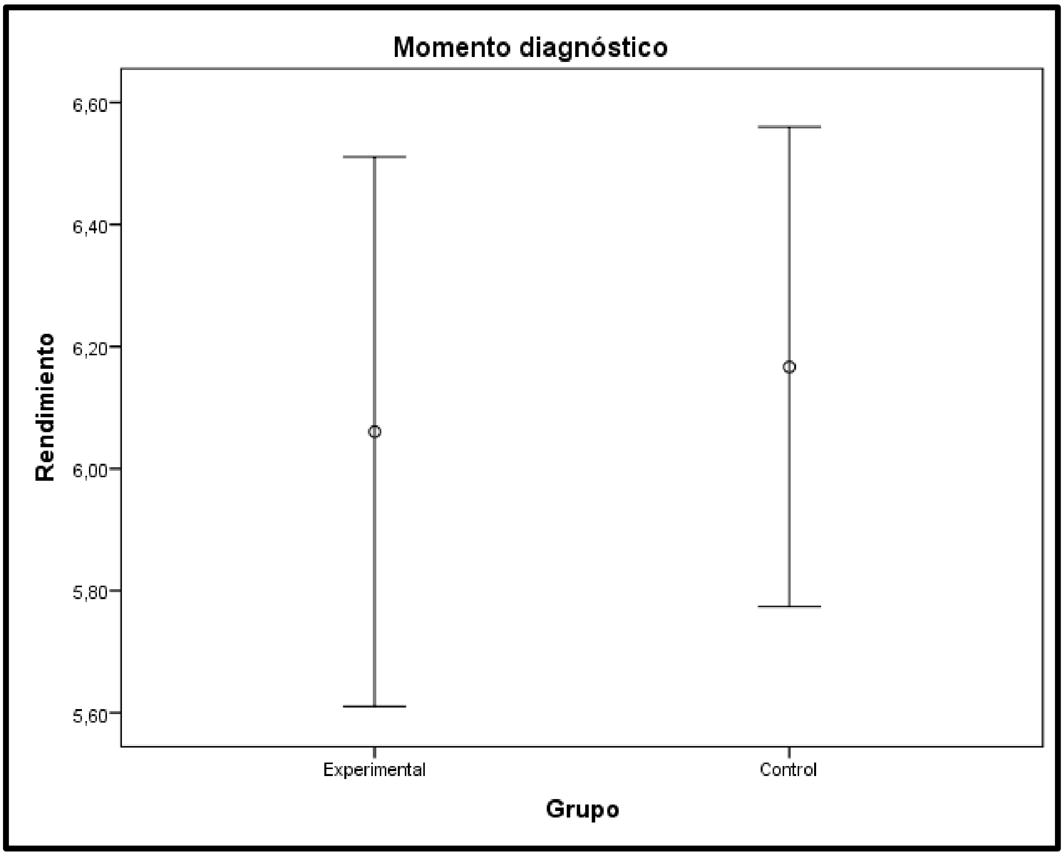


Figura 1-4. Gráfico de medias y errores al diagnóstico
Fuente: Tabla 3-4
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014

Como se aprecia en el gráfico previo el rendimiento al momento de la evaluación diagnóstica basada en la metodología expositiva muestra una ligera desventaja en la media del grupo experimental en relación al de control. Los errores son mayores también en el grupo experimental, lo que se interpreta como un grupo que tiene mayores contrastes en cuanto a logros académicos.

4.4 Validación de la hipótesis diagnóstica de la investigación

$H_{0:}$ Las medias de rendimiento del diagnóstico entre los grupos de experimentación y control son iguales, es decir no existen errores de maduración en los grupos de control y experimental.

Ho: $\mu 1 - \mu 2 \leq 0$; p_valor >=0.05

Hi: Las medias de rendimiento del diagnóstico entre los grupos de experimentación y control son significativamente diferentes.

Hi: $\mu 1 - \mu 2 > 0$; p_valor <0.05

$$z = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1{}^2}{n_1} + \frac{s_2{}^2}{n_2}\right)}}$$

Dónde:

x_1: Media de rendimiento del grupo experimental

x_2: Media de rendimiento del grupo de control

s_1: Desviación muestral del grupo experimental

s_2: Desviación muestral del grupo de control

Tabla 4-4 Estadísticos descriptivos al diagnóstico

Descriptivos								
Compila los valores								
	N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite superior		
Experimental	33	6,0606	1,27020	,22111	5,6102	6,5110	3,25	9,00
Control	33	6,1667	1,10868	,19300	5,7735	6,5598	3,75	9,00
Total	66	6,1136	1,18418	,14576	5,8225	6,4047	3,25	9,00

Fuente: Tabla 3-4
Elaborado por: Ibeth Delgado. 2014

$$z = \frac{6{,}06 - 6{,}17}{\sqrt{\left(\frac{1{,}27^2}{33} + \frac{1{,}11^2}{33}\right)}} = -0{,}37$$

Decisión: Como -0,37<1,64 entonces se infiere que las medias entre los grupos experimental y control son iguales; es decir que la investigación no adolece de errores por maduración que podrían sesgar los resultados de la aplicación de la metodología propuesta.

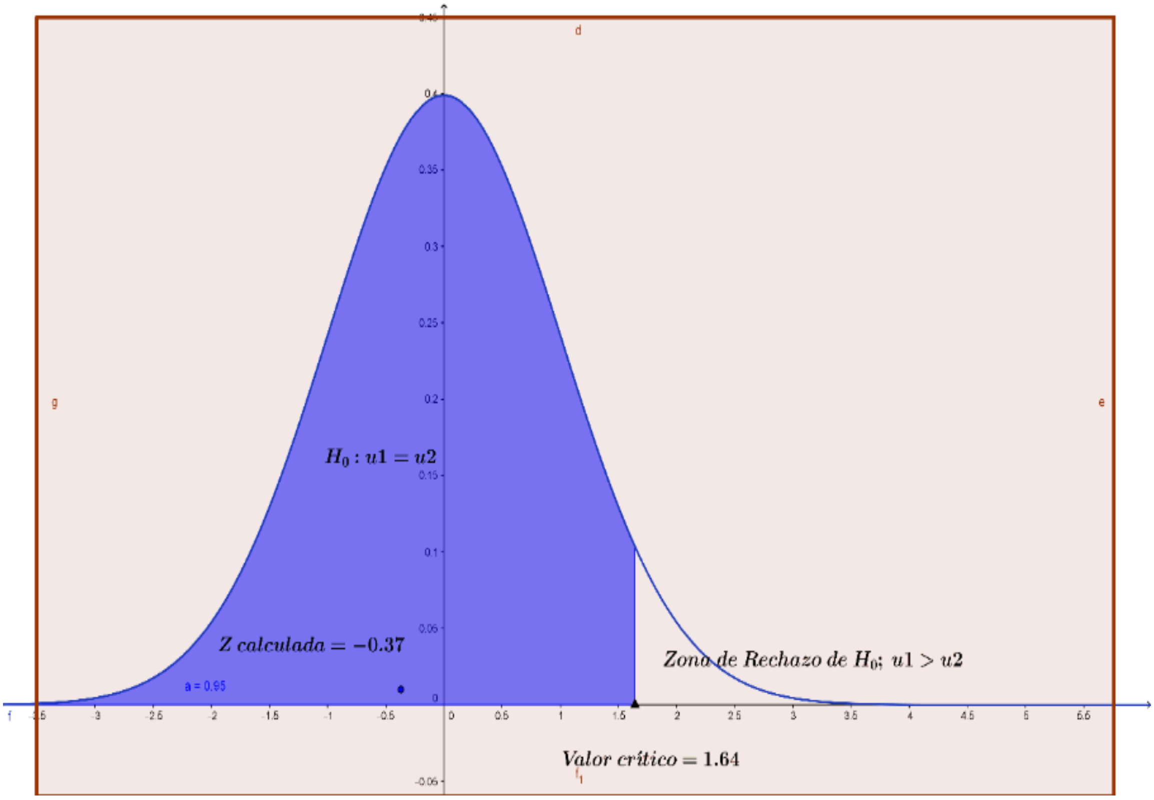


Figura 2-4. Gráfico de prueba de hipótesis diagnóstica
Fuente: Tabla 4-4
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014

El gráfico anterior muestra que el valor de Z calculada no sobrepasa el valor crítico de 1,64 validando estadísticamente el hecho de que las medias de los grupos de control y experimental tienen las mismas medias.

Caso contrario no se podría continuar con la segunda parte de la investigación pues al caer en errores de maduración se produciría sesgo en las apreciaciones de los resultados en la investigación. Dos grupos iguales de partida garantizan una mejor evaluación de los logros bajo la metodología propuesta en el grupo experimental.

4.5 Aplicación Metodológica

Tabla 5-4 Evaluación final

Lista	Experimental	Control
1	7,75	9
2	7	6,25
3	6,75	6
4	7	7
5	7,25	7,25
6	7	7,5
7	8	8,5
8	8,25	6
9	7,25	6
10	8	6,25
11	8,25	7,5
12	6	6
13	7,75	5,75
14	8,5	7,25
15	5	6
16	8,25	6,25
17	7,75	8
18	6,25	7,25
19	5,75	5,25
20	9	6,5
21	9,25	6,25
22	10	5
23	8,25	4,25
24	9,25	6,5
25	6,75	6
26	7,75	6,75
27	6	6,25
28	8,25	6,25
29	7,75	6,5
30	8,25	7
31	8,25	6,5
32	7	7,5
33	7,25	7,25

Elaborado por: Ibeth Delgado. 2014

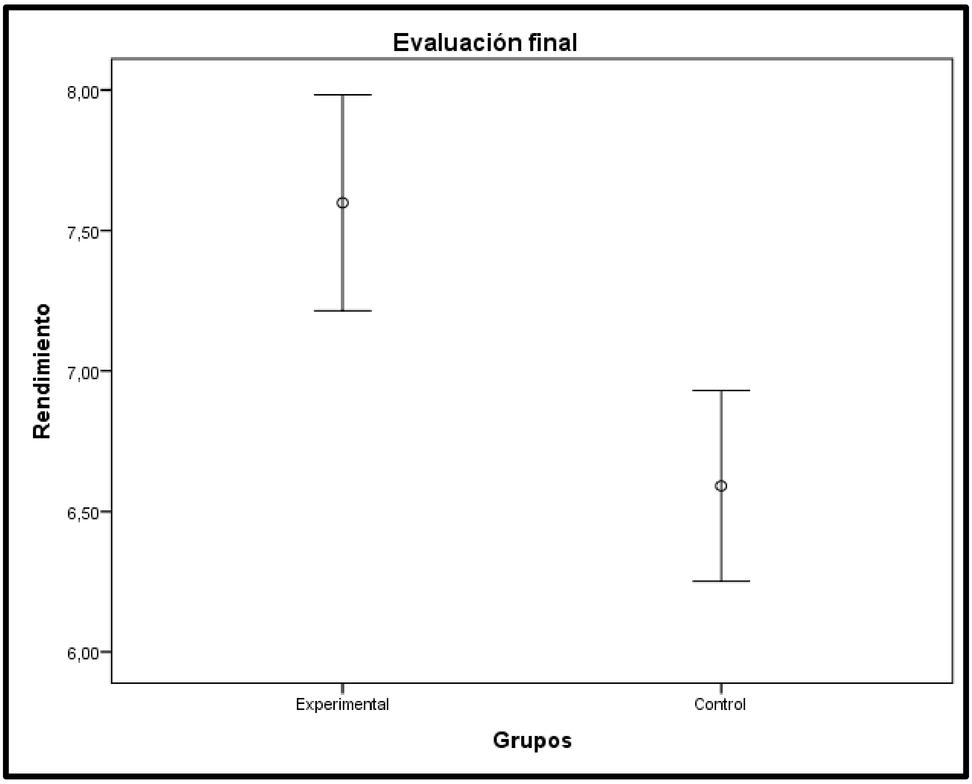


Figura 3-4. Gráfico de medias y errores en la evaluación final
Fuente: Tabla 5-4
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014

El gráfico previo muestra una notable mejora en el grupo experimental con respecto al diagnóstico; siendo en el actual momento mejor su media que la correspondiente al grupo de control. La distancia entre las calificaciones intrasujetos en el grupo de experimentación se ha reducido, reduciendo de esta manera el error típico también.

4.6 Prueba de la Hipótesis Científica de la Investigación

Tabla 6-4 Estadísticos descriptivos en la evaluación final

Estadísticos descriptivos				
	N	Media		Desv. típ.
	Estadístico	Estadístico	Error típico	Estadístico
Grupo Experimental	33	7,5985	,18905	1,08603
Grupo Control	33	6,5909	,16672	,95774
N válido (según lista)	33			

Fuente:Tabla 5-4
Elaborado por: Ibeth Delgado. 2014

Las medias de rendimiento de la evaluación final entre los grupos de experimentación y control son iguales.

Ho: $\mu 1-\mu 2\ \leq 0$; p_valor >=0.05

Las medias de rendimiento de la evaluación final entre los grupos de experimentación y control son significativamente diferentes.

Hi: $\mu 1-\mu 2>0$; p_valor <0.05

$$z=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{(\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2})}}$$

Dónde:

x_1: Media de rendimiento del grupo experimental

x_2: Media de rendimiento del grupo de control

s_1: Desviación muestral del grupo experimental

s_2: Desviación muestral del grupo de control

$$z=\frac{7{,}6-6{,}6}{\sqrt{(\frac{1{,}1^2}{33}+\frac{0{,}96^2}{33})}}=4{,}02$$

Decisión

Como 4,02> 1.64 entonces se infiere que las medias entre los grupos experimental y control no son iguales; concluyéndose que el grupo experimental al tener una media mayor que el de control logró un mejor desempeño debido a la aplicación metodológica efectiva mediante Modellus 4.0 en el proceso de aprendizaje de ecuaciones diferenciales.

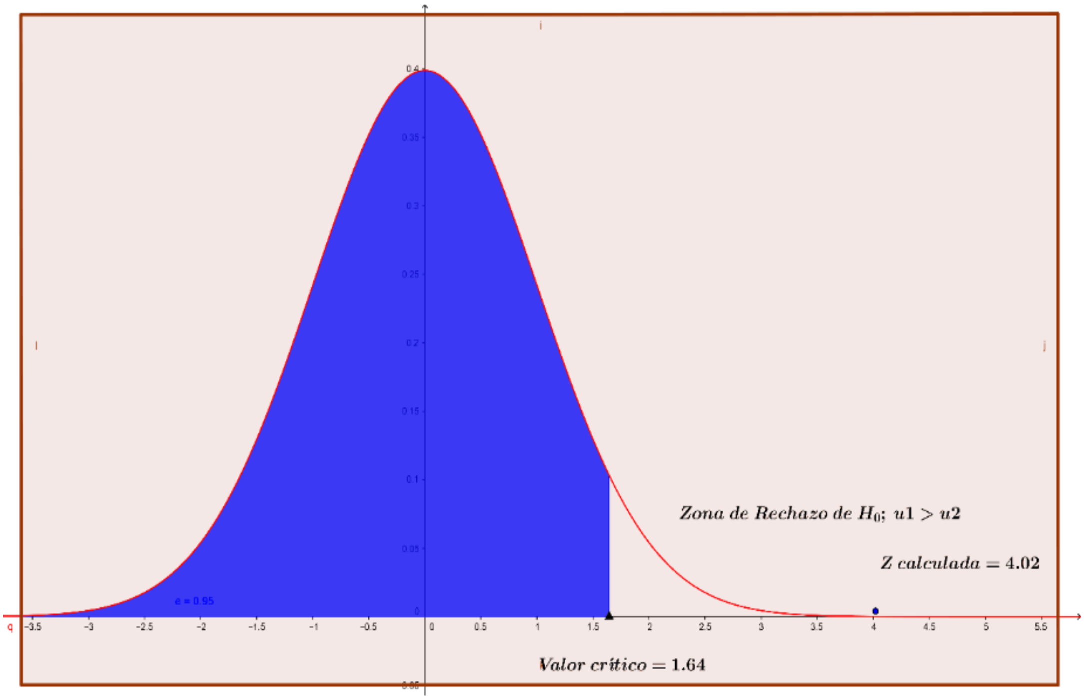


Figura 4-4. Gráfico de prueba de hipótesis científica de la investigación
Fuente: Tabla 4-7
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014

La Figura 4-4 muestra que el valor Z calculado es 4,02; sobrepasa al valor crítico 1,64 deduciendo que las medias entre los grupos no son las mismas, siendo 1.15 veces mejor el grupo experimental sobre el grupo de control; el cual en el momento del diagnóstico era 1.01 veces mejor al experimental. Esta superioridad del grupo experimental se infiere que se debe a la aplicación metodológica en el proceso enseñanza-aprendizaje.

CAPÍTULO V

5. PROPUESTA

5.1 Presentación

La autora del presente trabajo se complace en presentar éste producto que surgió de la inquietud y curiosidad de responder a la pregunta de si la implementación de un software gratuito y amigable como lo es el Modellus, propende al mejoramiento de los saberes de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en los estudiantes de la educación superior.

Lo que nació como un deseo reprimido se ha convertido en realidad; evidentemente aunque quedan ciertos temas en el aire por la falta de tiempo y recursos sin embargo es claro que el uso de herramientas didácticas permite un paso más sencillo para traducir lo abstracto a lo concreto en el tema de las EDO.

5.1.1 *Título*

"Cuaderno Guía con aplicaciones en Modellus 4.0 como herramienta didáctica para mejorar el aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de orden superior, en los estudiantes de III nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Extensión Latacunga".

- Institución en la que se va aplicar: Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE Extensión Latacunga.
- Provincia: Cotopaxi
- Cantón: Latacunga

- Beneficiarios: Área de Matemática

5.1.2 ***Objetivos***

5.1.2.1 *Objetivo General*

Desarrollar una guía didáctica sobre el uso de Modellus 4.0 con aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primero y segundo orden para mejorar la relación teoría – práctica, razonamiento y el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

5.1.2.2 *Objetivos Específicos*

Plantear ejercicios que representan situaciones de la vida práctica, adaptarlos a los modelos matemáticos básicos como ecuaciones diferenciales ordinarias de primero y segundo orden para utilizarlos en Modellus.

Especificar los pasos para ingresar las ecuaciones diferenciales ordinarias; asignar valores de condiciones iniciales y parámetros; y visualizar completamente los resultados gráficos y tablas en Modellus.

Crear ambientes que se adapten a los problemas planteados para relacionar la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias con situaciones prácticas mediante la simulación en Modellus.

Contrastar los resultados obtenidos en Modellus con los obtenidos manualmente.

5.1.3 *Justificación*

Se justifica la presente propuesta porque coadyuva efectivamente al mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las sesiones de clase de ecuaciones diferenciales ordinarias son generalmente expositivas y su desarrollo puede resumirse en: fase inicial en donde se enuncia el tema, preguntas relativas al tema anterior y al actual; fase de desarrollo del tema en donde se enuncian conceptos y reglas, se resuelven de ejercicios; fase final en donde se realizan preguntas de evaluación para reforzar y retroalimentar sobre el tema y se envían tareas de refuerzo para la siguiente clase.

Sin embargo, en los estudiantes queda la inquietud sobre su aplicación y relación con la vida práctica. La utilización del software Modellus permite realizar esta conexión entre la teoría y la práctica relacionándolas con situaciones cotidianas para el estudiante mediante la opción de simulación.

Además, Modellus es un software sencillo, amigable no necesita de un manual riguroso o extenso para poder usarlo. Y muestra los resultados tanto en la simulación como en la graficación y análisis de parámetros y variables.

La mayoría de los estudiantes sobre los que se ha aplicado la propuesta ya tienen conocimientos básicos de Modellus, pues lo han utilizado eficazmente en la signatura de Física; por lo que se hace sencillo su manejo; y a los estudiantes que no lo han utilizado les lleva poco tiempo aprender a manejarlo.

La guía es viable, pues existe amplia información en cuanto a los temas que se tratan, pues son típicos de un curso de EDO; en cuanto al uso de Modellus existe también una amplia información en videos de internet.

No se requiere de grandes gastos que imposibiliten la implementación en el grupo beneficiario.

5.1.4 *Fundamentación Teórica*

La fundamentación teórica de la propuesta existe en la bibliografía, y en los apuntes de EDO que personalmente se han usado en el proceso de enseñanza en las sesiones de clase.

Puesto que Modellus es un programa sencillo y liviano, la información que existe en la bibliografía-video sobre sus principales características y bondades es suficiente para su rápido manejo.

El fundamento teórico, los ejercicios resueltos y propuestos de cada tema se describen ampliamente en el anexo Apuntes de EDO; y en el anexo Planes de Clase que contiene el formato para cada clase presencial diaria en la asignatura de EDO para los estudiantes de tercer nivel de las carreras técnicas de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPEL.

5.1.5 *Descripción de la Propuesta*

Esta propuesta enfoca su aplicación en la etapa de Desarrollo de la Matriz de Planificación del Plan de Clase que se divide en tres etapas: Inicial, Desarrollo y Final.

De acuerdo al formato del Plan de Clase diario, las clases siguen de alguna manera la siguiente secuencia: Se expone el tema y objetivo, se aborda el tema formulando preguntas relacionadas, se usa la clase magistral, se expone conceptos, características específicas del tema y se resuelve ejercicios relacionados al mismo.

Esta propuesta está diseñada para su aplicación al final de la etapa Desarrollo; con el objetivo de reforzar y relacionar el tema tratado en la teoría con situaciones cotidianas para el estudiante. Luego de la fundamentación teórica y la solución de ejercicios.

El uso de esta propuesta en el curso de EDO permite relacionar las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos de fenómenos físicos, biológicos, sistemas mecánicos y circuitos eléctricos sencillos a través de las diferentes opciones que dispone Modellus como son: Modelo Matemático, Gráfico, Tabla y Animación con Objetos.

Esta guía está diseñada para ser aplicada a ocho temas del contenido total del curso, sin embargo se recomienda ampliar su uso a más temas.

El desarrollo de esta guía tiene el siguiente orden:

- *Se enuncia el tema de la sesión de clase*: aquí además del enunciado, se describe brevemente el tema; pues su desarrollo así como la resolución de ejercicios consta en el anexo Apuntes de EDO

- *Se enuncian y describen los ejemplos a utilizarse con Modellus*: según el tema son uno o más ejemplos de situaciones prácticas relacionados con el tema de clase.

- *Se describe el modelo matemático representado por la ecuación diferencial ordinaria correspondiente*: Los problemas de situaciones prácticas son representados matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales de primer orden en la Unidad Uno y de segundo orden en la Unidad Dos.

- *Se describen los pasos para el uso de Modellus*: en los primeros ejemplos se describe detalladamente el ingreso de la EDO de primer orden, parámetros y condiciones iniciales en la ventana Modelo Matemático; se identifica el proceso paso a paso para graficar las variables importantes en la ventana Gráfico; así como para visualizar los resultados numéricos en los valores de la Tabla.

En los ejemplos siguientes, en base a los primeros ejemplos se hace énfasis a otros detalles como visualización de títulos, variables específicas, y animación.

- *Se muestra el resultado final*: Consiste en la captura de una pantalla del ejemplo realizado y corrida en Modellus

- *Se realiza un análisis de resultados:* Se analiza la respuesta obtenida en Modellus respecto de las preguntas planteadas en los problemas.

- *Se envían tarea de refuerzo*: estas tareas tienen relación con el tema tratado y con el uso de Modellus.

5.1.6 *Ejecución de la propuesta*

Para ejecutar esta propuesta se asume que la base teórica y los ejercicios han sido fundamentados en la fase de Desarrollo de cada clase, de tal forma que esta propuesta está diseñada para ser implementada en la sección Experiencia y Medios identificando el tema como el tema de la sesión de clase.

UNIDAD UNO: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

5.1.6.1 *Tema uno: Las Ecuaciones Diferenciales como Modelos Matemáticos*

Este tema está incluido en los orígenes de las EDO; es muy importante, y a muchos estudiantes les resulta complejo; pues requiere del razonamiento y uso de conceptos matemáticos de cálculo diferencial para identificar variables, parámetros y representar mediante símbolos matemáticos un fenómeno físico o un proceso.

La representación matemática de muchos eventos físicos, económicos, biológicos, mecánicos, etc. se la realiza mediante una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Esta modelación es el resultado de un proceso resumido en la identificación del objetivo de la modelación, la identificación de variables, la identificación de suposiciones o hipótesis relacionadas con las razones de cambio de las variables del fenómeno que se quiere modelar, representación matemática, solución del modelo y verificación de resultados con los datos experimentales.

Modellus presenta una ventana principal dentro de la cual se pueden visualizar otras cuatro ventanas que son Modelo Matemático, Gráfico, Tabla y una de Notas. En la ventana Modelo Matemático, se ingresan las ecuaciones diferenciales ordinarias que se van a analizar, así como los parámetros y condiciones iniciales. Todo se debe escribir adecuadamente para que el modelo sea correctamente interpretado.

Ejemplo uno:

El modelo básico **del crecimiento poblacional**, considera las tasas de natalidad y de mortalidad constantes y se lo puede describir como:

"La rapidez con la que crece la población de una región es directamente proporcional a la población en cada instante", esta descripción se expresa en forma matemática de la siguiente manera:

Población de una región: $P(t)$

La rapidez con la que crece la población P (t) es $\frac{\Delta P(t)}{\Delta t}$

Directamente proporcional a la población en cada instante "t" $\propto P(t)$

La expresión completa es: $\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} \propto P(t)$

Se identifica:

$\boldsymbol{P(t)}$ Variable que depende del tiempo; **"t"** es la variable independiente; y $\propto$ la proporcionalidad directa se puede escribir como (=k); en este caso es positiva porque se trata de crecimiento.

Y el modelo matemático se expresa como:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$

En el software Modellus la ventana Modelo Matemático es en donde se puede ingresar el modelo del crecimiento poblacional de este ejercicio, si la ecuación es correcta Modellus lo indica mediante un visto.

Es importante identificar a "**k**" como un parámetro para asignar valores en la opción Parámetros; así como también es importante identificar el valor de la variable **P** en el tiempo $\mathbf{t_0}$ (tiempo inicial) del análisis en la opción **condiciones iniciales**, como se muestra en la figura siguiente:

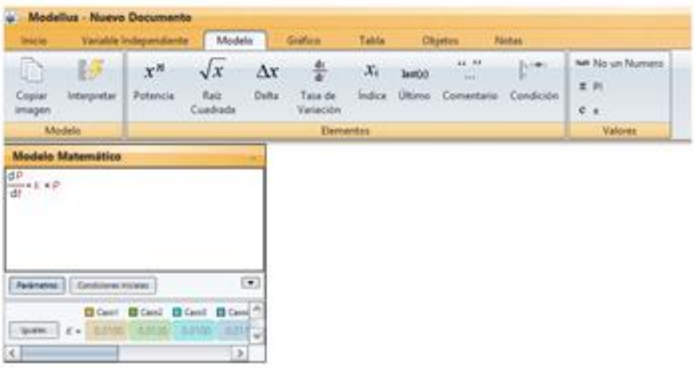


Figura 1-5. Ventana Modelo Matemático
Realizado por: Ibeth Delgado M.
Fuente: Modellus

En esta sesión de clase se requiere que el estudiante represente el proceso de forma matemática y visualice el efecto de variar el parámetro "k". Modellus permite probar algunos casos (diez) y visualizarlos en la ventana Gráfico.

Se escoge en el menú principal la opción de la variable independiente según sea el caso puede ser el tiempo **"t"** o **"x",** se especifica el rango de análisis, el valor mínimo, el valor máximo para el dominio de análisis; y, el paso o intervalo de cálculo.

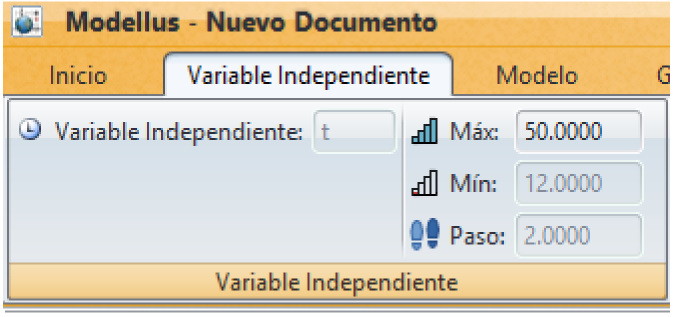


Figura 2-5. Variable Independiente
Fuente: Modellus

En la ventana Gráfico se identifica la variable independiente en este caso se escoge "t"; generalmente se deja el caso 1, pues es el que sirve de referencia para realizar las respectivas comparaciones en la manipulación de los parámetros.

A continuación se escoge visualizar la variable **P**, se asigna un color para la curva del caso 1; se escoge nuevamente visualizar la variable **P**, se le asigna otro color para la curva del caso 2 y se procede de igual manera para los diferentes casos que se desee analizar.

Inicialmente se puede probar pulsando en escala automática, luego se puede adaptar la escala a los requerimientos del problema; es importante escoger un espesor visible de las curvas generalmente es adecuado el 3 (esto es opcional).

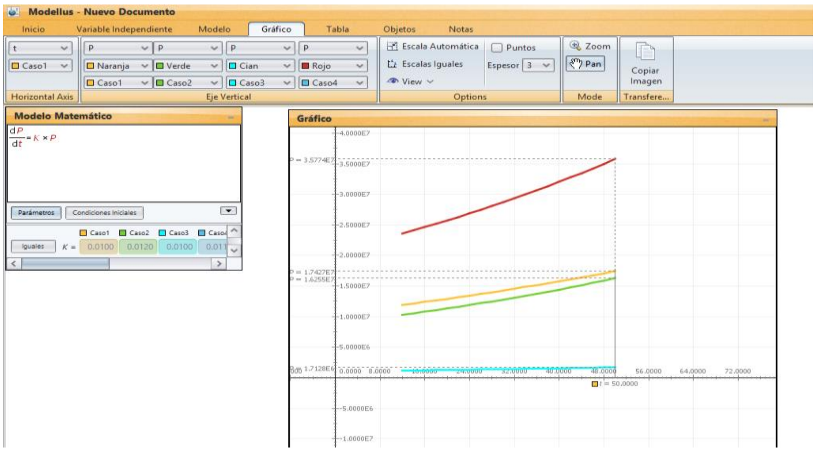
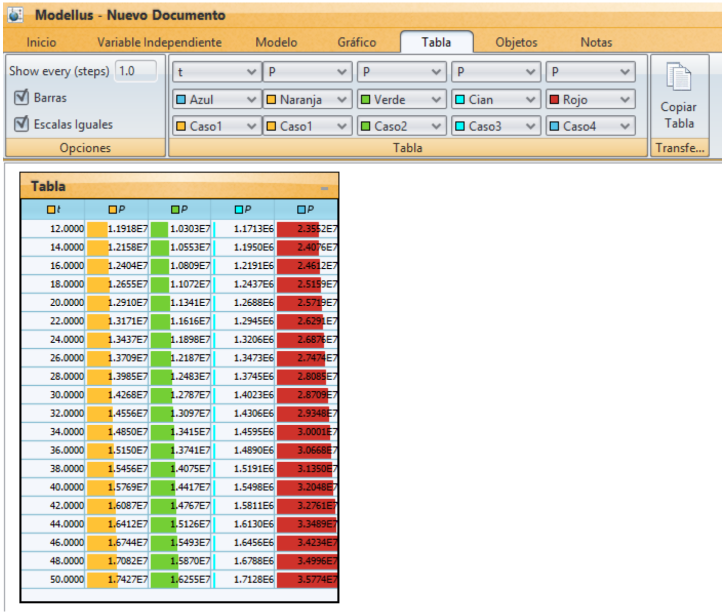


Figura 3-5. Ventana Gráfico
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014

Se puede visualizar además una tabla de valores en la cual se escogen aquellos que sean importantes conocer.



t	P	P	P	P
12.0000	1.1918E7	1.0303E7	1.1713E6	2.3552E7
14.0000	1.2158E7	1.0553E7	1.1950E6	2.4076E7
16.0000	1.2404E7	1.0809E7	1.2191E6	2.4612E7
18.0000	1.2655E7	1.1072E7	1.2437E6	2.5159E7
20.0000	1.2910E7	1.1341E7	1.2688E6	2.5719E7
22.0000	1.3171E7	1.1616E7	1.2945E6	2.6291E7
24.0000	1.3437E7	1.1898E7	1.3206E6	2.6876E7
26.0000	1.3709E7	1.2187E7	1.3473E6	2.7474E7
28.0000	1.3985E7	1.2483E7	1.3745E6	2.8085E7
30.0000	1.4268E7	1.2787E7	1.4023E6	2.8709E7
32.0000	1.4556E7	1.3097E7	1.4306E6	2.9348E7
34.0000	1.4850E7	1.3415E7	1.4595E6	3.0001E7
36.0000	1.5150E7	1.3741E7	1.4890E6	3.0668E7
38.0000	1.5456E7	1.4075E7	1.5191E6	3.1350E7
40.0000	1.5769E7	1.4417E7	1.5498E6	3.2048E7
42.0000	1.6087E7	1.4767E7	1.5811E6	3.2761E7
44.0000	1.6412E7	1.5126E7	1.6130E6	3.3489E7
46.0000	1.6744E7	1.5493E7	1.6456E6	3.4234E7
48.0000	1.7082E7	1.5870E7	1.6788E6	3.4996E7
50.0000	1.7427E7	1.6255E7	1.7128E6	3.5774E7

Figura 4-5. Ventana Tabla
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

La ventana Notas se utiliza para escribir acotaciones importantes del problema.

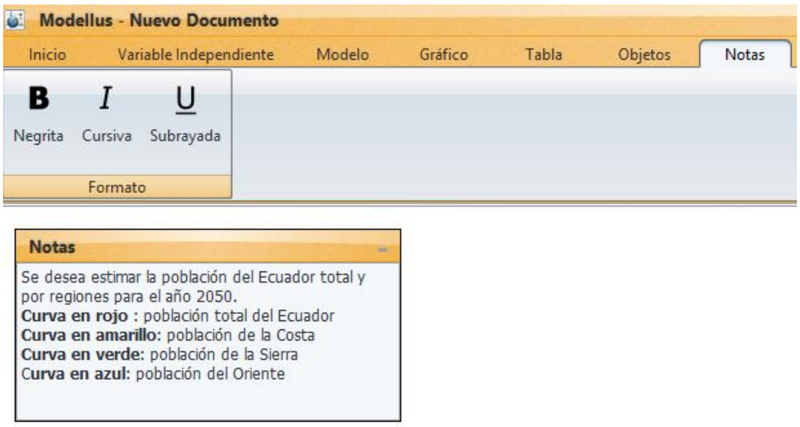


Figura 5-5. Ventana Notas
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

También la ventana principal de Modellus presenta en la parte inferior derecha íconos que sirven para ampliar o disminuir la vista (zoom), un puntero para escoger los elementos de la pantalla, un pan moden para mover los elementos de la pantalla y el ícono de vista por defecto.

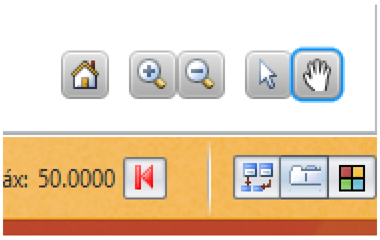


Figura 6-5. Íconos de vista
Fuente: Modellus

Luego de que el modelo matemático es ingresado correctamente, se pueden dar valores aleatorios a las tasas de crecimiento representadas por el parámetro **k**; se fija una población inicial para un tiempo inicial en la sección de condiciones iniciales; se escoge la variable **P** para visualizar tanto gráfica como numéricamente los datos en la tabla.

Finalmente se pulsa el ícono de correr.

Figura 7-5. Botón de correr
Fuente: Modellus.

Se observa simultáneamente la gráfica de las curvas, la tabla de los cuatro casos escogidos y en la línea de tiempo (figura 8-5) que se encuentra a la derecha del botón correr se observa el avance del tiempo en el rango prefijado en la variable independiente.

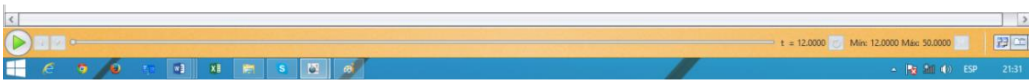


Figura 8-5. Barra de corrida del Tiempo
Fuente: Modellus

El resultado de este modelamiento es:

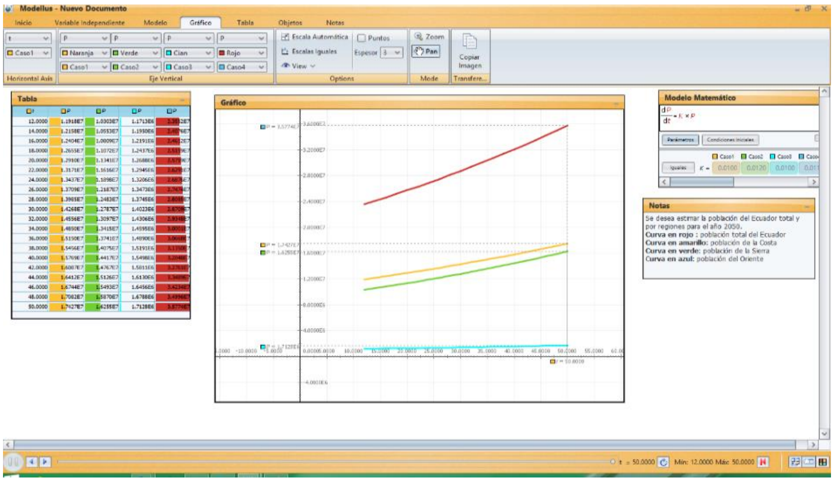


Figura 9-5. Ventanas de Modellus
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

En esta primera parte de las EDO como modelos matemáticos aún no se ha simulado el proceso en sí, solamente se ha graficado la solución de la EDO. La simulación se analizará más adelante cuando se empleen los métodos de solución de las EDO, para resolver manualmente y comparar los resultados con los del programa.

Ejemplo dos

La **ley de enfriamiento de Newton** establece que: *la rapidez de cambio de la temperatura de un cuerpo* $\boldsymbol{T_C}$ *en cualquier instante "$\boldsymbol{t}$" es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo* $\boldsymbol{T_C}$ *y del medio* $\boldsymbol{T_A}$.

Para empezar, se asigna nombres a las variables dependientes e independientes como las que se resaltan en negrita.

La rapidez de cambio de Temperatura en cualquier instante se representa como una razón de cambio de la forma $\frac{\Delta T_C}{\Delta t}$

La proporcionalidad directa a la diferencia de temperaturas del cuerpo y del ambiente se representa por $\propto (T_C - T_A)$

Se completa el modelo matemático de esta ley como:

$$\frac{\Delta T_C}{\Delta t} \propto (T_C - T_A) \rightarrow \frac{dT_C}{dl} = k\,(T_C - T_A)$$

En Modellus: Se ingresa el modelo matemático que representa la Ley de enfriamiento de Newton, en la ventana Modelo Matemático, en este caso se coloca el signo negativo a la constante "k" porque se trata de disminución de temperatura.

Cuando se requiere escribir un comentario en la pantalla Modelo Matemático, se lo puede hacer pulsando el ícono de comentario (señalado en el cuadrado rojo), a continuación se pulsa el botón interpretar (señalado en el cuadrado amarillo), y si el modelo se ha ingresado correctamente aparece un visto en verde con la frase modelo correcto, caso contrario Modellus indica en letras rojas que el modelo ingresado está incorrecto.

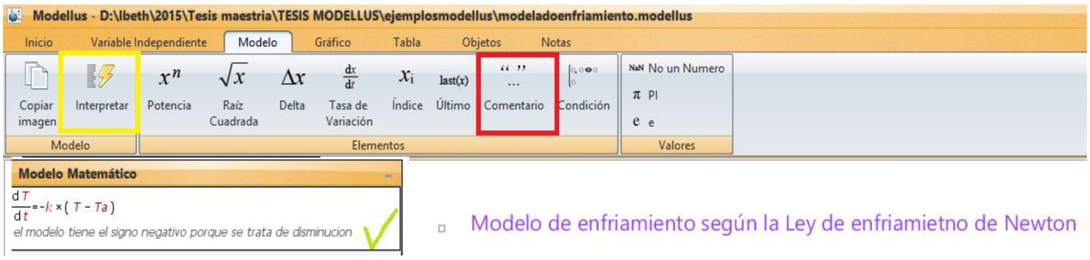


Figura 10-5. Ícono de comentario
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

En este ejemplo se mantienen constantes el parámetro **"k"** y la temperatura inicial, y se asignan diferentes valores a la temperatura ambiente. Se determina como variable independiente a **"t"** y se fija el período de análisis desde 0 a 60 minutos en pasos de un minuto para los cálculos mostrados. Se puede visualizar en la pantalla de Gráfico la Temperatura después de transcurrido un tiempo determinado "t".

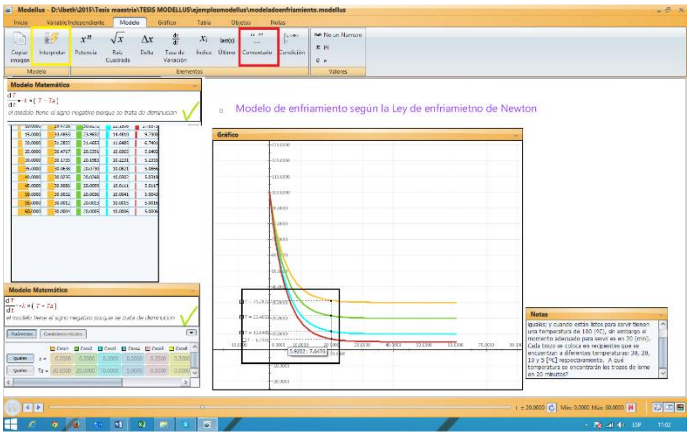


Figura 11-5. Modelamiento del enfriamiento de un cuerpo
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Los resultados de Temperatura para el instante **"t"** se pueden visualizar en la ventana Gráfico, en la ventana Tabla de valores; y además se puede manipular la línea de corrida del tiempo que se encuentra en la parte inferior de acuerdo a los requerimientos del ejercicio.

Ejemplo tres:

El modelo matemático del **vaciado de tanques** se puede describir como: "*La rapidez con que varía el volumen de líquido en el tanque V(t) es proporcional a la velocidad con la* *que sale el líquido y al área del orificio del tanque".* Este proceso simbólicamente se puede representar como:

$$\frac{\Delta V(t)}{\Delta t} \propto velocidad\ del\ líquido * Area\ del\ orificio\ en\ el\ fondo\ del\ tanque$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = -velocidad * Area;\ \ ecuación\ diferencial\ ordinaria\ de\ primer\ orden$$

En Modellus se procede a ingresar la ecuación diferencial ordinaria de primer orden, se especifican los valores de velocidad y área del agujero del fondo del tanque, en este caso se mantiene constante el radio del agujero y se dan diferentes valores a la velocidad de salida del líquido del tanque; se ingresa el estado inicial del volumen del tanque V(0) se interpreta correctamente el modelo.

Finalmente se espera determinar el tiempo en que el tanque esta a medio llenar o totalmente vacío.

Los pasos son los mismos que en los ejemplos anteriores, adicionalmente se muestran los títulos con la opción de texto. Esta opción aparece en la opción Objetos con el ícono de texto (señalado en cuadrado amarillo) o también se puede pulsar el botón derecho del mouse como se muestra a continuación.

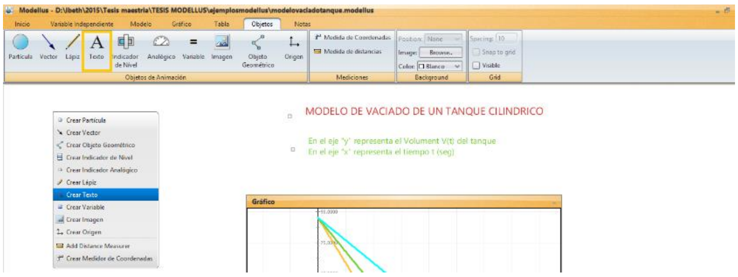


Figura 12-5. Opción de texto en el menú
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Se activa esta opción de texto y aparece un submenú con diferentes opciones que permiten escoger el tipo de letra, el tamaño, el color, ubicación dentro de la pantalla, y por supuesto el ícono para editar el texto, se pulsa aplicar y el texto está listo en la pantalla de Modellus.

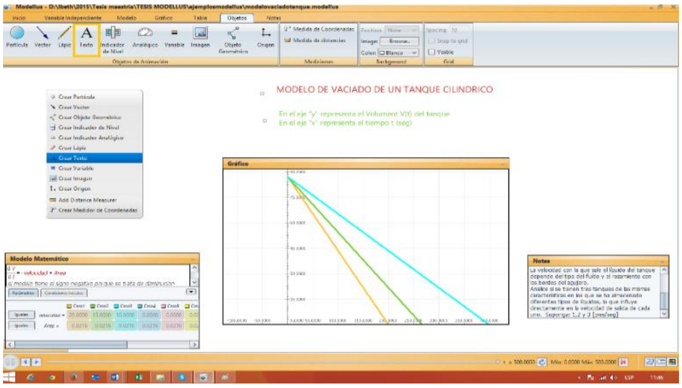


Figura 13-5. Opción de texto en la pantalla
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Tarea tema uno

Modelar matemáticamente:

El comportamiento de la corriente en un circuito serie RL; el comportamiento de la corriente en un circuito serie RC; y la cantidad de soluto que se mezcla constantemente en una mezcladora

5.1.6.2 *Tema dos: Curvas solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria*

a- Familia de Curvas Solución de una Ecuación Diferencial

En la ventana Modelo Matemático del Modellus se pueden ingresar ya sea el modelo matemático de un fenómeno físico o proceso; o también se puede ingresar directamente la expresión de una familia de curvas uniparamétrica; en el primer caso es muy importante conocer los valores de las condiciones iniciales para graficar una a una las soluciones particulares que dan una idea del comportamiento general de las soluciones de las EDO.

En el segundo caso se debe tener cuidado en determinar correctamente el dominio de la función a graficarse, pues de lo contrario se produce una indeterminación que Modellus no minimiza y genera un error.

En este tema más que una aplicación a situaciones prácticas se usa Modellus como un programa para ingresar la EDO y sin necesidad de resolverla generar las curvas y compararlas con las obtenidas en forma manual durante la clase.

Ejemplo uno:

Se quiere generar la familia de curvas de la EDO $\frac{dy}{dx} + y = 0$

Como se describió en los ejemplos anteriores, se puede escribir la EDO como modelo matemático en la ventana del mismo nombre, se debe tener en cuenta que si un modelo matemático o ecuación diferencial ordinaria está expresada en función de la variable **"x"**, se debe hacer el respectivo cambio de la variable para ingresarla en Modellus; es decir la variable independiente aceptada por el Modellus es "**t**".

Entonces si por ejemplo se tiene una EDO **dy/dx=-y,** se debe ingresar como **dy/dt=-y**, se debe notar que la familia de curvas solución de esta ecuación se genera en los reales positivos condición importante para especificar adecuadamente el tiempo de análisis.

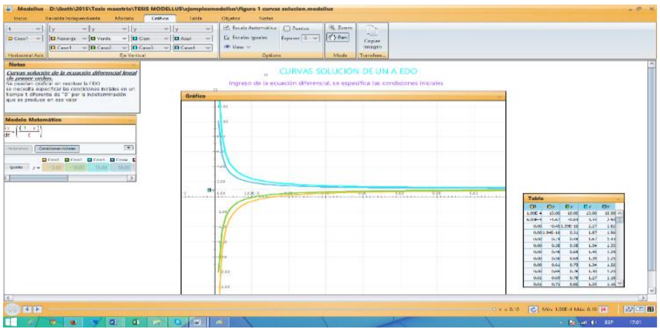


Figura 14-5. Curvas solución de la EDO
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Ejemplo dos:

Se quiere generar las curvas a partir de la expresión de la familia uniparamétrica, Modellus permite graficarlas fácilmente si la familia de curvas está expresada en forma explícita, dando diferentes valores al parámetro "C" en la opción de los diferentes casos que presenta el programa para los parámetros. Por ejemplo se quiere generar la familia de curvas expresada como $\boldsymbol{y} = \left(\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{4}} + \boldsymbol{C}\right)^{\boldsymbol{2}}$

En la pantalla Modelo Matemático de Modellus se ingresa la expresión de la función solución, haciendo el respectivo cambio de "x" por "t"; la opción de condiciones iniciales en este caso no se activa, solamente aquella de parámetros; en la cual se pueden dar diferentes valores para poder visualizar las diferentes curvas en la pantalla de Gráfico.

Se especifica el rango de análisis de la función en este caso si tiene sentido especificar un intervalo que puede ir desde [-a,b] donde a y b son reales, y el paso de cálculo depende de que tan rápido se grafique la curva.

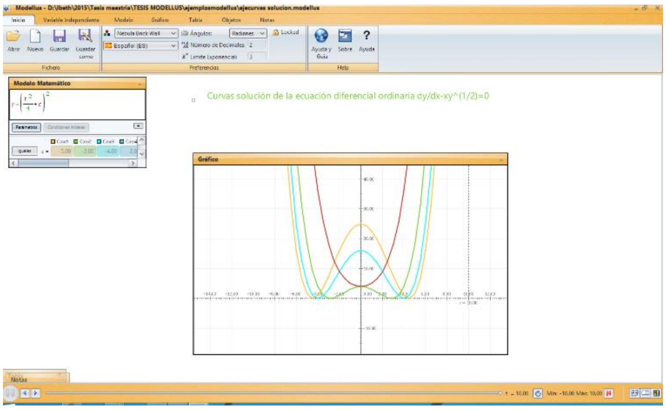


Figura 15-5. Curvas solución de la EDO
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

b- Problema de Valor Inicial (PVI)

El ingreso de la EDO en la ventana Modelo Matemático de Modellus requiere del ingreso obligatorio de las condiciones iniciales que en teoría se las conoce como Problema del

Valor Inicial (PVI), que significa encontrar la curva solución específica de una ecuación diferencial ordinaria para una condición dada inicialmente.

Las condiciones iniciales son muy importantes en Modellus, pues si no se han especificado claramente es imposible graficar u obtener la solución de una EDO.

Una condición inicial es una restricción de la solución general de la ecuación diferencial, y se interpreta como: *" para el valor de "t_0" la variable dependiente toma el valor de $y(t_0)=y_0$ "* generalmente se especifica la condición inicial como $y(t=0)=y_0$; pero no es una regla porque las condiciones iniciales no necesariamente se especifican en t=0.

Ejemplo uno:

La solución ***x(t)*** de la EDO de segundo orden $\mathbf{x''(t) + 16x(t)} = 0$ representa la posición de un cuerpo en cualquier instante **"t",** en este caso el PVI significa resolver esta ecuación restringiéndola a dos condiciones iniciales: la primera corresponde a la posición del cuerpo en el instante "t_0" (tiempo inicial) y la segunda corresponde a la velocidad del cuerpo en ese mismo instante "t_0", esas condiciones son las siguientes:

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2;\ \ x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Se puede interpretar que la posición del cuerpo en el instante de tiempo $t = \frac{\pi}{2}[s]$ es x= -2 [m], y en ese mismo instante el cuerpo tiene una velocidad de x'=1[m/s].

El Modellus no permite ingresar modelos matemáticos de orden mayor a uno, por lo que es necesario transformar la EDO de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Así la ecuación diferencial :

$\mathbf{x}''(\mathbf{t}) + \mathbf{16x}(\mathbf{t}) = 0$

se puede expresar de la siguiente manera:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = v \rightarrow x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \rightarrow reemplazando\ en\ x'' + 16\,x = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + 16x = 0; \quad y \quad \frac{dx}{dt} = v$$

Por lo que en Modellus se ingresan las dos ecuaciones siguientes

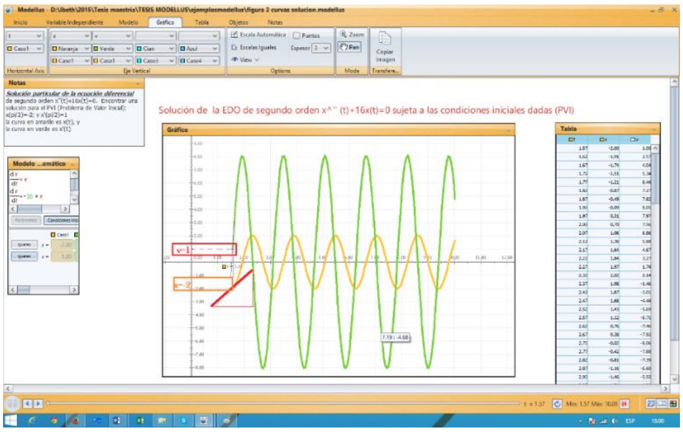


Figura 16-5. PVI de la ecuación diferencial
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

El gráfico de Modellus nos permite visualizar la curva posición (amarillo) y la curva velocidad (verde), también permite graficar las tangentes en cada punto de las curvas por lo que claramente se puede visualizar que en el punto inicial $t = \frac{\pi}{2}\,[s]$la pendiente de la tangente a la curva es 1 y ese mismo valor tiene la curva verde que representa la velocidad en ese instante.

Tarea tema dos:

Las gráficas de familia de curvas tienen muchas aplicaciones, entre ellas se pueden citar:

- Las curvas equipotenciales se usan para el estudio del comportamiento de las descargas eléctricas y el diseño de protecciones eléctricas, como se puede observar en la figura.

Figura 17-5. Aplicación de familia de curvas
Fuente: http://blogs.eldiariomontanes.es/meteorologia-pararrayos/

- Cómo se puede visualizar el campo magnético en un experimento sencillo con dos imanes?

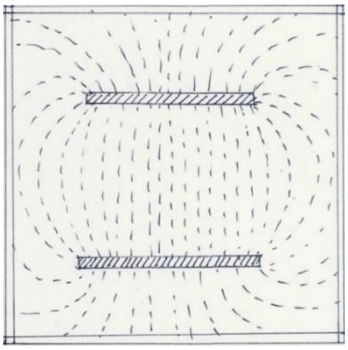


Figura 18-5 Líneas de flujo del campo magnético
Fuente: https://www.google.com/search?q=superficies+equipotenciales

- Generar las curvas solución de $\frac{dx}{dt} = sen(x)$ comparar con las curvas de los apuntes de clase

5.1.6.3 *Tema Tres: Métodos de Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*

Variables separables y reducibles a variables separables

Varios modelos matemáticos básicos se representan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden ser resueltas por el **método de Variables Separables**. En muchos casos, un mismo modelo puede representar a algunos procesos o fenómenos como el modelo:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}} \propto \boldsymbol{kP}(\boldsymbol{t})$$

Se utiliza para describir algunos procesos como:

Crecimiento de Bacterias: El modelo básico poblacional que considera que *la rapidez con que crece una población es directamente proporcional a la población actual,* se representa como la ecuación (1):

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$

Ejemplo uno:

Se tienen cuatro clases de yogurt, y de cada clase se toman cinco ejemplares, se los coloca en recipientes diferentes para cada especie; la diferencia en la razón de crecimiento o reproducción que tiene cada especie determina la clase. Se quiere determinar cuál será la cantidad de gusanos de yogur que se obtendrá después de 5 días, en iguales condiciones físicas.

En Modellus se ha creado un ambiente donde se experimenta con cuatro clases de yogurt, el modelo de crecimiento es igual en todos los casos, siendo **k** diferente para cada especie. Así se tiene:

En la ventana Modelo Matemático se ingresan las ecuaciones diferenciales para cada uno de los casos, se utilizan diferentes ecuaciones para realizar la simulación de manera independiente con cada clase de yogurt; así mismo se ingresa de forma individual las condiciones iniciales y el valor de los parámetros.

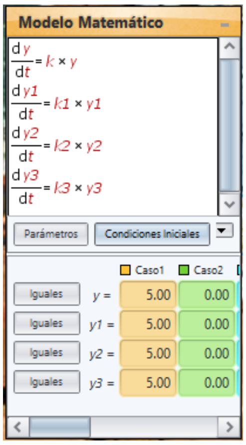


Figura 19-5. Ecuaciones diferenciales y condiciones iniciales
Realizado por: Ibeth Delgado M 2014
Fuente: Modellus

Modellus permite visualizar, además de la gráfica de la solución de las EDO, una simulación adaptada a las condiciones del ejercicio. En este caso se utiliza el submenú Objetos, en donde se escoge la opción para insertar una imagen de fondo que depende de los requerimientos del ejercicio; esta imagen debe estar archivada con las extensiones jpg o png en alguna carpeta específica.

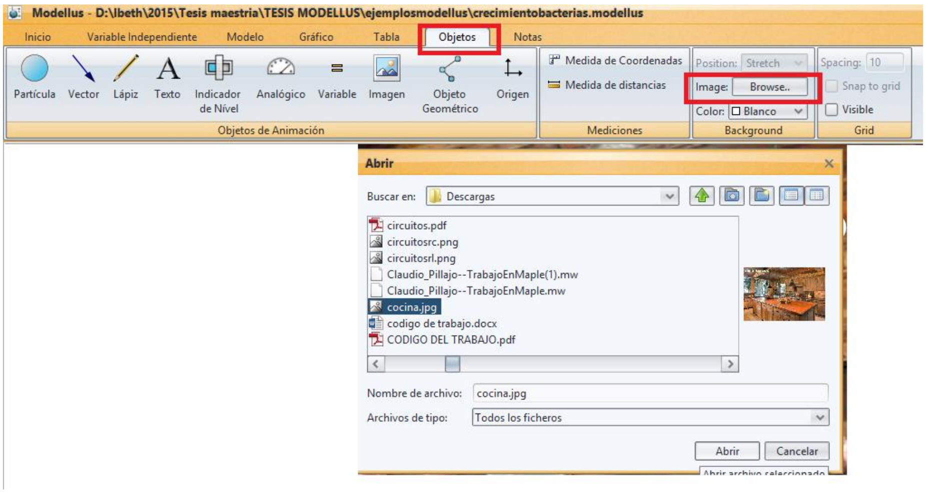


Figura 20-5 Adaptación de la imagen de fondo
Realizado por: Ibeth Delgado M 2014
Fuente: Modellus

Después de haber diseñando el ambiente, en la misma opción de Objetos se pulsa el ícono de partícula o se pulsa el botón derecho del mouse en el sitio donde se quiera insertar la partícula; y la partícula queda insertada, luego se procede a personalizar la partícula.

Existen algunas opciones de formas de partículas dentro de Modellus; y además se pueden crear otras con una imagen personalizada; todas las imágenes creadas deben estar guardadas en una carpeta específica y se puede acceder a ellas mediante el ícono Choose image from disk… que se encuentra en la parte inferior de la ventana como se muestra en la figura siguiente.

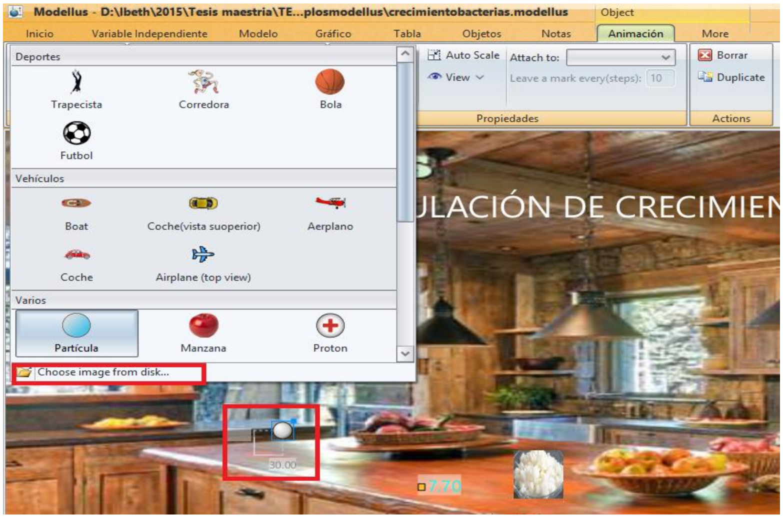


Figura 21-5. Selección de objetos para la simulación
Realizado por: Ibeth Delgado M
Fuente: Modellus

Se escoge la imagen requerida como se muestra en la siguiente figura.

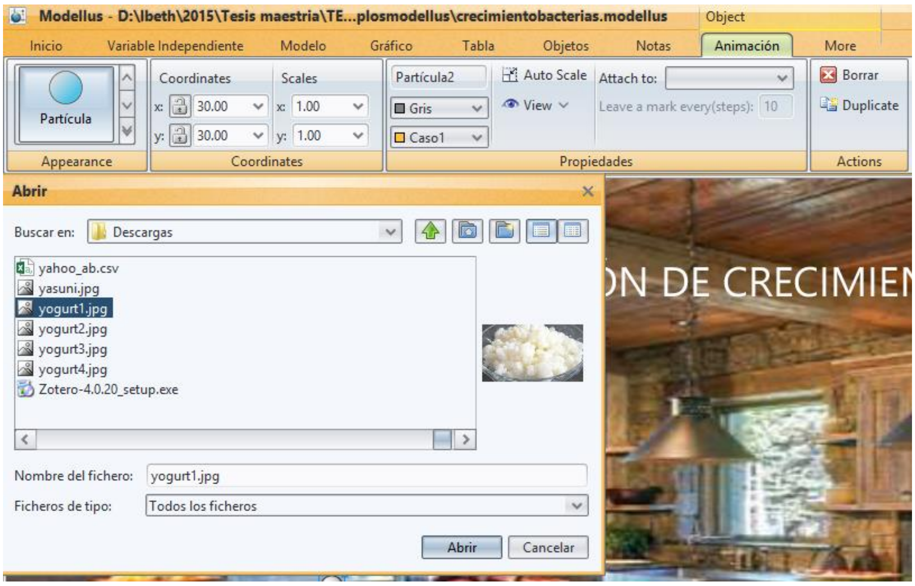


Figura 22-5. Adaptación de objetos a simular
Realizado por: Ibeth Delgado M 2014
Fuente: Modellus

Se inserta la imagen escogida; ésta aparece con el contorno resaltado y con flechas que permiten adaptar el tamaño haciéndolo más pequeño o más grande según se necesite; a esta imagen se le asignan las variables que van a determinar su comportamiento para la simulación.

Puesto que se quiere simular el crecimiento de la población de bacterias de yogurt, se asigna en la coordenada “y” la variable “y”, en la coordenada “x” se especifica la coordenada de posición de la imagen en el eje “x”. Las escalas, el nombre, el color y el caso se escogen de acuerdo a los requerimientos del ejercicio. El mismo procedimiento se realiza para cada una de las especies de yogurt.

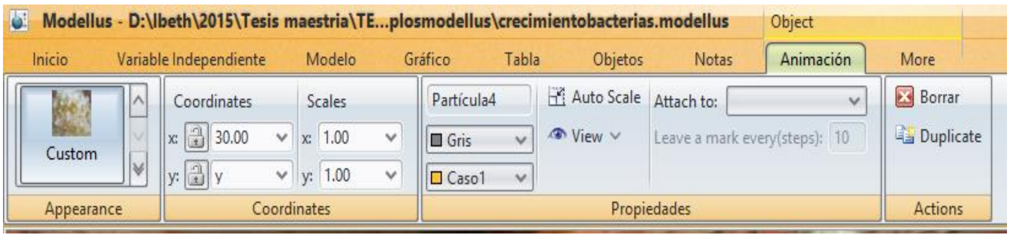


Figura 23-5. Selección de coordenadas y escalas del objeto
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Con las condiciones especificadas en los temas uno y dos se procede a correr Modellus; los resultados pueden visualizarse en la ventana Gráfico, en la ventana Tabla y ahora en la pantalla principal la simulación del crecimiento poblacional para yogurt.

Se mantiene la ventaja de manipular la línea del tiempo para revisar el comportamiento de cada proceso en el instante que se desee. En al figura siguiente se visualiza el ejercicio completo.

Figura 24-5. Simulación del crecimiento de bacterias
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Este modelo es adecuado para pequeños grupos de poblaciones en los que se considera la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad como constantes; donde **k** es la constante de proporcionalidad es positiva cuando se trata de un proceso de crecimiento y es negativa cuando se trata de un proceso de disminución o decrecimiento. Por lo que este mismo modelo sirve para representar el proceso de:

Desintegración radiactiva: *Se considera una muestra de material que contiene A(t) átomos de algún isótopo radiactivo en un instante "t"; se tiene información de que una cantidad constante de esos átomos radiactivos se descomponen espontáneamente en otros isótopos en un intervalo de tiempo;* este proceso es semejante al del crecimiento poblacional, con la diferencia de que el número inicial de átomos A(t) va disminuyendo por la desintegración; de tal forma que se puede simbolizar y representar como:

$$\frac{\Delta A(t)}{\Delta t} \propto A(t) \rightarrow \frac{dA(t)}{dt} = -kA(t)$$

Este modelo también se utiliza para describir la rapidez con la que se elimina un medicamento del torrente sanguíneo; para realizar el fechado basado en la cantidad de carbono 14 en los restos fósiles, etc

Ejemplo dos

Estudios científicos han detectado la desintegración de tres estrellas de estudio W1, W2 y W3. la rapidez de desintegración está dada por: 0.08, 0.04 y 0.02 [ton/año]. Cuál de las tres estrellas se desintegrará más rápido? Qué tiempo les llevará la desintegración total?

Ya que el modelo matemático de la desintegración radiactiva es el mismo que el de crecimiento poblacional, el ingreso de las ecuaciones diferenciales que representan dicha desintegración es similar al ejemplo anterior. Los cambios que se han realizado son las adaptaciones de las imágenes al problema planteado.

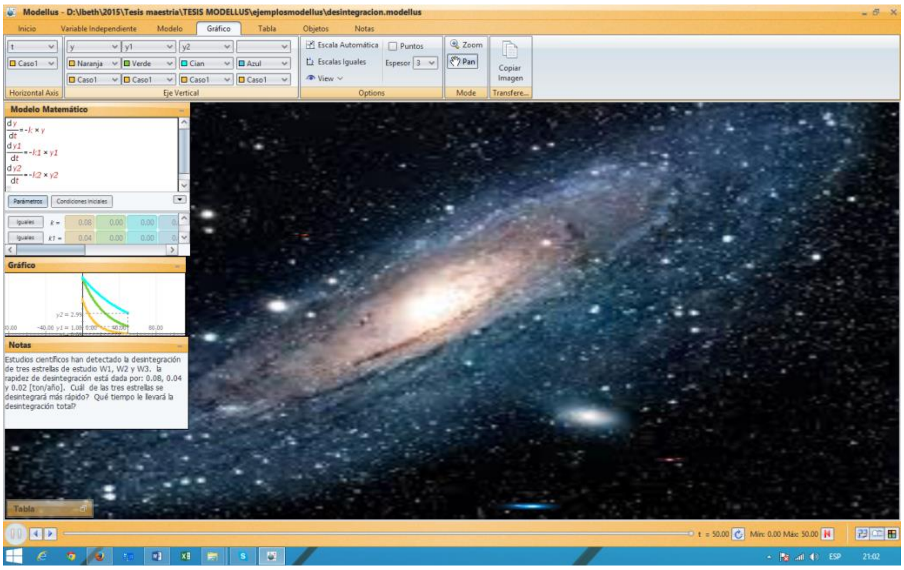


Figura 25-5. Simulación de la desintegración de estrellas
Realizado por: Ibeth Delgado M.2014
Fuente: Modellus

Mediante la simulación se puede observar la disminución en tamaño de las estrellas y una de ellas aparentemente desaparece.

Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton: El modelo matemático que representa esta ley es:

$$\frac{dT_C(t)}{dt} = -k(T_C(t) - T_A)$$

Lleva el signo menos porque se describe un proceso de enfriamiento o disminución de temperatura.

Ejemplo tres

Los diamantes son compuestos químicos que han sido convertidos en piedras cristalinas gracias a factores como la presión, el tiempo y por supuesto la temperatura. Las diferentes clases de piedras preciosas se originan por las diferentes condiciones físicas de formación.

Se tienen dos piedras preciosas una amatista cuya temperatura inicial es de 100°C y una esmeralda cuya temperatura inicial es de 20°C las dos tienen una rapidez de enfriamiento y calentamiento respectivamente de 0.2 [ºC/año]. En cuánto tiempo las dos piedras preciosas tendrán la misma temperatura?

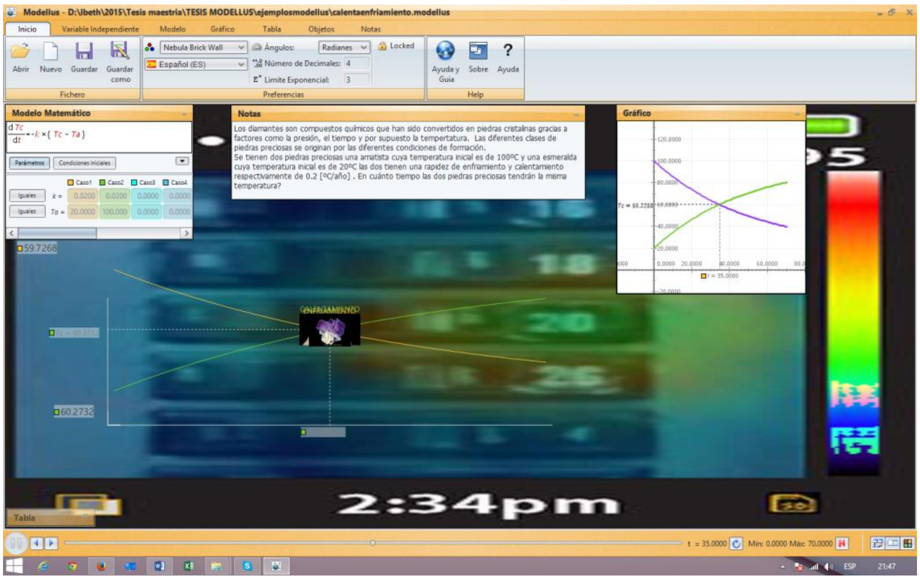


Figura 26-5. Simulación del calentamiento enfriamiento de un cuerpo
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Modellus nos permite detectar que las temperaturas de estas piedras preciosas analizadas en el laboratorio es igual después de 35 minutos y la temperatura es de 60.2 [ºC]

Vaciado de Tanques las EDO que representan el vaciado de un tanque también pueden ser resueltas por el método de Variables Separables.

Si se tiene un tanque cilíndrico, con un orificio en el fondo de área **Aor** por el cual sale agua; se designa como **h(t)** a la profundidad del agua en cualquier instante **"t"** y **V(t)** al volumen del tanque en ese instante **"t".**

Se puede determinar la rapidez con la que disminuye la altura **h(t)** del agua en el tanque partiendo de la conservación de energía para una partícula que está a una altura **h(t)** y que cae por efecto de la gravedad aplicando una relación semejante a la caída de una gota de agua desde un punto 1 a la altura h(t) hasta un punto 2 donde la altura es h(t)=0, y se tiene:

$$\text{Energía Potencial}_1 = \text{Energía Cinética}_2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \ \ ; \ \ de\ donde\ la\ velocidad\ v = \sqrt{2gh}\left[\frac{pies}{seg}\right]$$

La rapidez con que varía el volumen de líquido en el tanque V(t) es proporcional a la velocidad con la que sale el líquido y al área del orificio del tanque, simbólicamente*:*

$$\boxed{\frac{\Delta V(t)}{\Delta t} \propto velocidad\ del\ líquido * Area\ del\ orificio\ en\ el\ fondo\ del\ tanque}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = velocidad * Area; \ \ \frac{dV(t)}{dt} = -k\sqrt{2gh}\left[\frac{pies}{seg}\right] * A_{or}; \quad \boxed{1}$$

Donde k es una constante que depende del rozamiento del líquido con el borde del orificio y es negativa porque se trata de disminución de volumen.

La variación de volumen de agua que sale también se puede calcular como el Volumen del espacio que queda en el tanque mediante:

$$V(t) = A_{sección} * h(t)$$

Calculando la variación de este volumen con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A_{sección} * \frac{dh(t)}{dt}; \qquad \boxed{2}$$

Dividiendo $\boxed{1}/\boxed{2}$ se tiene:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \sqrt{2gh}\left[\frac{pies}{seg}\right] * \frac{A_{or}}{A_{sección}}$$

$A_{sección}$: es el área de un tanque que puede ser circular, cúbico, etc.

Y de acuerdo a la forma de los tanques se tienen entre otras las siguientes expresiones:

Tanque cilíndrico circular recto:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -k\sqrt{2g}h^{\frac{1}{2}}\left[\frac{pies}{seg}\right] * \frac{A_{or}}{\pi R^2}\ ; R = radio\ del\ cilindro$$

Tanque cónico recto:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -k\sqrt{2g}h^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{pies}{seg}\right] * \frac{A_{or}}{\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2}\ ; R = radio\ del\ cono\ ; H = altura\ del\ cono$$

Tanque esférico:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -k\sqrt{2g}h^{\frac{1}{2}}\left[\frac{pies}{seg}\right] * \frac{A_{or}}{\pi h(2R-h)}\ ; R = radio\ de\ la\ esfera$$

Tanque semiesférico:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -k\sqrt{2g}h^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{pies}{seg}\right] * \frac{A_{or}}{\pi(2R-h)}\ ; R = radio\ de\ la\ semiesfera$$

Tanque cúbico:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -k\sqrt{2g}h^{\frac{1}{2}}\left[\frac{pies}{seg}\right] * \frac{A_{or}}{L_1 L_2}\ ; L_1 L_2 = longitud * ancho$$

Ejemplo cuatro

Se desea verificar cuál es la forma del tanque de almacenamiento de agua que permite un vaciado más rápido; suponiendo que se tiene un volumen inicial de 1000 [$pies^3$]. Las dimensiones de los tanques de diferentes formas son (pies):

Tanque cilíndrico: hc=12, Rc=5.15; t=?

Tanque cónico: Hco = hco=12, Rco=8.92; t=?

Tanque en forma de caja: hca=12, L1=8; L2=10.41; t=?

Tanque esférico: hes=12, Res=6.20; t=?

Radio del agujero del fondo 1[pul] k=1

En Modellus se ingresan las EDO de acuerdo a las formas de los tanques y se adapta el ambiente para simular el drenaje del líquido.

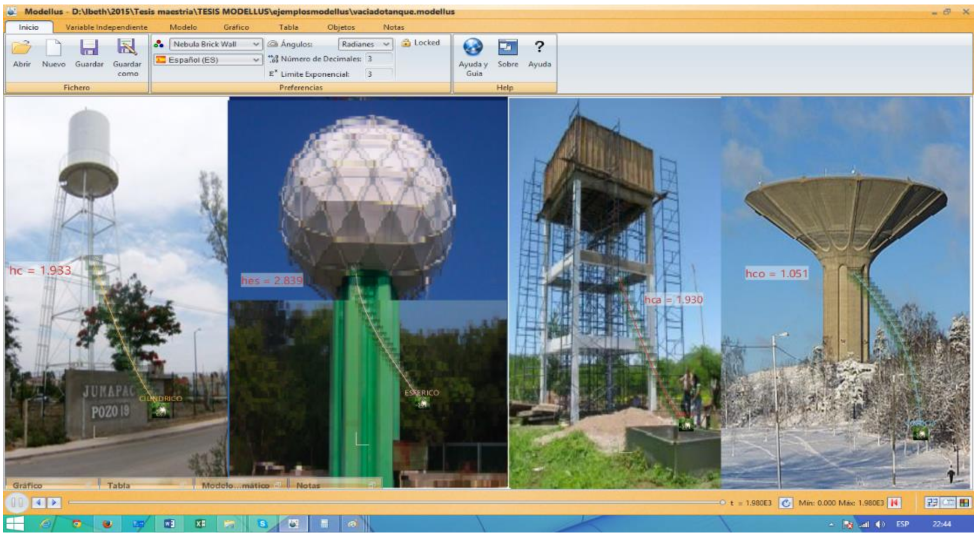


Figura 27-5. Simulación del drenado de tanques
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Se puede observar que para un mismo volumen de agua la forma de tanque que permite un vaciado más rápido es el de forma cónica.

Tarea tema Variables Separables

Investigar la ecuacion diferencial que modela el crecimiento poblacional considerando las tasas de natalidad y mortandad asi como la emigración e inmigración.

Comparar los resultados obtenidos mediante cálculos manuales con los de Modellus

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Un grupo de personas se encuentra en la orilla de un río y desean entregar medicinas en un punto justo al frente en la orilla opuesta; un delegado del grupo debe cruzar el río para entregar los medicamentos. Se sabe que la velocidad con que fluye el río en la parte central es mayor que la de las orillas del río. Esta condición influye en la trayectoria del pasajero para llegar al otro lado del río. Se desea saber que velocidad debe tener el bote en el que viaja la persona para llegar lo más cerca posible del punto objetivo. Las aguas fluyen en dirección Sur – Norte y el río tiene un ancho total 2a.

El problema se adapta al sistema de coordenadas "xy" en donde las rectas x=±a representan las orillas del río, el eje "y" representa el centro del río, se designa v_R a la velocidad con la que fluye el río la cual aumenta en magnitud en la parte central y se expresa como:

$$v_R = v_0(1 - \frac{x^2}{a^2})$$

Donde:

v_R *es la velocidad del río dependiente de la distancia* (x) *desde el centro hacia las orillas*
v_0 *es la velocidad máxima del río, en el centro del mismo* $(x = 0)$

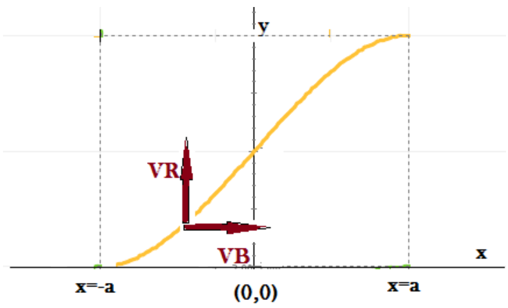


Figura 28-5. Diagrama de la trayectoria para el cruce de un río
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Se supone que una persona está en la orilla izquierda del río (-a,0) y desea cruzar el río para llegar a la orilla derecha con una velocidad constante v_B con dirección hacia la derecha.

Otra persona desde la orilla observa que la velocidad que lleva la persona que cruza el río tiene dos componentes. La primera es la velocidad de la persona y la otra es la velocidad del río, por lo que su trayectoria tiene un ángulo de desviación dado por:

$$\tan(\alpha) = \frac{v_R}{v_B} \ y\ como\ \tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} \rightarrow \ \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{v_B}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\ EDO\ homogénea}$$

Esta última ecuación diferencial representa la trayectoria de la persona con una velocidad $\mathbf{v_C}$ que cruza el río cuyo torrente fluye a una velocidad $\mathbf{v_R}$

Ejemplo uno:

El río que se pretende cruzar fluye en sentido sur - norte, la velocidad aproximada es de **v_R=9[millas/hora]** en la mitad del río. La persona que pretende cruzar el rio en bote puede fijar la velocidad en **v_B=3, 6 y 9 [millas/hora].** Que relación deben tener la velocidad del bote respecto de la del río para cruzarlo con la mínima desviación desde el punto de partida?

En Modellus, al igual que en los ejemplos anteriores se requiere el ingreso del modelo matemático correspondiente, se fijan los valores de los parámetros: la velocidad del río se asume la misma para todos los casos al igual que el ancho del río. Se dan valores diferentes a la velocidad del bote a la que la persona cruza el río. Para la simulación de los botes se escoje en objetos, Partícula, la opción que corresponde a la imagen del bote que está dentro de las imágenes propias del Modellus. Las posiciones iniciales se asumen diferentes para visualizar simultáneamente el recorrido de todos los botes.

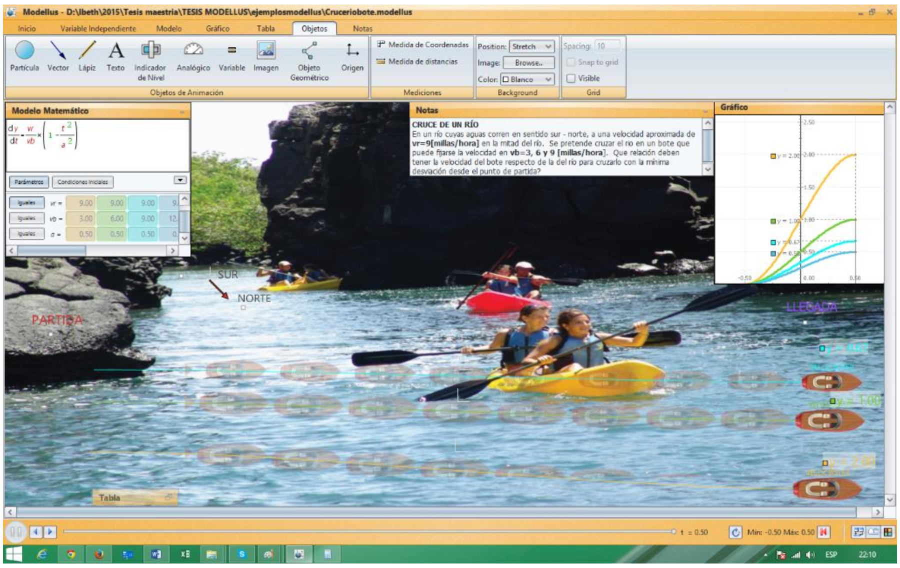


Figura 29-5. Simulación del cruce de un río
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Cuanto mayor es la velocidad del bote menor es la desviación de la trayectoria de cruce.

Tarea tema EDO homogéneas

Utilizando el metodo de solución de EDO homogeneas se puede resolver la ecuacion diferencial que describe como modelo matematico el ejemplo de un avion que desea aterrizar en un determinado punto, sin embargo debido a la influencia del viento la trayectoria rectilinea se ve afectada.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias De Primer Orden

Se aplican al modelo matemático que representan el comportamiento de la corriente en Cicuitos Eléctricos, la cantidad de soluto en mezclas entre otros. Este modelo se dedujo en la clase del tema uno.

Ejemplo uno

Se tiene un circuito serie formado por un foco incandescente (100 [W] ; R=6.25[ohmios]), una bobina de inductancia variable: L= 1, 0.5, 0.25 y 0.1 [H], conectados a una fuente de voltaje DC = 25[V].

Qué valor de la inductancia de la bobina hace que la intensidad alcance el valor de 4[A] en un tiempo más corto? Considere que la corriente en el instante t=0 es también cero (i(0)=0 [A].

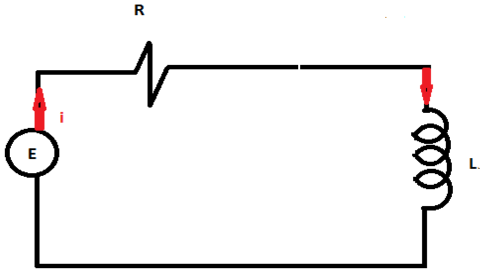


Figura 30-5. Diagrama de un Circuito serie RL
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014

Sea el circuito serie **RL** conectado a una fuente de voltaje **E(t)**, aplicando las leyes de Kirchhoff para voltajes y la ley de Ohm se tiene:

$$E = VR + VL; \;\; E = Ri(t) + \frac{Ldi(t)}{dt} \;\; \rightarrow$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E}{L} \;\; EDO \; lineal \; de \; primer \; orden$$

En Modellus: después ingresar el modelo matemático de la corriente; los parámetros E, R y L; la condición inicial de la corriente en la ventana Modelo Matemático, en la ventana Gráfico se selecciona la variable i para ser graficada para cada caso, lo mismo en la ventan Tabla; Finalmente se coloca como imagen de fondo una imagen prediseñada con elementos relacionados al circuito serie RL.

El ejercicio pide analizar el transitorio de la corriente para cada valor de la bobina, para esto se utiliza la animación con una partícula que simula el movimiento de los electrones a través del cable. Esta partícula tiene la forma de un electrón que se ha fijado con una imagen prediseñada como:

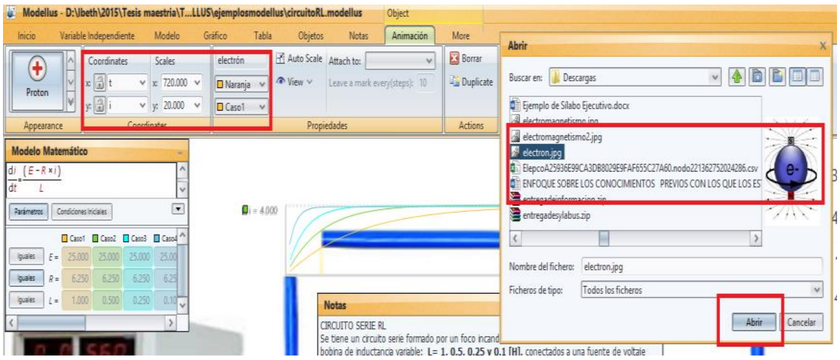


Figura 31-5. Adaptación del objeto electrón
Realizado por: Ibeth Delgado M 2014
Fuente: Modellus

Al correr el ejemplo en Modellus se puede notar la influencia de los valores de la bobina en el comportamiento transitorio de la corriente, se puede contrastar en el gráfico, en la tabla de valores y por supuesto en la simulación.

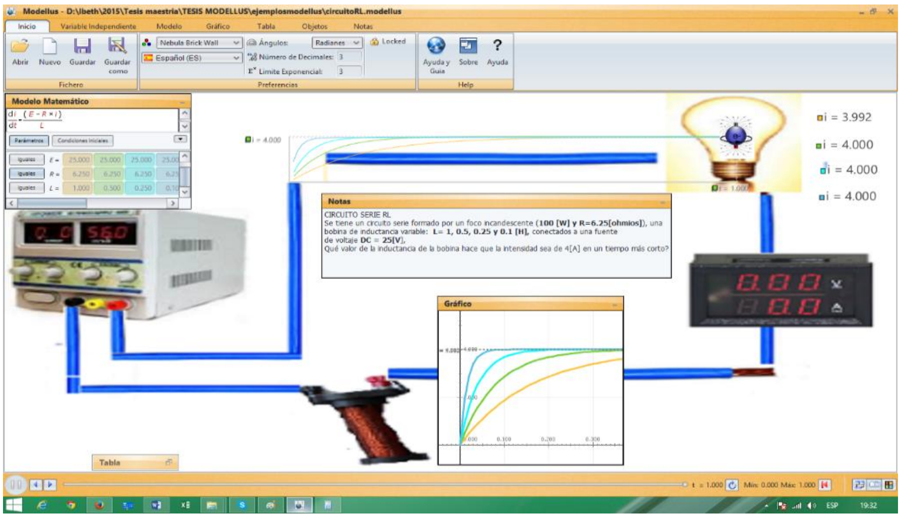


Figura 32-5 Simulación de la corriente de un circuito RL
Realizado por: Ibeth Delgado M 2014
Fuente: Modellus

La conclusión del ejercicio es que con un valor pequeño de la inductancia de la bobina la corriente alcanza más rápidamente el valor estable de la corriente que en este caso es de 4[A]

Ejemplo dos

El circuito está formado por una fuente de voltaje DC=50[V], una resistencia de R= 25[ohmios](foco incandescente) y un capacitor de capacitancia variable C=0.5; 0.25;0.1 y 0.05 [F]. El capacitor tiene una carga inicial q= 0[Coulombios]. Cómo influye la capacidad del capacitor en la corriente del circuito? Qué pasa si el capacitor está cargado inicialmente? La corriente en el instante t=0 es 0[A] para el primer caso la carga inicial del capacitor también es 0[C] (i (0) =0=q (0))

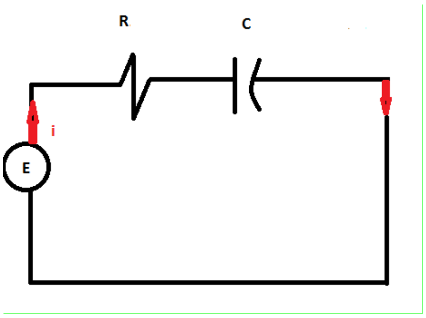


Figura 33-5. Circuito serie RC
Realizado por: Ibeth Delgado M 2014

Sea el circuito serie **RC** conectado a una fuente de voltaje **E(t),** aplicando las leyes de Kirchhoff para voltajes y la ley de Ohm se tiene:

$$E = VR + VC$$

$$E = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \quad \rightarrow E = R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \quad \rightarrow por\ i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{E}{R} \quad EDO\ lineal\ de\ primer\ orden}$$

En este ejemplo el modelo matemático está expresado en funciòn de la carga q(t), sin embargo se nos pide analizar el comportamiento de la corriente del circuito, por lo que es necesario ingresar además de la ecuación diferencial la expresión de la corriente en función de la carga como se puede observar a continuación:

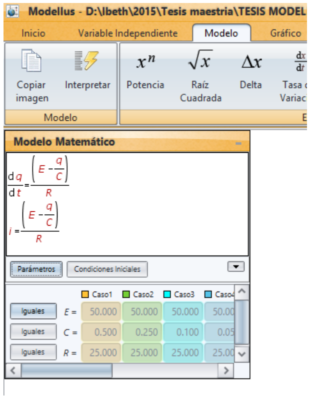


Figura 34-5. Modelación del circuito RC
Realizado por: Ibeth Delgado M 2014
Fuente: Modellus

Se asignan los diferentes valores de capacitancia del capacitor en el parámetro C, y de forma simular al ejemplo uno se utiliza una imagen prediseñanda que representa el movimiento de los electrones a través del cable del circuito. En este ejemplo se han insertado unos medidores analógicos de corriente en donde se puede visualizar el valor que toma la corriente para cada instante “t”.

Al correr Modellus se pueden visualizar el comportamiento de la corriente durante los primeros segundos en donde se representa el estado transitorio y el estado estable de la corriente. Se puede distinguir el efecto de la componente exponencial de la respuesta de la corriente durante el transitorio.

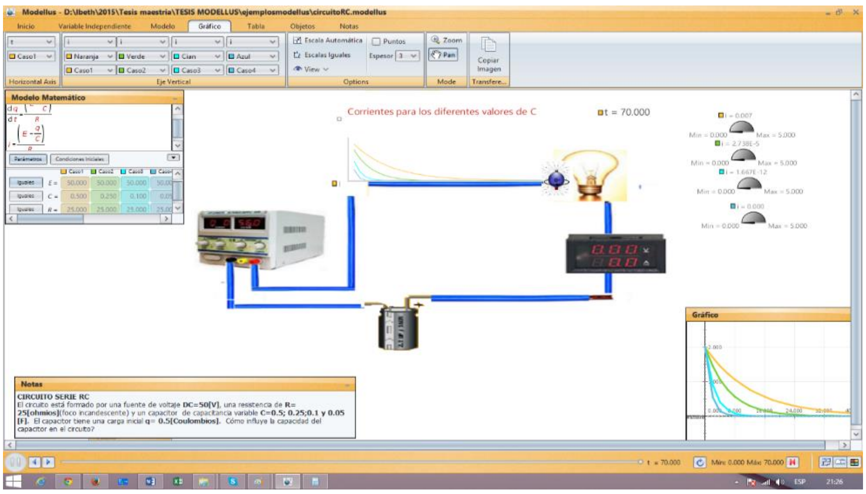


Figura 35-5. Simulación del circuito RC
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Para un valor mayor en la capacitancia del capacitor, la descarga del mismo es más lenta en un circuito serie conectado a una batería.

Tarea cinco

Analizar el comportamiento de la corriente si la carga inicial del capacitor es diferente de 0[C]

5.1.6.4 *Tema cuatro: Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden en la Geometría*

Trayectorias Ortogonales:

Para encontrar la familia de trayectorias ortogonales g(x, y, K)=0 a una familia de curvas uniparamétrica dada por f(x, y, C)=0 se parte de la condición de perpendicularidad de dos rectas tangentes a las respectivas curvas en cada punto de intersección de las dos familias. Se dispone de herramientas como la derivada en un punto y la solución de EDO por el método más conveniente según las características de las ecuaciones. El proceso para encontrar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas expresada en coordenadas rectangulares se resume en:

a- se encuentra la EDO de la familia uniparamétrica dada

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

b- Se escribe la EDO de la familia de curvas ortogonales como:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}$$

c- Se resuelve la EDO de la familia de curvas ortogonales

Modellus permite graficar las curvas ortogonales sin resolver las EDO de la familia de curvas dada de una manera muy sencilla.

Ejemplo uno

Se desea dibujar las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas dada por:
$y = ax^2$

a- se encuentra la EDO de la familia uniparamétrica dada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} = f(x,y)$$

b- Se escribe la EDO de la familia de curvas ortogonales como:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}; \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

En Modellus se ingresa las dos ecuaciones diferenciales se especifica las condiciones iniciales para t=0 y se visualiza las gráficas en cuyos puntos de intersección las tangentes a las curvas son perpendiculares. Se debe tener especial cuidado en el ingreso de las condiciones iniciales para x=0 en la parábola, pues es necesario colocar un valor que tiende a 0 pero no debe ser 0.

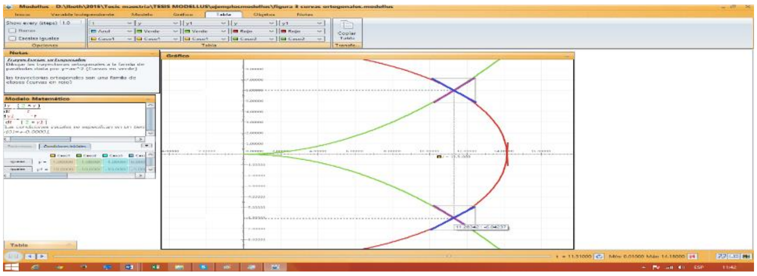


Figura 36-5. Curvas ortogonales
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Tarea tema cuatro

UNIDAD DOS: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR

5.1.6.5 *Tema cuatro: Aplicaciones de las EDO de segundo orden*

Las principales aplicaciones de las EDO de segundo orden son en física el movimiento vertical, movimiento parabólico con y sin efecto de la fuerza de rozamiento, sistemas mecánicos y circuitos eléctricos entre otros.

Ejemplo uno: Movimiento vertical

En un juego mecánico se lanzan cuatro bolas de colores con el objetivo de alcanzar el punto máximo situado a 1.25 [m]. Cada bola se lanza hacia arriba desde el mismo nivel inferior a diferentes velocidades. Estas velocidades son: 2, 3, 4 y 5 [m/s] respectivamente. Se desea conocer cuál es la altura máxima que alcanza cada una de ellas, el tiempo que les lleva tomar esa altura; y el tiempo en que vuelven a su posición inicial.

En Modellus se ingresa el modelo matemático correspondiente al lanzamiento vertical expresado por una EDO de segundo orden; e debe antes transformar la EDO de orden “n” a un sistema de “n” ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden siendo estas últimas las que se ingresan en la ventana Modelo Matemático; las posiciones iniciales en “y” que en este caso son cero, las diferentes velocidades iniciales de análisis y en parámetros se asigna el valor de la gravedad.

Se crea el ambiente y se insertan las partículas en forma de bolas de colores, en la coordenada **“y”** se coloca la variable **“y”** y en la escala se coloca 300 para hacer coincidir con el gráfico de fondo, se escoge el color, nombre y el caso. A la variable independiente **“t”** se le asigna un rango de 0 a 1 en pasos de 0.01 para hacer más lento el movimiento de las bolas.

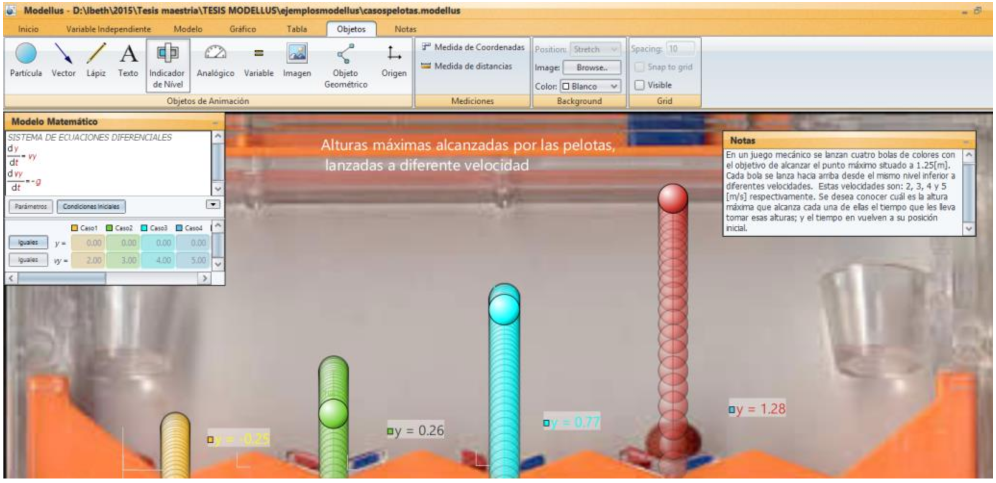


Figura 37.5 Simulación del movimiento vertical
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

En la línea de corrida de tiempo de la parte inferior puede manipularse para visualizar la altura máxima de cada bola, el tiempo que transcurre para que se de esta altura y el tiempo total de vuelo. Manipulando adecuadamente esta opción se puede analizar cada uno de los casos

Ejemplo dos: Movimiento Parabólico

Al movimiento vertical del ejemplo uno se le puede agregar una componente en el eje "x" como es el caso del desplazamiento con una velocidad constante en este eje. Al ejemplo uno se añade esta tercera ecuación diferencial. Con igual cuidado se especifican condiciones iniciales y parámetros.

Figura 38-5. Simulación del movimiento parabólico
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Se visualiza simultáneamente la diferencia en la forma de la trayectoria de acuerdo al ángulo que tiene la velocidad inicial de lanzamiento. Claramente se observa cuando se tiene la máxima altura, el máximo alcance, etc. La simulación es exactamente igual a los ejemplos anteriores donde las partículas son simplemente figuras escogidas de Modellus, se asigna a la coordenada **"x"** la variable **"x"** y a la coordenada **"y"** la variable **"y"**, es escogen adecuadamente colores, casos, nombres y escalas.

Ejemplo tres: Movimiento parabólico considerando el efecto del aire

Al ejemplo del movimiento parabólico se le ha añadido la influencia del aire, es decir se quiere visualizar la desaceleración que produce el aire al movimiento de la pelota tanto en el eje horizontal como en el eje vertical.

Suponga que una pelota de fútbol es lanzada desde el arco (posición $x_0 = 0,\ \ y_0 = 0$) con velocidad inicial $v_0 = 160\left[\frac{pies}{s}\right]$, con un ángulo inicial de inclinación de $\theta = 30°$.

Si se desprecia la resistencia del aire se determina que la distancia horizontal recorrida por la pelota es $400\sqrt{3\ [pies]}$ en un tiempo de 5 [s] aproximadamente justo antes de tocar el suelo. Ahora considere que además de la gravedad la pelota experimenta una desaceleración debida a la resistencia del aire dada por:

$$F_{rozamiento} = -\alpha v^2 = -(0.0025v)\frac{dx}{dt}\vec{\imath} - (0.0025v)\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}$$

Bajo están condiciones, determine qué tan lejos viajará horizontalmente la pelota de fútbol?

En el eje "x":

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}\ ;\ \rightarrow -\vec{F}_{ROZAM} = m\vec{a} \rightarrow -\alpha\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -(0.0025v)\frac{dx}{dt}}$$

En el eje "y":

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}\ ;\ \rightarrow -\vec{F}_{ROZAM} - \vec{w} = m\vec{a} \rightarrow -\alpha\frac{dy}{dt} - mg = m\frac{d^2y}{dt^2}\ \rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\alpha}{m}\frac{dy}{dt} - g; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -(0.0025v)\frac{dy}{dt} - g$$

Estas dos ecuaciones son las que se ingresan en la ventana de Modelo Matemático de Modellus, recordando que solo se puede representar ecuaciones diferenciales de primer orden; se ingresan los valores del parámetro **g** (gravedad 32 [pies/s^2]) y las condiciones iniciales $x_0 = 0,\ \ y_0 = 0\ ;\ \ v_{0x} = 138.56\left[\frac{\text{pies}}{\text{s}}\right]\ ;\ v_{0y} = 80\left[\frac{\text{pies}}{\text{s}}\right]$

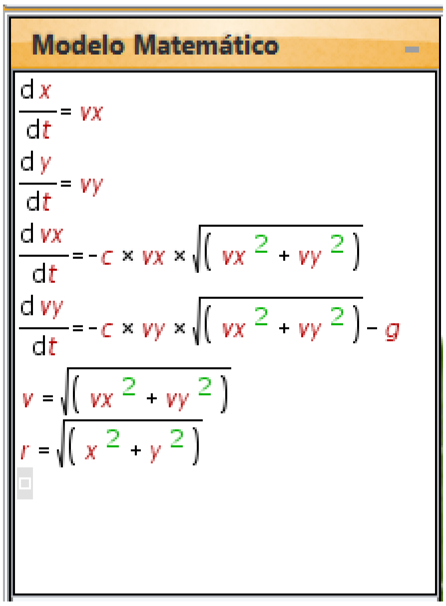


Figura 39-5.. Modelación del movimiento parabólico con resistencia del aire
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Figura 40-5 Simulación del movimiento parabólico
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Se observa claramente que la resistencia del aire hace que el alcance horizontal de la pelota sea mucho menor.

En general las ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden se aplican a cualquier tipo de movimiento vibratorio sinusoidal por ejemplo:

Vibraciones mecánicas – movimiento libre

Un ejemplo sencillo es el de una masa sujeta a un resorte común que resiste compresión y estiramiento, este sistema de resorte masa se representa mediante una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de la forma:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + Famort + Fres = Fext$$

$$mx'' + \alpha x' + kx = f(t);\ \ EDO\ \ 2^0\ \ orden\ no\ homogénea$$

Si $\boldsymbol{Fext = f(t) = 0\ \rightarrow MOVIMIENTO\ LIBRE}$

i) Si $\nexists\ amortiguamiento \propto = 0\ MOVIMIENTO\ NO\ AMORTIGUADO$

$$mx'' + kx = 0$$

ii) Si $\ni$ $amortiguamiento \propto > 0$ $MOVIMIENTO\ \ AMORTIGUADO$

$$mx'' + \alpha x' + kx = 0;\ \ \rightarrow D^2 + \frac{\alpha}{m}D + \frac{k}{m} = 0$$

$$r = \underbrace{-\frac{\alpha}{2m}}_{\gamma} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}}_{\beta}$$

a- Raíces reales y diferentes

$$\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m};\ \ qH(t) = C_1 e^{(\gamma+\beta)t} + \ \ C_2 e^{(\gamma-\beta)t}$$

Respuesta sobreamortiguada

b- Raíces reales y repetidas

$$\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m};\ \ \ q_H(t) = C_1 e^{\gamma t} + tC_2 e^{\gamma t}$$

Respuesta críticamente amortiguada

c- **Raíces imaginarias**

$$\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m};\ \ \ \ q_H(t) = e^{\gamma t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 sen(\beta t))$$

Respuesta sub amortiguada

Si $\boldsymbol{Fext = f(t) \neq 0}$ $\boldsymbol{MOVIMIENTO\ FORZADO}$

En el que se presentarían las mismas condiciones i) y ii) del movimiento libre.

Ejemplo uno: Movimiento Libre

Un sistema está formado por cuatro resortes sujetos en su extremo superior, estos resortes tienen iguales características físicas es decir tienen la misma longitud y la misma constante de elasticidad k=200[N/m], se suspenden en la parte inferior de cada uno de ellos, masas de diferente peso: 50; 25; 20; y 10 [N]; luego de que se estabilizan adicionalmente se estiran 1[m] hacia abajo y se los suelta repentinamente.

Cuál masa tiene mayor frecuencia de oscilación?,

Cuál masa tiene mayor amplitud de oscilación?

No se considera el efecto amortiguador del aire

i) NO AMORTIGUADO

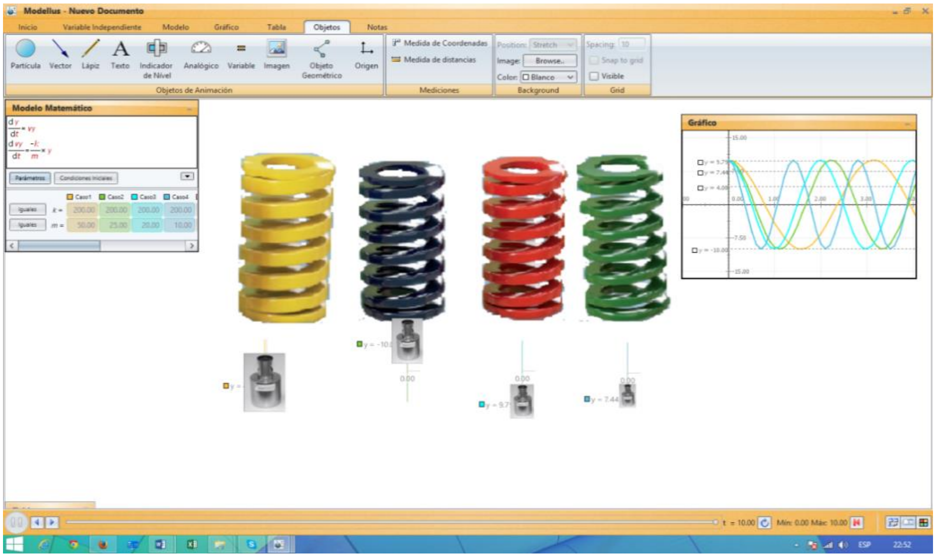


Figura 41-5. Simulación del movimiento libre no amortiguado
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

Se puede observar que la masa de menor peso tiene una mayor frecuencia de oscilación, mientras que la de mayor peso es la que tiene mayor período o menor frecuencia de oscilación.

Ejemplo dos: Movimiento Libre Amortiguado

Un sistema está formado por cuatro suspensiones mecánicas tienen la misma longitud y la misma constante de elasticidad k=2[N/m] pero diferente coeficiente de amortiguamiento b=4; 2; 1 y 0.5 veces la velocidad instantánea. Se suspenden en la parte inferior de cada uno de ellos, masas de igual peso: 1 [N]; luego de que se estabilizan, adicionalmente se estiran 0.25 [m] hacia abajo y se los suelta repentinamente.

Qué efecto produce la presencia del amortiguador en el sistema?,

Qué interpretación da a las respuestas de cada suspensión?.

ii) AMORTIGUADO

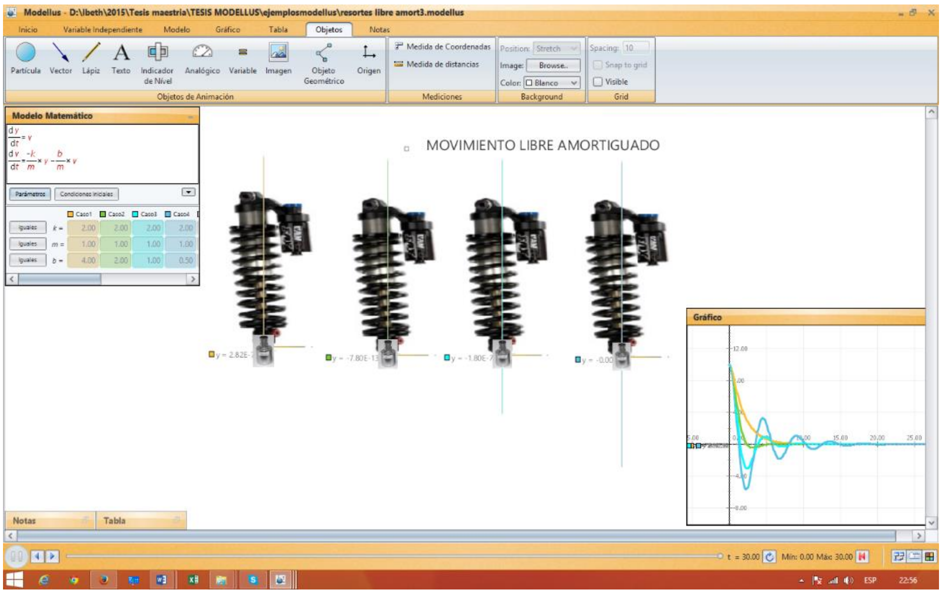


Figura 42-5. Simulación del movimiento libre no amortiguado
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

La suspensión que tiene mayor coeficiente de amortiguamiento hace que no se produzcan oscilaciones en la respuesta de la posición de la masa; mientras que aquella que tiene un menor coeficiente de amortiguamiento produce mayor oscilación y por tanto el tiempo en que logra alcanzar estabilidad es mayor.

Aplicación a circuitos eléctricos- movimiento forzado

De acuerdo al número de elementos no resitivos se da el orden de la ecuación diferencial por ejemplo.

Un circuito RL → EDO de 1er orden

Un circuito RC → EDO de 1er orden

Un circuito RLC → EDO de 2do orden

En circuitos eléctricos no se tienen respuestas oscilatorias no amortiguadas porque siempre existe un efecto resistivo ya sea por el conductor o por algún otro elemento del circuito.

Un circuito serie RLC alimentado por una fuente de voltaje alterno E=Vsen(wt) permite analizar y visualizar los tres tipos de respuestas crítica, sobre y sub amortiguada con un sencillo cambio en el valor de la resistencia, además la fuente de voltaje alterno constituye la fuerza oscilatoria externa. Este circuito mostrado en la figura puede representarse mediante una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

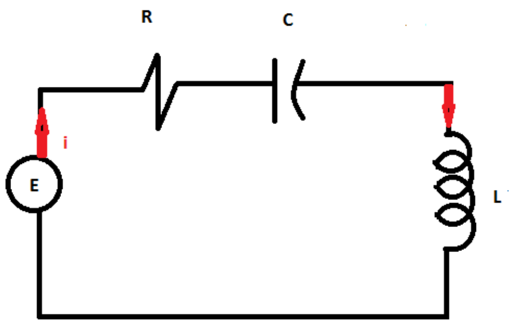


Figura 43-5. Circuito serie RLC
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014

$$Fext = E(t) \neq 0 \; MOVIMIENTO \; FORZADO$$

$$\frac{d^2q}{dt}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=\frac{E}{L}; \qquad \frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i(t)}{LC}=\frac{E'}{L}$$

Las dos ecuaciones sea en función de la carga o en función de la corriente tienen el mismo análisis para encontrar la solución homogénea.

$$D^2+\frac{R}{L}D+\frac{1}{LC}=0; \quad r=\underbrace{-\frac{R}{2L}}_{\alpha}\pm\underbrace{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}}_{\beta}$$

Si se resuelve respecto de la carga se puede tener cualquiera de los siguientes casos:

i) **Raíces reales y diferentes**

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2>\frac{1}{LC}; \qquad q_H(t)=C_1e^{(\alpha+\beta)t}+C_2e^{(\alpha-\beta)t}$$

Respuesta sobreamortiguada

ii) **Raíces reales y repetidas**

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2=\frac{1}{LC}; \qquad q_H(t)=C_1e^{\alpha t}+tC_2e^{\alpha t}$$

Respuesta críticamente amortiguada

iii) **Raíces imaginarias**

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2<\frac{1}{LC}; \qquad q_H(t)=e^{\alpha t}(C_1\cos(\beta t)+C_2sen(\beta t))$$

Respuesta subamortiguada

La solución particular se obtiene como:

$$si\ \beta \neq w \rightarrow E_0 sen(wt)$$

$$q_p(t) = \left. \frac{E_0 sen(wt)}{L\left(D^2 + \frac{RD}{L} + \frac{1}{LC}\right)} \right| D^2 = -w^2$$

Por coeficientes indeterminados o por variación de parámetros

$$q_T = q_H + q_P$$

$$q_T = \underbrace{q_H}_{TRANSITORIO} + \left. \underbrace{\frac{E_0 sen(wt)}{L\left(D^2 + \frac{RD}{L} + \frac{1}{LC}\right)}}_{ESTACIONARIO} \right| D^2 = -w^2$$

Ejemplo uno:

En el circuito de la figura los valores de los elementos son: Fuente de voltaje 50sen(t), la bobina tiene una inductancia fija de L=1[H]; el capacitor tiene un valor fijo de C=0.25[F] y una resistencia variable de R=4,5,2 [**Ω**], la carga del capacitor y la corriente en el instante en que se cierra el circuito es 0. Analizar el comportamiento de la corriente del circuito para los diferentes valores de las resistencias.

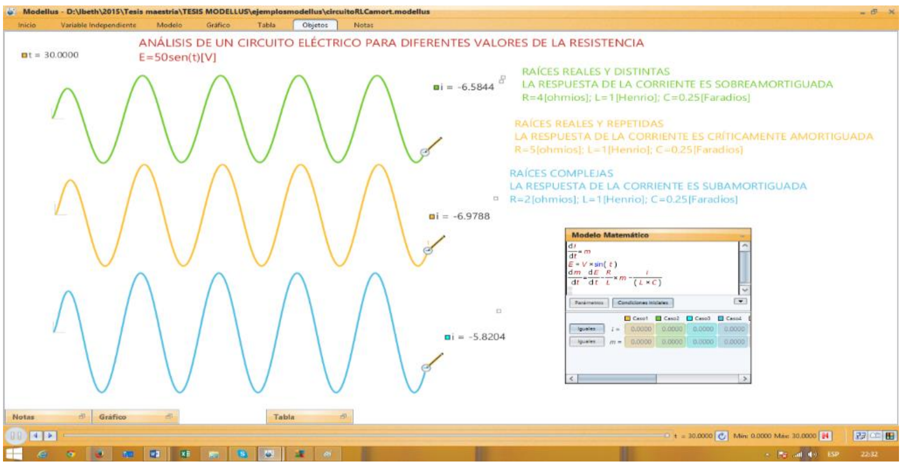


Figura 44-5. Respuesta de la corriente
Realizado por: Ibeth Delgado M. 2014
Fuente: Modellus

En la simulación de Modellus se puede observar que:
Para el valor de resistencia R=5 [**Ω**] la respuesta de la corriente es sobre amortiguada es decir rápidamente el circuito se estabiliza.

Para el valor de resistencia R=4 [**Ω**] la respuesta de la corriente es críticamente amortiguada es decir un sistema de control representado por este circuito puede ser que se estabilice o no más adelante.

Para el valor de resistencia R=2 [**Ω**] la respuesta de la corriente es sub amortiguada es decir el circuito representa un sistema cuya respuesta tiene oscilaciones que van creciendo en amplitud según va pasando el tiempo, esto es el sistema de control es inestable.

Tarea tema cinco

Analizar un sistema de resortes forzado, manipular los parámetros para obtener los diferentes tipos de respuesta.

En el circuito serie RLC propuesto mantener la resistencia constante y manipular el valor de la bobina y luego el valor del capacitor por separado.

CONCLUSIONES

En el diagnóstico se determinó que la metodología expositiva por sí misma no cubre todas las necesidades del proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de la matemática relacionada con la temática de ecuaciones diferenciales ordinarias. A pesar de que la matemática es una ciencia abstracta y formal requiere del auxilio de la didáctica para su correcta transposición. Las medias que bordean el 6/10 en ambos grupos validan la conclusión previa.

El elegir dos grupos distintos en cuanto a sus logros de aprendizaje puso en riesgo la investigación en cuanto a los errores denominados como de maduración; sin embargo al comparar las medias en ambos grupos se puso en evidencia que su rendimiento era prácticamente igual en el diagnóstico, esto bajo un criterio estadístico, el cual mostró un mejor desempeño de 1.01 en el grupo de control sobre el experimental que no influyó en el criterio de maduración.

El Modellus 4.0 como facilitador del proceso de aprendizaje dinámico, activo y participativo permitió la pragmatización de contenidos de la temática denominada Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Dicho recurso también la motivó la transposición de contenidos de modo fácil y ameno lo que no sucedía en la clase de corte expositivo.

La evaluación final mostró que el grupo experimental es 1.15 veces mejor que el grupo de control el cual en el momento de diagnóstico era 1.01 veces mejor al experimental. Esta superioridad del grupo experimental se infiere que se debe a la aplicación metodológica en el proceso enseñanza-aprendizaje cumpliéndose el propósito de la investigación que buscaba mejorar el aprendizaje activo de ecuaciones diferenciales en el grupo experimental.

RECOMENDACIONES

Se debe trabajar en el diagnóstico descartando además de los errores de madurez aquellos referidos a historia; es decir cuidando de no tomar en cuenta exclusivamente a estudiantes que sean demasiado deficientes en la asignatura sino a aquellos que están muy por encima de la media pues pueden estos errores provocar serios sesgos en investigaciones posteriores.

Se recomienda que se amplíe la investigación incluyendo a estudiantes de diversos niveles; no necesariamente de la misma carrera sino de otras; recordando que los criterios de investigación deben ser no solo repetitivos sino reproductibles; esto, para conocer el alcance de la efectividad del cuaderno guía; de esta manera se pueden reducir los criterios absolutistas en cuanto a la calidad de la investigación aplicada sobre grupos iguales, con el mismo facilitador, en el mismo nivel y en el mismo tiempo (solo cambiando la metodología).

Es recomendable no basarse solo en el cuaderno guía como facilitador de aprendizajes de las ecuaciones diferenciales ordinarias para no fijar procesos limitados en los estudiantes; debe combinarse el uso de este recurso con otras estrategias de aprendizaje como por ejemplo la elaboración conjunta y el método problémico por descubrimiento en base a necesidades prácticas de la vida cotidiana de los estudiantes.

La propuesta requiere un tiempo mínimo del total de la sesión de clase, convirtiéndola en adaptable al desarrollo de la clase.

La propuesta contiene algunos ejemplos de situaciones prácticas, sin embargo es flexible a los requerimientos de la clase ya que existe una gran variedad de escenarios y objetos animados que pueden ser propuestos por los mismos estudiantes para el análisis y simulación de un mismo fenómeno durante la ejecución de la clase.

La propuesta no es extensa por lo que no genera inquietud en el estudiante para separar una gran cantidad de tiempo para su conocimiento y práctica.

La mayoría de los estudiantes ya conoce a Modellus como un programa básico en el análisis de fenómenos físicos lo que hace fácil su adaptación al curso de EDO.

La implementación de los ejemplos de la propuesta permite interactuar entre estudiantes, con el programa y con el docente.

Se sugiere realizar simulaciones de ecuaciones diferenciales más complejas, adaptar nuevas condiciones y parámetros para analizar el efecto en los resultados, en muchas ocasiones estas sencillas variaciones en el software representan un extenso desarrollo manual que generalmente lleva a errores en los resultados.

Se recomienda añadir aplicaciones de Modellus para sistemas de EDO lineales de primer orden para la tercera unidad del programa total de contenidos.
Se propone utilizar la propuesta en las otras carreras de la universidad.

BIBLIOGRAFÍA

1. **Ausubel, D., Novack, J., & Hanesian, H.** (2009). *Psicología Educativa.* Mexico. Trillas,122-126.
2. **Bruner, J.** (2014). *Instructional Design*. Recuperado el 2 de Junio de 2015, de http://www.instructionaldesign.org/theories/constructivist.html
3. **Chickering, A.,& Gamson, Z.** (1987). *Siete principios de buenas prácticas en educación universitaria*. AAHE Bulletin, 39 (1) , 3-7.
4. **Cruz, D.** (2014). *Implementación del Modellus como recurso Didáctico para la enseñanza de la física* . UNACH. Riobamba, 52.
5. **Dewey, J.** (1995). *Democracia y educación: una introducción a la filosofía de la educación.* Madrid. Morata, 220.
6. **Duffy,T. M.,& Jonassen, D. H**. (2009). *Constructivism and the Technology of Instruction: A Conversation.* New York: Routledge, 41.
7. **Dullius, M. M., Veit, E. A., &Araujo, I. S.** (2013). *Dificuldades dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. Alexandria.* Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 6(2), 1-18.
8. **DUQ**. (2014). Recuperado el 20 de Julio de 2015, de http://www.duq.edu/about/centers-and-institutes/center-for-teaching-excellence/teaching-and-learning/active-learning
9. **Edwards, H. & Penney, D**. (2002). Ecuaciones Diferenciales. México. Prentice Hall, 75-88.
10. **ESPE.** (2015). *ESPE*. Recuperado el 20 de Julio de 2015, de http://www.espe.edu.ec/portal/files/regres/ordenesPDFs/O.R.%202006/O.R.%202006%20PDF/ANEXOS%20PDF%202006/ANEXO%200.R.%202006-029%20MODELO%20EDUCATIVO.pdf
11. **Espinoza, E**. (2008). *Análisis Matemático IV*. Lima. Servicios Gráficos J.J, 50-87.
12. **Gallardo, J. T., & Matzen, C. P**. (2009). *Integración del software Modellus a la metodología de modelamiento mental para el aprendizaje de Física 1*. 1-12.

13. **Marx, K.** (1996). *El Capital, Tomo I.* Mexico: Siglo XXI, 262.

14. **Mazur, E., Crouch, C. H., & Dourmashkin, P. A.** (2015). *Principles & Practice of Physics*. Pearson, 41-43.

15. **Moreira, M.** (2012). *Aprendizaje significativo, campos conceptuales y pedagogía de la autonomía: implicaciones para la enseñanza*. 61-62.

16. **Padrón.** (2014). *Aprendizaje colaborativo y recursos didácticos*. Recuperado el 20 de Julio de 2015, de http://www.doiserbia.nb.rs/img/doi/1820-0214/2005/1820-02140502001P.pdf

17. **Piaget, J.** (1991). *Seis estudios de Psicología.* Barcelona: Labor, 82-83.

18. **Rossi, M. I., & Allevato, N**. (2012). *Resolución de problemas como metodología para la enseñanza de ecuaciones diferenciales*. Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul, 1(1)., 7-8.

19. **Starr, D.** (1998). *Virtual education: Current practices and future directions*. The internet and higher education, 1(2), 157-165.

20. **Tello, J. & Pérez, C.**. (2007). *Integración del softwate modellus a la metodología de modelamiento mental para el aprendizaje de Física*. Revista Chilena de Educación Científica, 43-53.

21. **Teodoro, V.** (2002). *Modellus: Learning Physics with Mathematical Modelling.* Lisboa: Universidad Nova.

22. **Wang y Fischer**. (2012). *Designing hypermedia for learning (Vol. 67).* Springer Science & Business Media, 33-34.

23. **Zapata-Ros** (2014). *Bases para un nuevo modelo:Teorías y modelos sobre el aprendizaje en entornos conectados y ubicuos.*, 20-21.

24. **Zill, D.** (2008). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. México. CENGAGE Learning, 40-57.

ANEXOS

Anexo A: APUNTES DE EDO

APUNTES DE EDO

Ing. Ibeth Delgado

UNIDAD UNO

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES DIFERENCIALES

Son aquellas que contienen las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Según el tipo

Ecuaciones diferenciales ordinarias*:*

Son aquellas que contienen derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente (EDO)

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3dz}{dx}-\frac{rdr}{dx}=x;$$

r "variable dependiente" o Función incógnita $\mathrm{r}=\mathrm{f}(x)$
y "variable dependiente" o Función incógnita $\mathrm{y}=\mathrm{g}(x)$
r "variable dependiente" o Función incógnita $\mathrm{r}=\mathrm{h}(t)$
x "variable independiente "

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*:*

Son aquellas que contienen una o más derivadas respecto a dos o más variables independientes (EDP)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+k\frac{\partial T}{\partial t}=0;$$

T "variable dependiente"
Funcion incógnita $\mathrm{T}=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t})$
x, **y**, **z** y **t** "variables independientes"

Según el orden:

El orden de una ecuación diferencial ordinaria está dado por la más alta derivada. Una EDO de orden **“n”** se representa como:

en la **forma normal**, se despeja la más alta derivada y se expresa como:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad (1)$$

Por ejemplo:

$x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0$ ó $y' = \frac{-y}{x^2}$ EDO; 1^{er} orden

Según la linealidad

Se puede decir que una EDO es lineal si cumple con las siguientes condiciones:

$a_n(x)$ es función solo de "x"

Todas las derivadas están elevadas a la primera potencia

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad y$$

f(x) es función sólo de "x"

Según el grado:

El grado de una ecuación diferencial está dado por el exponente de su mayor derivada.

Por ejemplo:

Determinar el tipo, el orden, el grado y la linealidad de las siguientes ecuaciones:

$$x^2\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) + sen(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^3 y = cos(x); \quad EDO, 3^{er}\ orden, grado 1, no\ lineal$$

Solución de una ecuación diferencial

Se dice que una función **f** definida en un intervalo **I;** que es continua y posee **"n"** derivadas continuas en ese intervalo **I;** y que, al ser sustituida en la una ecuación diferencial de orden **"n-1"** genera una identidad**;** **es solución** de la ecuación diferencial en **ese mismo intervalo I** .

Es decir si cumple la siguiente condición:

Insertar la ecuación (2)

$$F\left(x, f, f', f'', f''' \ldots \ldots \ldots f^{(n)}\right) = 0; \ \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{I}$$

Por tanto al intervalo I se le conoce como intervalo de solución o dominio de la solución entre otros nombres, mismo que puede ser abierto, cerrado o semi abierto.

Comprobación de una solución de una ecuación diferencial ordinaria solución de una EDO

Se dice que una función "f" definida en un intervalo I es solución de un ecuación diferencial en ese intervalo I si satisface la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{3}$$

$$\int dy = \int f(x)dx$$

$$y = F(x) + C \quad \text{Solución general de la EDO} \tag{4}$$

En la mayoría de problemas que incluye ecuaciones diferenciales se trata de obtener soluciones particulares, luego de la solución general de la ecuación diferencial mediante ciertas restricciones llamadas condiciones iníciales.

Orígenes de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Se puede clasificar el origen de las ecuaciones diferenciales en dos grupos el primero cuando se originan como modelos matemáticos de fenómenos físicos, de procesos biológicos, económicos, químicos, eléctricos, mecánicos, etc. Y el segundo cuando se obtienen ecuaciones diferenciales a partir de familias de curvas geométricas conocidas.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias como modelos matematicos

En la actualidad las ecuaciones diferenciales son utilizadas como modelos matemáticos para representar muchos eventos sean físicos, económicos, biológicos, mecánicos, etc.

Por ejemplo una edo se utiliza para describir el comportamiento de un sistema o fenómeno y se le llama MODELO MATEMÁTICO; los pasos generales para describir un proceso mediante un modelo matemático se pueden resumir en los siguientes:

Identificar los Objetivos de la modelación

Identificar las variables por las cuales ocurren cambios en el sistema o fenómeno. De acuerdo al número de variables se determina el nivel de resolución del Modelo, cuantas más variables existan mayor será el nivel de resolución.

Se lista las suposiciones o hipótesis acerca del fenómeno que se está intentando modelar. Estas suposiciones tienen relación con las razones de cambio que provoca que el sistema varíe, esto a su vez influirá en que la representación dependa de una o varias Ecuaciones Diferenciales

Luego de plantear el modelo matemático mediante una Ecuación diferencial o sistema de Ecuaciones diferenciales, queda resolver las ecuaciones diferenciales. Si los resultados obtenidos son coherentes con los datos conocidos o experimentales, se puede decir que el modelo es aceptable; si los resultados no son coherentes; hay que elevar el nivel de resolución es decir hay que agregar variables y modificar las suposiciones acerca de los mecanismos que provocan cambios en el sitema.

Algunos procesos que pueden modelarse matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas son:

Crecimiento Poblacional

Desintegracion radiactiva

Propagacion de enfermedades

Ley de Newton para el Enfriamiento – Calentamiento de un cuerpo

Vaciado de Tanques: cilíndricos, conos, semiesféricos, esféricos

Circuitos eléctricos, entre otros.

Varios de estos procesos pueden representarse mediante la misma ecuación diferencial básica

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \tag{5}$$

El modelo básico poblacional considera el crecimiento de la población en forma exponencial, este modelo es muy cercano a la realidad de una muestra poblacional de ciertos seres invertebrados como las bacterias y los peces. Este modelo se utilizó por los años 70 para modelar el crecimiento de la población de EEUU, en ese entonces fue útil. Y se podría haber expresado como:

La rapidez con la que crece una población P(t) es directamente proporcional a la población en ese instante; este modelo considera las tasas de natalidad α y de mortalidad β como constantes, que simbólicamente se puede representar como*:*

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} \propto (\alpha - \beta)P(t)$$

Cuya ecuación diferencial es:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = kdt \rightarrow \ln\big(P(t)\big) = kt + C \rightarrow P(t) = e^{kt+C} \rightarrow P(t) = Ce^{kt}$$

Donde el valor de la constante C se determina de la cantidad P en el instante $t=t_0$ y la constante k se obtiene de los datos informativos para los diferentes intstantes “t”.

Desintegración radiactiva. Reacciones químicas: Una reacción química se denomina reacción de primer orden si en ella una molécula se descompone en otras espontáneamente y el número de moléculas en que se descompone en una unidad de tiempo es proporcional al número de moléculas existentes.

Si se considera una sustancia que contiene A(t) átomos de algún isótopo radiactivo en un instante "t"; se tiene información de que una cantidad constante de esos átomos radiactivos se descomponen espontáneamente en otro tipo de isótopos en un intervalo de tiempo; Representar matemáticamente este proceso.

Se modela de forma semejante al del crecimiento poblacional, con la diferencia de que el número inicial de átomos A(t) va disminuyendo por la desintegración así:

$$\frac{\Delta A(t)}{\Delta t} \propto A(t) \rightarrow \frac{dA(t)}{dt} = -kA(t) \qquad (6)$$

Donde la constante C se calcula suponiendo una condición inicial de la cantidad de átomos (masa) para un instante $t=t_0$ se tiene una $A(t=t_0)= A_0$ y reemplazando en la solución se tiene:

$$\mathrm{A}(\mathrm{t} = \mathrm{t}_0) = \mathrm{A}_0 \;\; = Ce^{-k0} \rightarrow \mathrm{A}_0 \;\; = C \rightarrow A(t) = \mathrm{A}_0 \; e^{-kt}$$

Modelos matemáticos con ecuaciones de segundo orden:

Cuerpo en caída libre y con resistencia: Desde una cierta altura se deja caer un cuerpo de masa (m) sobre el que actúa además de la fuerza de gravedad la resistencia del aire, que es porporcional a su velocidad y se quiere clacular la velocidad de caída.

Movimiento Pendular: Se supone un punto material de masa m suspendido en un punto fijo que se mueve por acciòn de la gravedad a lo largo de un arco de circunferencia que está en un plano vertical. Despreciando el rozamiento y la resistencia del aire se pretende calcular la ecuación del movimiento en función del tiempo.

Ecuaciones diferenciales a partir de una familia de curvas

Las ecuaciones diferenciales aparecen a partir de la familia de curvas geométricas **g(x,y,c1,c2,...Cn)=0**; también se utilizan para describrir matemáticamente problemas físicos de ciencias e ingeniería.

Si se tiene una ecuación de la familia de curvas se debe eliminar primero los parámetros, una forma es despejándolos y luego derivándolos ; otra forma es derivar la ecuación tantas veces como parámetros existan en la ecuación; y otra es utilizando determinante igualado a 0.

Familia de curvas solución de una EDO

Una ecuación diferencial tiene ***generalmente un número infinito de soluciones***. Así, al resolver una ecuación diferencial de primer orden de la forma ***F(x,y,y')=0*** se obtiene una familia "uniparamétrica" de curvas de la forma **g(x, y, C) =0** donde la constante **C** es arbitraria; de forma similar si se resuelve una ecuación diferencial de segundo orden de la forma **F(x,y,y',y'')=0** se obtiene una familia "biparamétrica" de curvas de la forma **g(x, y, C_1, C_2) =0** donde las constantes **C_1 y C_2** son arbitrarias por tanto al resolver una ecuación diferencial de orden **"n"** de la forma $\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', y''' \ldots \ldots y^{(n)}\right) = 0}$ se espera obtener una familia **"n"** paramétrica de soluciones de la forma $\boldsymbol{g(x, y, C_1, C_2, C_3 \ldots \ldots C_n) = 0.}$

Específicamente al grupo de soluciones de la forma **g(x, y, C) =0** se le llama ***solución general*** de la EDO de primer orden de la forma **F(x,y,y')=0**; si se determina el valor de **"C"** se obtiene una curva específica para ese valor que es parte de la familia total de curvas y se le llama ***solución particular*** de la EDO de primer orden. Y si existiese una solución de la EDO de primer orden que no forma parte del grupo de curvas dado por **g(x, y, C) =0** se le llama ***solución singular*** de la EDO.

Todas las soluciones de una ecuación diferencial de orden ***"n"*** en un intervalo ***I*** pueden obterse de la función $\boldsymbol{g(x, y, C_1, C_2, C_3 \ldots \ldots C_n) = 0}$, a este grupo de curvas se llama **solución general.**

Problema de valor inicial

Generalmente cuando se resuelve una EDO es muy útil obtener la solución específica para una cierta condición del problema ya definida. Esta condición se le llama resolver el problema de valor inicial.

El problema de valor inicial consiste en resolver una ecuación diferencial ordinaria de orden **"n"** de la forma $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \ldots., y^{(n-1)})$, sujeta a las condiciones:

Donde: $y_0; \; y'_0; \ldots . y^{(n-1)}{}_0$ son los valores de **"y"** y de sus **"n-1" derivadas** en un solo punto, estos valores son constantes dados en forma arbitraria y se les llama condiciones iniciales.

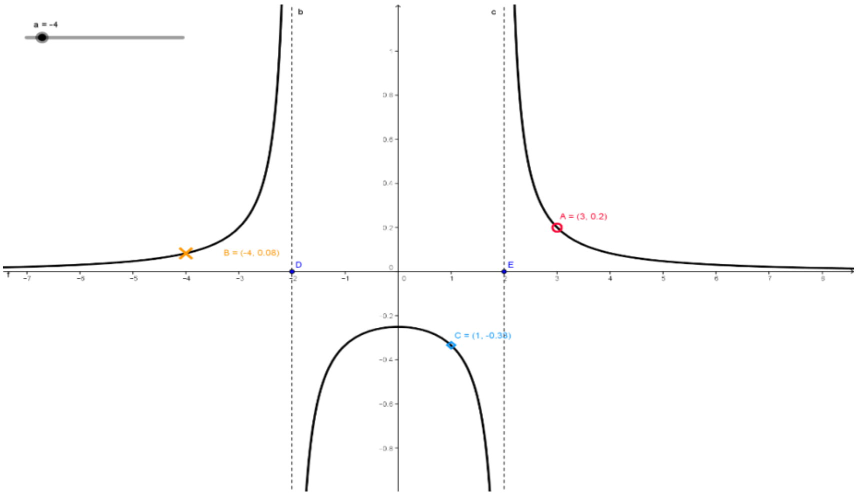
Intervalo de definición de la solución de una edo

Es muy importante notar la diferencia entre el **intervalo de definición de una función** y el **intervalo de definición de la solución** de una EDO. Por ejemplo:

La solución de la edo de primer orden $y' + 2xy^2 = 0 \;\; es \; \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^2+C}}$

Esta función **"y"** representa una familia uniparamétrica de curvas de acuerdo a los valores que tome **"C".**

Para evidenciar la diferencia entre los intervalos de definición de la función y el intervalo de solución, se escoge el valor de C=-4



Se puede visualizar en la gráfica los intervalos de existencia de la función, están definidos en todos los reales excepto en x=-2 y x=2

El intervalos solución de la edo puede ser cualquiera de los intervalos de existencia de la función es decir]-∞,-2[U]-2,2[U]2,∞[

Mientras que el intervalo de la solución particular es solamente aquel en el que se cumple la condición por ejemplo: para la condición y(3)=0.2 el Intervalo de la solución es]2,∞[; para la condición y(1)=-0.38 el Intervalo de la solución es]-2,2[;y para la condicón y(-4)=0.08 el Intervalo de la solución es]-∞,-2[;

CAMPOS DIRECCIONALES

La ecuación $\mathbf{y} = \mathbf{C}$ *representa una familia a un parámetro de líneas horizontales. En general cualquier miembro de la familia* $\mathbf{f}(\mathbf{x}\,,\mathbf{y}) = \mathbf{c}$ *se llama isóclina, que literalmente significa curva a lo largo de la cual la inclinación de las tangentes es igual.*

Cuando se hace variar el parámetro c, *obtenemos un conjunto de isóclinas en que los elementos lineales se construyen adecuadamente. La totalidad de esos elementos lineales se llama de diversos modos: campo de direcciones, campo direccional, campo de pendientes o campo de elementos lineales de la ecuación diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7}$$

Según apreciamos en las figuras, el campo de direcciones recuerda las "líneas de flujo" de la familia de curvas de solución de la ecuación diferencial $y' = y$. *Si deseamos una solución que* *pase por el punto* $(0{,}1)$, *debemos formar una curva , como se indica en la segunda figura, que pase este punto de modo que atraviese las isóclinas con las inclinaciones adecuadas.*

Ejemplos:

Graficar las curvas solución de

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = y}$$

$m\ pendiente\ de\ la\ recta\ tangente\ a\ la\ curva$

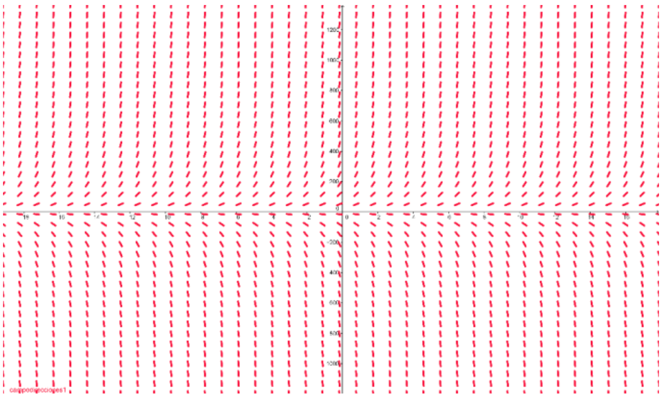
$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \ldots \ldots.$

$m = y = 1$

$m = y = -1$

$m = y = 2$

$m = y = -2$



Métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Integración directa

Si la ecuación diferencial es de la forma:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x)} \tag{8}$$

Se la puede resolver integrando directamente el diferencial dy del un lado de la ecuación con respecto a y y la función f(x)con respecto a x

$$\int dy = \int f(x)dx + C \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = x}$$

$\int dy = \int x dx$

$y = \frac{x2}{2} + C$

Reducibles a variables separables

Si la ecuación diferencial tiene la forma:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)} \tag{10}$$

Se puede resolver haciendo la sustitución.

$u = ax + by + c$

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) \tag{11}$$

Se reemplaza en la EDO original y se obtiene una EDO en (u,x) a variable separable.

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Funciones homogéneas:

Una función $\boldsymbol{f((x, y)}$ se dice homogénea de grado **"n"** si cumple la condición.

$$\boldsymbol{f(tx, ty) = t^n f(x, y)} \tag{12}$$

La ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se dice que es homogénea si cumple con que M y N sean homogéneas, es decir:

$$\boldsymbol{M(xt, yt) = t^n N(x, y)} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{N(xt, yt) = t^n M(x, y)} \tag{14}$$

Esta ecuación se puede resolver por variable separable utilizando cualquiera de las sustituciones siguientes:

$\boldsymbol{y = ux}$ cuando la estructura de $N = (x, y)$ es más sencilla que $M = (x, y)$

$\boldsymbol{x = vy}$ cuando la estructura de $M = (x, y)$ es más sencilla que $N = (x, y)$

$dy = u\, dx + x\, du; \qquad dx = v\, dy + y\, dv$

Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Si una ecuaciòn diferencial tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{ax + by + c}{a'x+b'y + c'}) \tag{15}$$

se la puede reducir a una ecuación diferencial homogénea mediante las siguientes sustituciones :

$x = u + h$
$y = v + k$

Donde h ,k$\in R$ y son las coordenadas del punto de intersecciòn de las rectas.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales exactas

Sea una función que definida como: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dy \tag{16}$$

A la función $\mathrm{M}(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se la llama exacta si existe una función f(x,y), $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que la diferencial de f(x,y) es:

$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ Donde:

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \tag{17}$$

$$N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \tag{18}$$

Se dice que la ecuación diferencial es exacta si cumple la condición necesaria para que sea exacta la cual es :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{19}$$

Condición de los campos vectoriales conservativos

Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas

Si la ecuación diferencial no es exacta se puede reducir a exacta encontrando la función $u(x,y)$

$$\boldsymbol{u(x,y)}M(x,y)dx+\boldsymbol{u(x,y)}\ N(x,y)dy=0 \qquad sea\ exacta \tag{20}$$

CASO 1. Si $u(x,y)$ es función solo "x"

$$\underbrace{\boldsymbol{u(x,y)}M(x,y)}_{\boldsymbol{M'}(x,y)}dx+\underbrace{\boldsymbol{u(x,y)}\ N(x,y)}_{\boldsymbol{N'}(x,y)}dy=0$$

$$\frac{\partial M'(x,y)}{\partial y}=\boldsymbol{u(x,y)}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}+M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M'(x,y)}{\partial y}=\boldsymbol{u(x,y)}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\quad porque\ u\ es\ función\ sólo\ de\ "x"$$

$$\frac{\partial N'(x,y)}{\partial x}=\boldsymbol{u(x,y)}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}+N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

Para que sea exacta:

$$\frac{\partial M'(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N'(x,y)}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{u(x,y)}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\boldsymbol{u(x,y)}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}+N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{u(x,y)}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\boldsymbol{u(x,y)}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{u(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x};$$

$$\frac{\mathbf{1}}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial u(x,y)}{\boldsymbol{u(x,y)}}$$

$$\int\frac{\mathbf{1}}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dx=\int\frac{\partial u(x,y)}{\boldsymbol{u(x,y)}}$$

$$\ln\big(u(x,y)\big)=\int\frac{\mathbf{1}}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dx\rightarrow$$

$$\boxed{u(x,y)=e^{\int f(x)dx}} \tag{21}$$

$$f(x)=\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{22}$$

CASO 2. Si $u(x,y)$ es función de "y"

$$\boxed{u(x,y)=e^{\int g(y)dy}} \tag{23}$$

$$g(y) = -\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{24}$$

CASO 3. Si $u(x,y) = f(x)\ g(y)$ donde $f(x)\ y\ g(y)$ se encuentran por inspección

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = u(x,y)\frac{f'(x)}{f(x)} - M(x,y)\frac{g'(y)}{g(y)} \tag{25}$$

CASO 4. Si $u(x,y) = x^m y^n$ donde m y n se determinan a partir de la condiciòn suficiente y necesaria de las ecuaciones diferenciales exactas.

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\boldsymbol{(y^3x+1)dx + x^2y^2dy = 0}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2x - 2xy^2 = \ y^2x\ \ dividir\ para\ N(x,y)$$

$=>$ 1º $CASO$

$$f(x) = \ \frac{1}{\boldsymbol{x^2y^2}}y^2x = \frac{1}{x} \to u(x,y) = e^{\int\frac{1}{x}dx} \to u(x,y) = e^{\ Inx}\ \to u(x,y) = x$$

Combinaciones integrables

$xdy + ydx = d(xy)$ $\qquad 2(xdy \pm ydx) = d(x^2 \pm y^2)$

$\frac{xdy-ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad \frac{xdy+ydx}{x^2y^2} = d\left(-\frac{1}{xy}\right)$ $\quad \frac{xdy-ydx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right)$

$\frac{xdy-ydx}{xy} = d\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ $\quad \frac{xdy+ydx}{xy} = d(\ln(xy))$ $\quad \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = d\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

$\frac{xdy-ydx}{x^2-y^2} = \frac{1}{2}d\left(\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right)$ $\quad \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2} = \frac{1}{2}d\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ $\quad \frac{ydx-xdy}{(x+y)^2} = \frac{1}{2}d\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$

$\frac{dx+dy}{x+y} = d(\ln(x+y))$ $\quad \frac{xdy-ydx}{x\sqrt{x^2-y^2}} = d\left(\text{arcsen}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\boldsymbol{\frac{dr}{d\theta} = -\frac{rsec\theta(sec\theta + r^2(tg\theta))}{r^2sec(\theta) - tg\ (\theta)}}$$

$$(r^2sec(\theta) - tg\ (\theta))dr(rsec^2\theta + r^3sec(\theta)tg(\theta)d\theta\ \div r^2$$

$$\left(sec\theta - \frac{tg(\theta)}{r^2}\right)dr + \frac{sec^2\theta}{r} + rsec(\theta)d\theta = 0$$

$$\left(sec\theta dr + rsec\theta tg\theta d\theta\right) + \left(\frac{sec\theta}{r}\ d\theta - \frac{tg\theta}{r^2} dr\right) = 0$$

$$d(rsec\theta) + d\left(\frac{tg\theta}{r}\right) = 0$$

$$sec\theta dr + r\ sec\theta\ tg\theta\ d\theta + \left(\frac{sec^2}{r} d\theta - \frac{tg\theta}{r^2}\right) dr = 0$$

$$\int d(rsec\theta) + \int d\left(\frac{tg\theta}{r}\right) = 0$$

$$rsec\theta + \frac{tg\ \theta}{r} = C$$

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = f(x) \tag{26}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)} y = \frac{f(x)}{a_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad \boldsymbol{E.D.O.L\ 1^{o}\ orden} \tag{27}$$

Factor integrable por reducible a exacta primer caso

$$F.I \qquad e^{\int P(x)xd}$$

$$e^{\int P(x)xd}\ \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)xd}\ P(x)y = e^{\int P(x)xd}\ Q(x)$$

$$d\left(e^{\int P(x)xd} y\right) = e^{\int P(x)xd}\ Q(x)$$

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)xd}\left\{\int e^{\int P(x)xd} Q(x)dx + C\right\}} \tag{28}$$

Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n; \ \ n \neq 1 \tag{29}$$

1.- Multiplicar a la ecuación por $y^{-n}(1-n)$

$$(1-n)y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + (1-n)y^{-n+1}P(x) = (1-n)Q(x)$$

2.-Cambiar de variable

$$z = y^{-n+1} \ => \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

3.-Resolver la EDO

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)z\,P(x) = (1-n)Q(x) \quad \boldsymbol{E.D\ \ de\ 1º\ orden}$$

$$z = e^{-\int P(x)(1-n)dx}\left\{e^{\int p(x)(1-n)\,dx}(1-n)Q(x)dx + C\right\}$$

Ecuaciones diferenciales de Ricatti

Son de forma :

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) \tag{30}$$

Suponemos que $y_1(x)$es una solución de la ecuación y cumple con

$$y = y_1 + u \rightarrow Donde\ u\ es\ una\ función\ incógnita$$

Reemplazando y agrupando en la ecuación diferencial 55 queda:

$$\frac{du}{dx} - \big(P(x) + 2y_1\,Q(x)\big)u = Q(x)u^2$$

Ecuaciones diferenciales de Lagrange y Clairaut

Son de la forma :

$$y = xf\ (y') + g\ (y') \rightarrow Lagrange \tag{31}$$

$$y = xy' + g\ (y') \rightarrow Clairauts \tag{32}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe transformar a una ecuación lineal en como función de P haciendo que $\frac{dy}{dx} = P \rightarrow dy = Pdx$

Reemplazando en la ec. 56

$y = x\, f\,(P) + \ g\,(P)$

Diferenciando

$Pdx = dy = f\,(P)dx + xf'(P)dP + \ g'(P)\,dP$

$Pdx - f(P)dx = \ xf'(P)dP + \ g'(P)\,dP$

$\big(P - f(P)\big)dx = \ \big(xf'(P) \ + \ g'(P)\big)dP$

$$\frac{dx}{dP} = \frac{\big(xf'(P) \ + \ g'(P)\big)}{P - f(P)} \rightarrow Edo\ Lineal\ \ 1^{o} Orden$$

$x = \varphi\,(P, C).$

$y = se\ reemplaza\ en\ la\ ecuación\ diferencial\ original$

Aplicaciones de las edo

CUADRO DE APLICACIÓN DE MODELOS BÁSICOS

$$\frac{dA}{dt} = kA \begin{cases} Crecimiento\ Poblacional \\ Determinación\ de\ la\ edad\ de\ fósiles \\ Desintegración\ radiactiva \\ Eliminación\ de\ medicamentos \\ Ley\ de\ Newton\ Enfriamiento - Calentamiento \\ Interés\ compuesto \\ Vaciado\ de\ tanques, etc \end{cases}$$

$$\frac{dA}{dt} - P(t)A(t) = Q(t) \begin{cases} Circuitos\ eléctricos \\ Mezclas \\ Oferta\ y\ demanda \end{cases}$$

Aplicaciones a la geometría

urvas ortogonales.-

Dos curvas $C_1\ \ y\ \ C_2$ son ortogonales si sus tangentes son perpendiculares en un punto de intersección, es decir cumplen con la condición de:

$m_{1*}m_2 = \ -1$

Donde: m_1 es la pendiente de la recta tangente a la curva C_1

m_2 es la pendiente de la recta tangente a la curva C_2

Cuando toda las curvas de una familia de curvas ***g(x,y,C) = 0*** cortan ortogonalmente a otra familia de curvas ***h(x,y,C) = 0*** se dice que son cada una trayectoria ortogonal de la otra.

Para encontrar las trayectorias ortogonales de una familia de **curvas dada en coordenadas rectangulares** se resumen los siguientes pasos:

1 . Se halla la ecuación diferencial de la familia de curvas dada

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{33}$$

2.-Se resuelve la ecuación diferencial de la familia ortogonal como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)} \tag{34}$$

3.-Se resuelve la ecuación del diferencial del paso 2

UNIDAD DOS

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR

Las ecuaciones diferenciales de orden ***"n"*** se representan como:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a3(x)\frac{d^3y}{dx^3} + a_2(x)\frac{d^3y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Si $f(x) = 0$ $\boldsymbol{EDO\ Lineal\ Homog\acute{e}nea}$

Si $f(x) \neq 0$ $=> \boldsymbol{EDO\ Lineal\ NO\ Homg\acute{e}nea}$

Para determinar la solución particular se debe considerar:

Problema de valor inicial

Problema de valor en la frontera

Problema de valor en la frontera.

Este problema consiste en resolver una ecuación diferencial en el cual la variable independiente y o sus derivadas se especifican en puntos diferentes por ejemplo para la ecuación diferencial de segundo orden:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Se puede especificar los valores $\begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$

Dependencia e independencia lineal

El conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\ f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes $C_1, C_2 \dots C_n$ no todas nulas tales que

$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) + \cdots c_nf_n(x) = 0$

Son todas nulas

EL WRONSKIANO

Es el determinante de la matriz formada por: $f_1(x)$, $f_2(x) \dots \dots f^n(x)$ y sus $(n-1)$ derivadas

$$W = \begin{vmatrix} f_1\ (x) & f_2(x) & f_3(x) \dots & f_n(x) \\ f_1{'}(x) & f2{'}(x) & f_3{'}(x) \dots & f_n{'}(x) \\ f_1^{"}(x) & f2^{"}(x) & f3^{"}(x) \dots & fn^{"}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{(n-1)}{f1(x)} & \overset{(n-1)}{f2(x)} & \overset{(n-1)}{f3(x)} \dots & \overset{(n-1)}{fn\ (x)} \end{vmatrix}$$

Si el determinante W es diferente de cero en por lo menos un punto del intervalo I => las funciones son linealmente independientes.

Si $f_1(x), f_{2(x) \dots\dots\ fn(x)}$ son linealmente dependientes => wronskiano es cero.

Si el wronskiano de las funciones es cero no necesariamente significa que las funciones sean linealmente dependientes.

Solución de las EDOL Homogéneas de orden "n" con coeficientes constantes

Para resolver una EDO homogénea de coeficientes constantes se puede seguir los siguientes pasos:

1) Escribir la ecuación diferencial mediante el polinomio característico **P(D)**=0

$(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_3D^3 + a_2D^3 + a_1D + a_0)y = 0$

2) Calculamos las raíces del polinomio característico igualando a cero P(D)=0; de acuerdo a la naturaleza de las raíces se tiene:

Raíces $\mathbb{R}$ ***y diferentes***

$r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq \cdots \neq r_n$

$y_T = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}$

Raíces $\mathbb{R}$ y repetidas

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 \neq r_5 \neq r_6 \neq \cdots \neq r_n$

$y_T = \boldsymbol{C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} + C_3 x^2 e^{r_1 x} + C_4 x^3 e^{r_1 x}} + C_5 e^{r_5 x} + C_6 e^{r_6 x} + \cdots C_n e^{r_n x}$

Raíces imaginarias

$r_1 = \propto_1 \pm\ \beta_1 i = r_2 = \propto_1 \pm\ \beta_1 i = r_3 = \propto_1 \pm\ \beta_1 i\ \neq r_4 = \propto_4 \pm\ \beta_4 i \neq r_5 = \propto_5 \pm\ \beta_5 i \neq \cdots \neq$

$r_{\frac{n}{2}} = \propto_{\frac{n}{2}} \pm\ \beta_{\frac{n}{2}} i$

$$\begin{aligned} y_T = {} & e^{\propto_1 x}(C_1 \cos(\beta_1 x) + C_2 sen(\beta_1 x)) + x e^{\propto_1 x}(C_3 \cos(\beta_1 x) + C_4 sen(\beta_1 x)) \\ & + x^2 e^{\propto_1 x}(C_5 \cos(\beta_1 x) + C_6 sen(\beta_1 x)) + e^{\propto_4 x}(C_7 \cos(\beta_4 x) + C_8 sen(\beta_4 x)) \\ & + e^{\propto_5 x}(C_9 \cos(\beta_5 x) + C_{10} sen(\beta_5 x)) + \cdots \ldots \\ & + e^{\propto_{\frac{n}{2}} x}\left(C_{n-1} \cos\left(\beta_{\frac{n}{2}} x\right) + C_n sen(\beta_{\frac{n}{2}} x)\right) \end{aligned}$$

Solución de las EDOL No Homogéneas de orden "n" con coeficientes constantes.

Para obtener la solución general de la EDOLNH de coeficientes constantes primero se determina la solución general de la EDOLH y después se determina una solución particular cualquiera de la EDOLNH.

y_H: EDOLH

yp: EDOLNH

$$y = y_H + yp$$

Para encontrar la solución particular se puede utilizar cualquiera de los siguientes métodos.

Método de los coeficientes indeterminados

Variación de parámetros

Método de los coeficientes indeterminados.

Para este método se puede utilizar los Operadores Diferenciales Anuladores; se aplica este método cuando f(x) tiene la forma de polinomios, trigonométricas senos o cosenos y exponenciales; o la combinación lineal de estas formas de funciones.

Operadores Anuladores para f(x)

El operador $\boldsymbol{D^n}$ anula a cada una de las funciones $\boldsymbol{1, x^2, x^3, x^4, \ldots \ldots x^{n-1}}$

$(\boldsymbol{D}-\propto)^{\boldsymbol{n}}$ anula a cada una de las funciones $\boldsymbol{e}^{\propto x}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{\propto x}, \boldsymbol{x}^{2}\boldsymbol{e}^{\propto x}, \ldots \ldots \boldsymbol{x}^{n-1}\boldsymbol{e}^{\propto x}$

$(\boldsymbol{D}^{2}-\boldsymbol{2}\propto \boldsymbol{D}+(\propto^{2}+\boldsymbol{\beta}^{2}))^{\boldsymbol{n}}$ anula a cada una de las funciones: $\boldsymbol{e}^{\propto x}\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{\beta x}), \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{e}^{\propto x}\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{\beta x}), \boldsymbol{x}^{2}\boldsymbol{e}^{\propto x}\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{\beta x}), \ldots, \boldsymbol{x}^{n-1}\boldsymbol{e}^{\propto x}\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\beta x})$

$\boldsymbol{e}^{\propto x}\boldsymbol{Sen}(\boldsymbol{\beta x}), \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{\propto x}\boldsymbol{Sen}(\boldsymbol{\beta x}), \boldsymbol{x}^{2}\boldsymbol{e}^{\propto x}\boldsymbol{Sen}(\boldsymbol{\beta x}), \ldots, \boldsymbol{x}^{n-1}\boldsymbol{e}^{\propto x}\boldsymbol{Sen}(\boldsymbol{\beta x})$

Método de variación de parámetros

Consideremos una EDO Lineal No Homogénea de coeficientes constantes de la forma siguiente:

$$a_3\frac{d^3y}{dx^3}+a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+ay=f(x)$$

La solución homogénea se la puede escribir como:

$$y_H=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)$$

Se considera la solución particular. y_P

$$y_P=u_1y_1(x)+u_2y_2(x)+u_3y_3(x)$$

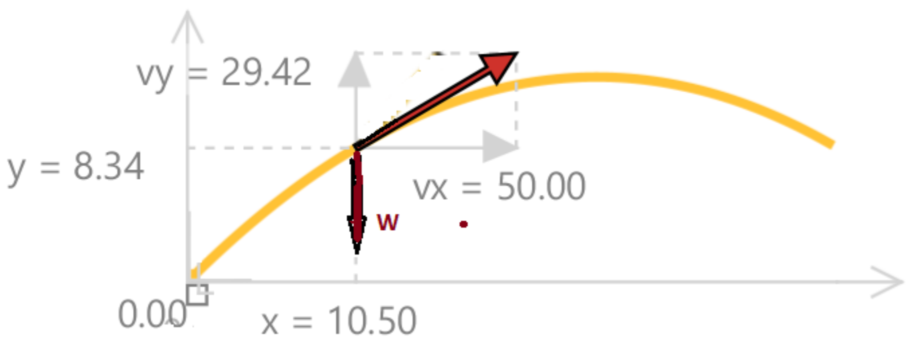
Donde $u1, u2, u3$ son funciones incógnitas que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u_1{}'y_1+ & u_2{}'y_2+ & u_3'y_3=0 \\ u_1{}'y_1{}'+ & u_2{}'y_2{}'+ & u_3'y_3{}'=0 \\ u_1^{\prime y_1''}+ & u_2^{\prime y_2''}+ & u_3^{\prime y_3''}=f(x) \end{cases}$$

Aplicaciones de las edo de segundo orden

Aplicaciones a la física

El lanzamiento de un proyectil que describe una trayectoria parabólica y se puede representar



En el eje "x" aunque no actúa ninguna fuerza sobre el cuerpo, existe movimiento. Y según la Primera ley de Newton, se tiene que:

$$0=m.\vec{a}$$

$$0 = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad EDO \quad Segundo\ orden$$

Se encuentra la función posición del cuerpo como una función x(t)resolviendo la EDO

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad x(0) = x_0 \rightarrow x_0 = C_2;\ y \qquad v(0) = v_0 \rightarrow v_0 = C_1; \quad \boxed{x(t) = v_0t + x_0}$$

En el eje "y" actúa una fuerza y es la del peso del cuerpo por lo que se puede expresar como:

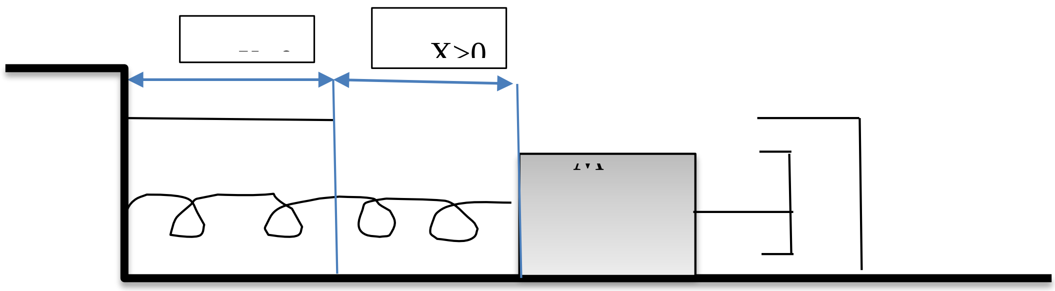
$$\vec{w} = m\vec{a} \rightarrow \int \frac{d^2y}{dt^2} = \int 9.8; \rightarrow \frac{dy}{dt} = v_y(t) = 9.8t + C_1 \rightarrow \int dy = \int (9.8t + C_1)dt \ \rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = g\frac{t^2}{2} + v_{0y}t + y_0}$$

En general las ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden se aplican a cualquier tipo de movimiento vibratorio sinusoidal por ejemplo:

Vibraciones mecánicas

Un ejemplo sencillo es de una masa sujeta a un resorte común que resiste compresión y estiramiento.



Por la segunda Ley de Newton : $\sum\vec{F} = m.\vec{a}$

$$\overrightarrow{Fext} - \overrightarrow{Fres} - \overrightarrow{Famort} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Donde**:**

$\vec{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{ext}$: $Fuerza\ externa\ del\ sistema\ para\ cualquier\ instante\ "t"$

$\vec{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{res}$: $Fuerza\ de\ restauración\ \ del\ resorte\ \vec{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{res} = -kx$

$\vec{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{amort}$: $Fuerza\ de\ amortiguamiento\ que\ se\ opone\ al\ movimiento;$

y es proporcional a la velocidad en el instante "t"; $\boldsymbol{Famort} = -\propto \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}$

Entonces reescribiendo la ecuación:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + Famort + Fres = Fext$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + Famort + Fres = Fext$$

$mx'' + \alpha x' + kx = f(t);\ \ EDO\ \ 2^0\ \ orden\ no\ homogénea$

Si $Fext = f(t) = 0\ \ \rightarrow MOVIMIENTO\ LIBRE$

Si $\nexists\ amortiguamiento \propto = 0\ MOVIMIENTO\ NO\ AMORTIGUADO$

$$mx'' + kx = 0$$

Si $\ni\ amortiguamiento \propto > 0\ MOVIMIENTO\ \ AMORTIGUADO$

$mx'' + \alpha x' + kx = 0 \rightarrow D^2 + \frac{\alpha}{m}D + \frac{k}{m} = 0$

$$r = \underbrace{-\frac{\alpha}{2m}}_{\gamma} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}}_{\beta}$$

Aplicación a circuitos eléctricos

De acuerdo al número de elementos no resitivos se da el orden de la ecuación diferencial por ejemplo.

Un circuito RL → EDO de 1er orden

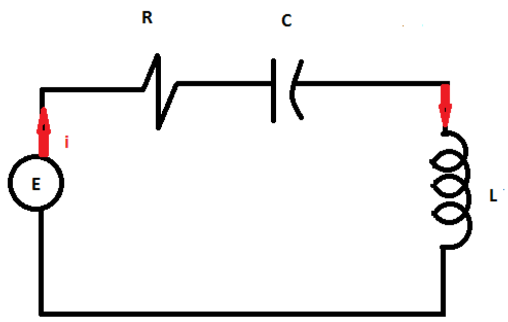
Un circuito RC → EDO de 1er orden

Un circuito RLC → EDO de 2do orden

En circuito eléctrico no podemos tener respuestas oscilatorias no amortiguadas porque siempre existe una resistencia ya sea por el conductor o por algún otro elemento del circuito.

Se conecta en serie una inductancia de L[Henrio], una resistencia de R [Ω] y un capacitor de [C] Faradios como se muestra en la figura. En el instante t=0 se cierra el circuito y se produce una corriente i(t), la carga incial del capacitor es cero.

i(0)=0= q(0)



$$E = VR + VC + VL$$

$$E = Ri(t) + \frac{q}{C} + \frac{Ldi(t)}{dt} \qquad E = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt + \frac{Ldi(t)}{dt}$$

$$E = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} \qquad \frac{dE(t)}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{C} + L\frac{d^2i(t)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2q}{dt} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L} \qquad \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{LC} = \frac{E}{L}$$

Las dos ecuaciones sea en función de la carga o en función de la corriente tienen el mismo análisis para encontrar la solución homogénea

$$D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} = 0$$

$$r = \underbrace{-\frac{R}{2L}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}_{\beta}$$

Si se resuelve respecto de la carga se puede tener cualquiera de los siguientes casos:

Raíces reales y diferentes

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$$

$$q_H(t) = C_1e^{(\alpha+\beta)t} + C_2e^{(\alpha-\beta)t}$$

Respuesta sobreamortiguada

Raíces reales y repetidas

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$q_H(t) = C_1e^{\alpha t} + tC_2e^{\alpha t}$$

Respuesta críticamente amortiguada

Raíces imaginarias

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$$

$$q_H(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 sen(\beta t)$$

Respuesta subamortiguada

La solución particular se obtiene como:

$$si\ \beta\ \neq w \rightarrow E_0 sen(wt)$$

$$q_p(t) = \left.\frac{E_0 sen(wt)}{L\left(D^2 + \frac{RD}{L} + \frac{1}{LC}\right)}\right|\ D^2 = -w^2$$

O ya sea por coeficientes indeterminados o por variación de parámetros

$$q_T = q_H + q_P$$

$$q_T = \underbrace{q_H}_{TRANSITORIO} + \left.\underbrace{\frac{E_0 sen(wt)}{L\left(D^2 + \frac{RD}{L} + \frac{1}{LC}\right)}}_{ESTACIONARIO}\ \right|\ D^2 = -w^2$$

Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante series de potencias

Anexo B: PROGRAMA DE ASIGNATURA – SÍLABO-PRESENCIAL

1. **DATOS INFORMATIVOS**

<table>
<tr><td>MODALIDAD:
PRESENCIAL</td><td colspan="2">DEPARTAMENTO:
CIENCIAS EXACTAS</td><td colspan="2">AREA DE CONOCIMIENTO:
MATEMÁTICAS</td></tr>
<tr><td>CARRERAS:
PETROQUÍMICA, ELECTRÓNICA, AUTOMOTRIZ, ELECTROMECÁNICA, MECATRÓNICA</td><td colspan="2">NOMBRES ASIGNATURA:

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS</td><td colspan="2">PERÍODO ACADÉMICO:
OCTUBRE 2014 – ENERO 2015</td></tr>
<tr><td>PRE-REQUISITOS:
EXCT11302 CÁLCULO VECTORIAL
EXCT11074 ESTADÍSTICA I</td><td>CÓDIGO:
EXCT 11303</td><td>NRC:
2490</td><td>No. CRÉDITOS:
6</td><td>NIVEL:
TERCERO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CO-REQUISITOS:

EMEC 12037 PROYECTO INTEGRADOR I MCT</td><td rowspan="2">FECHA ELABORACIÓN:
SEPTIEMBRE 2014</td><td colspan="2">SESIONES/SEMANA:</td><td rowspan="2">EJE DE FORMACIÓN
CIENCIAS BASICAS E INFORMATICA</td></tr>
<tr><td>TEÓRICAS:
6H</td><td>LABORATORIOS:
0H</td></tr>
<tr><td colspan="5">DOCENTE:
Ing. Ibeth Delgado</td></tr>
</table>

DESCRIPCIÓN DE LA ASIGNATURA:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias es una materia que aplica el estudiante en el ámbito de la matemática superior, mediante el conocimiento progresivo de teoremas, reglas, principios y técnicas para resolver E.D.O. de primer orden, orden superior, sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones, a fin de que haga suyo el lenguaje de las Ciencias, que es matemática, alrededor de la cual se articula la formación del ingeniero, con ayuda de paquetes computacionales.

CONTRIBUCIÓN DE LA ASIGNATURA A LA FORMACIÓN PROFESIONAL:

Esta asignatura corresponde al eje de formación de ciencias básicas e informática, proporcionando un pensamiento lógico, con bases conceptuales con el apoyo de las asignaturas de cálculo diferencial e integral y física; convirtiéndose en el fundamento de las asignaturas de matemática superior, métodos numéricos y proyecto Integrador 1; fortaleciendo así los cimientos para la formación profesional en las asignaturas de circuitos eléctricos y electrónicos, sistemas de control, diseño mecatrónico de las carreras de ingenierías técnicas.

RESULTADO DE APRENDIZAJE DE LA CARRERA: (UNIDAD DE COMPETENCIA)

MECATRÓNICA

A.2. Modela problemas de ingeniería mediante ecuaciones diferenciales clásicas y aplica las herramientas del análisis matemático y métodos numéricos para obtener las soluciones.

B.4. Diseña circuitos eléctricos y electrónicos utilizando herramientas matemáticas

OBJETIVO DE LA ASIGNATURA:

Identificar y aplicar las diferentes ecuaciones diferenciales ordinarias y sus diferentes formas de solución, como la base matemática de modelos y simulaciones, para el diseño y construcción de máquinas y procesos automatizados, relacionados con eventos físicos, químicos, económicos y específicamente circuitos eléctricos y sistemas mecánicos; vinculados con la ingeniería Mecatrónica con profesionalismo, eficiencia y ética.

RESULTADO DE APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA: (ELEMENTO DE COMPETENCIA)

Resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de orden superior utilizando diferentes métodos de solución, mismos que le sirven en la aplicación de problemas físicos, químicos, vibraciones mecánicas y de circuitos eléctricos.

2. SISTEMA DE CONTENIDOS Y RESULTADOS DEL APRENDIZAJE

<table>
<tr><th>No.</th><th>UNIDADES DE CONTENIDOS</th><th>RESULTADOS DEL APRENDIZAJE
Y SISTEMA DE TAREAS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>UNIDAD 1:
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN Y APLICACIONES.</td><td>Resultados de Aprendizaje de la Unidad 1:
• Identifica y utiliza los métodos de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

• Aplica las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la solución de problemas relacionados a eventos físicos, económicos, químicos, mecánicos y eléctricos.</td></tr>
<tr><td>Contenidos:
1.1 Definiciones preliminares. Definición y clasificación de las Ecuaciones diferenciales, tipos de solución.
1.2 Orígenes de las ecuaciones diferenciales. Ecuación diferencial de una familia de curvas.
1.3 Ecuaciones diferenciales de primer orden. Notaciones, problemas de valor inicial. Teorema de Picard y Peano.
1.4 Campo de direcciones. Uso de software.
1.5 Método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:
1.5.1 Integración directa, variables separables y reducibles a variables separables.
1.5.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas y reducibles a homogéneas.
1.5.3 Ecuaciones diferenciales exactas
1.5.4Factor Integrante
1.6 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli, Ricatti y Clairaut.
1.7 Trayectorias ortogonales e isogonales: coordenadas Rectangulares y polares.
1.8 Problemas de aplicación.Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.</td><td><u>Tarea 1.1:</u>
Leer, analizar y sintetizar la clasificación y el origen de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden relacionando a hechos cotidianos.

<u>Tarea 1.2:</u>
Taller en clase a nivel grupal: Gráficas de los campos de dirección de una ecuación diferencial.

<u>Tarea 1.3:</u>
Resolver ejercicios relacionados con el cálculo de ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando los métodos estudiados.

<u>Tarea 1.4:</u>
Realiza un trabajo grupal sobre la aplicación de los métodos de solución para resolver problemas de trayectorias ortogonales e isogonales, problemas físicos, químicos, eléctricos, etc</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>UNIDAD 2:
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES DE ORDEN SUPERIOR Y APLICACIONES</td><td>Resultados de Aprendizaje de la Unidad 2:
• Identifica y utiliza los métodos de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.
• Aplica las ecuaciones diferenciales ordinarias a la solución de problemas relacionados a eventos mecánicos y eléctricos.</td></tr>
<tr><td>Contenidos:
2.1 Definiciones preliminares
2.2 Problema de valor inicial, y valores en la frontera, dependencia e independencia lineal, teorema de superposición, teorema de linealidad, 2.3 Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.
2.3.1 Operadores diferenciales anuladores: definición y teoremas.
2.3.2 Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior con coeficientes constantes y con segundo miembro distinto de cero.
2.4Método de los coeficientes indeterminados.
2.5 Método de variación de los parámetros.
2.6 Ecuación de Cauchy-Euler
2.7 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden. Movimiento vibratorio libre no amortiguado. Movimiento vibratorio amortiguado. Movimiento vibratorio forzado.</td><td><u>Tarea 2.1:</u>
Leer, analizar e identificar métodos de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior.

<u>Tarea 2.2:</u>
Resolver ejercicios relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.

<u>Tarea 2.3:</u>
Taller de aplicación: movimiento vibratorio libre no amortiguado, en el movimiento vibratorio libre amortiguado y vibratorio forzado.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>UNIDAD 3:
SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON SERIES DE POTENCIAS</td><td>Resultados de Aprendizaje de la Unidad 3:
• Identifica y aplica propiedades y criterios de convergencia de series en ejercicios teóricos.
• Resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales mediante series de potencias.</td></tr>
<tr><td></td><td>Contenidos:
3.1. Introducción al estudio de series y sucesiones
3.2. Convergencia de series
3.3. Series geométrica: Convergencia
3.4. Propiedades de las series
3.5. Criterios de convergencia.
3.6. Convergencia absoluta y condicional
3.7. Series de potencias.
3.8. Radio e intervalo de convergencia.
3.9. Derivación e integración de una serie de potencias.
3.10. Series de Taylor y Mclaurin.- aplicaciones.
3.11. El método de la series de potencias.
3.12. Funciones Especiales.
3.13. Ecuaciones de Legendre y Bessel.
3.14. Método extendido de la serie de potencias.</td><td><u>Tarea 3.1:</u>
Identificar y utilizar las propiedades de series y sucesiones, criterios de convergencia para resolver ejercicios relacionados con el tema.

<u>Tarea 3.2:</u>
Expresar funciones elementales mediante series de potencias aplicando Taylor y Mclaurin.

<u>Tarea 3.3:</u>
Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias usando series de potencia y contrastando con métodos anteriores.

<u>Tarea 3.4:</u>
Resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes no constantes usando series de potencia.</td></tr>
<tr><td></td><td>UNIDAD 4:
TRANSFORMADA DE LAPLACE Y SISTEMAS EDO.</td><td>Resultados de Aprendizaje de la Unidad 4:
• Identifica las funciones elementales escalón, pulso e impulso como señales de control y aplica la transformada directa e inversa de Laplace.

• Aplica la transformada de Laplace, métodos de los coeficientes indeterminados y de variación de parámetros a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.</td></tr>
<tr><td></td><td>Contenidos:
4.1 Definición y propiedades de la Transformada de Laplace.
4.2 Transformada de algunas funciones elementales
4.3 Transformada de derivadas.
4.4 Transformada de integrales.
4.5 Funciones Singulares y sus transformadas de Laplace
4.6 Transformada Inversa de Laplace
4.6.1 Forma Directa
4.6.2 Fracciones Parciales y completación de cuadrados
4.6.3 Propiedad inversa de la derivada
4.6.4 Convolución
4.7 Aplicaciones de la Transformada de Laplace en la solución de EDO
4.8 Solución de Sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando Transformadas de Laplace
4.9 Solución en forma matricial de Sistemas de EDO de primer orden
4.9.1 Uso de valores y vectores propios para resolver sistemas homogéneos de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden
4.9.2 Método de coeficientes indeterminados para sistemas no homogéneos de EDO de primer orden
4.9.3 Método de variación de parámetros para sistemas no homogéneos de EDO de primer orden</td><td><u>Tarea 4.1:</u>
Aplicar las definiciones, conceptos y propiedades de la transformada de Laplace.

<u>Tarea 4.2:</u>
Utilizar reglas y tablas de las transformadas de Laplace para resolver ejercicios.

<u>Tarea 4.3:</u>
Aplicar con criterio las leyes de las transformadas directa e inversa de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden “n”.

<u>Tarea 4.4:</u>
Leer, analizar y sintetizar la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales.

<u>Tarea 4.5</u>
Aplicar los métodos de solución de sistemas lineales a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden.</td></tr>
</table>

3. PROYECCIÓN METODOLÓGICA Y ORGANIZATIVA PARA EL DESARROLLO DE LA ASIGNATURA

(PROYECCIÓN DE LOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE QUE SE UTILIZARÁN)

- El estudiante deberá leer los artículos científicos, lecturas recomendadas, previa su asistencia a las sesiones, de acuerdo a la programación definida para cada sesión, a fin de que exista una interacción fundamentada.
- Consultas puntuales podrán ser hechas al profesor mediante el uso del correo electrónico.
- El profesor actuará como un facilitador, por lo tanto, es su obligación diseñar estrategias y actividades de aprendizaje, que oriente a los estudiantes en qué hacer con la información científica actualizada.
- Las tareas y actividades planteadas en la metodología permitirán el desarrollo de las capacidades mentales de orden superior en los estudiantes (análisis, síntesis, reflexión, pensamiento crítico, pensamiento sistémico, pensamiento creativo, manejo de información, investigación, metacognición, entre otros).
- La nota de participación en los encuentros será evaluada de acuerdo a la calidad de los aportes que los estudiantes realicen en las discusiones en clase, o a los aportes adicionales vía correo electrónico.
- A través de preguntas y participación de los estudiantes el docente recuerda los requisitos de aprendizaje previos que permite al docente conocer cuál es la línea de base a partir del cual incorporará nuevos elementos de competencia, en caso de encontrar deficiencias enviará tareas para atender los problemas individuales.
- Plantear interrogantes a los estudiantes para que den sus criterios y puedan asimilar la situación problemática.
- Se iniciará con explicaciones orientadoras del contenido de estudio, donde el docente plantea los aspectos más significativos, los conceptos, leyes y principios y métodos esenciales; y propone la secuencia de trabajo en cada unidad de estudio.
- Se buscará que el aprendizaje se base en el análisis y solución de problemas.

PROYECCIÓN DEL EMPLEO DE LAS TIC EN LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE

- Utilización del Aula Virtual como soporte a las clases presenciales en el trayecto de todo el período académico.
- Se utilizará el software maple, derive, matlab, winplot para la graficación de familia de ecuaciones diferenciales, estudiantes campos de direcciones y trayectorias ortogonales e isogonales.

Se empleará proyector de datos, computadora portátil para impartir clases presenciales en donde lo amerite**.**

4. RESULTADOS DEL APRENDIZAJE, CONTRIBUCIÓN AL PERFIL DE EGRESO Y TÉCNICA DE EVALUACIÓN.

LOGRO O RESULTADOS DE APRENDIZAJE	NIVELES DE LOGRO			Técnica de evaluación	Evidencia del aprendizaje
	A Alta	B Media	C Baja		
1) Identifica y utiliza los métodos de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.	x			Resolución de ejercicios	Ejercicios resueltos mediante la utilización de los diferentes métodos de solución de EDO
2) Aplica las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la solución de problemas relacionados a eventos físicos, económicos, químicos, mecánicos y eléctricos.		x		Exposición grupal de la Investigación y análisis de las aplicaciones de las EDO. Solución de problemas	Informe completo y documentado
3) Identifica y utiliza los métodos de solución para ecuaciones	x			Talleres identificación de los distintos	Ejercicios resueltos en clase

diferenciales ordinarias de orden superior.				métodos de solución	
4)Aplica las ecuaciones diferenciales ordinarias a la solución de problemas relacionados a eventos mecánicos y eléctricos.		x		Solución de problemas	EDO de diferente orden resueltas aplicando los distintos métodos. Pruebas de solución de ejercicios
5) Resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales mediante series de potencias.		x		Resolución de ejercicios	Pruebas de solución de ejercicios
6) Identifica las funciones elementales escalón, pulso e impulso como señales de control y aplica la transformada directa e inversa de Laplace.	x			Resolución de ejercicios	Desarrollo de evaluaciones con solución de ejercicios. Deberes resueltos documentados
7) Aplica la transformada de Laplace, métodos de los coeficientes indeterminados y de variación de parámetros a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.	x			Solución de ejercicios	Ejercicios resueltos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales por los diferentes métodos estudiados

5. DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO:

TOTAL HORAS	CONFERENCIAS	CLASES PRÁCTICAS	LABORATORIOS	CLASES DEBATES	CLASES EVALUACIÓN	TRABAJO AUTÓNOMO DEL ESTUDIANTE
96	**30**	**32**	**0**	**4**	**18**	**96**

6. TÉCNICAS Y PONDERACIÓN DE LA EVALUACIÓN.

Técnica de evaluación	1er Parcial*	2do Parcial*	3er Parcial*
Resolución de ejercicios	**1**	**1**	**1**
Investigación Bibliográfica	**2**	**2**	**2**
Lecciones oral/escrita	**1**	**1**	**1**
Pruebas orales/escrita	**5**	**5**	**5**
Laboratorios			
Talleres	**2**	**2**	**2**
Solución de problemas			
Prácticas			
Exposición	**1**	**1**	**1**
Trabajo colaborativo	**1**	**1**	**1**
Examen parcial	**7**	**7**	**7**
Otras formas de evaluación			
Total:	**20**	**20**	**20**

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA/ TEXTO GUÍA DE LA ASIGNATURA

TITULO	AUTOR	EDICIÓN	AÑO	IOMA	EDITORIAL
Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado	DENNIS ZILL	Octava	2009	Español	Cengage Learning
Análisis matemático III: para estudiantes de ciencias e ingeniería	EDUARDO ESPINOZA RAMOS	Segunda	2008	Español	Servicios Gráficos J.J
Ecuaciones diferenciales : valores con problemas en la frontera, cómputo y modelado	C. HENRY EDWARDS Y DAVID E. PENNEY	Cuarta	2009	Español	Pearson Educación
Ecuaciones diferenciales ordinarias: una introducción http://www.bibliotechnia.com/bibliotechnia20/index.php?option=com_libros&task=read2&id=6864&bookmark=1&Itemid=6	FERNANDO MESA	Primera	2012	Español	Eco Ediciones
ECUACIONES DIFERENCIALES http://www.bibliotechnia.com/bibliotechnia20/index.php?option=com_libros&task=read2&id=4987&bookmark=1&Itemid=6	ISABEL CARMONA JOVER	Quinta	2011	Español	Pearson Educación

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

TITULO	AUTOR	EDICIÓN	AÑO	IDIOMA	EDITORIAL
Análisis matemático	JORGE LARA PRADO Y JORGE ARROBA R	Quinta	2011	Español	Universidad Central del Ecuador
Cálculo diferencial e integral	EDWIN J. PURCELL, DALEVARBERG Y STEVEN E. RIGDON	Novena	2007	Español	Pearson Educación
Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna	HENRY RICARDO		2008	Español	Reverté
Ecuaciones diferenciales: un enfoque de modelado	GLENN LEDDER		2008	Español	Mcgraw-Hill

Anexo C: PLAN DE CLASE DIARIO

DATOS INFORMATIVOS:

Departamento: Ciencias Exactas	Carrera: Ingeniería Mecatrónica	Tema de la clase: MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE UNA EDO VARIABLES SEPARABLES Y REDUCCIÓN A VARIABLES SEPARABLES
Área de Conocimiento: Matemáticas	Asignatura: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	
Docente : Ibeth Delgado	Curso/Paralelo: Tercero “A”	
Fecha:	Duración de la clase: 2h	
Periodo académico: Abril- Agosto		

DESPLIEGUE DEL PROCESO:

OBJETIVO CLASE:	LOGRO DE APRENDIZAJE (A - K):
Identificar las características de las EDO que pueden ser resueltas por el método de variables separables, analizarlas y aplicarlas de manera eficaz a la solución de problemas.	B. El estudiante trabaja en equipo y en forma multidisciplinaria. D. El estudiante identifica, analiza y resuelve ejercicios y problemas prácticos de EDO por el método más conveniente: variables separables, homogéneas, exactas y/o EDO lineales de primer orden. F. Establece modelos de ecuaciones diferenciales para abordar problemas de aplicación que se presten para hacerlo. J. El estudiante debe comprometerse con el aprendizaje continuo e investigación en otras fuentes de información.

MATRIZ DE PLANIFICACIÓN:

FASES DE LA CLASE	PROCESO METODOLÓGICO		TIEMPO APROX.	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
	ACTIVIDADES DOCENTES	ACTIVIDADES ESTUDIANTES		
INICIAL	Motivación: Discutir acerca de algunas curiosidades matemáticas tales como el número de oro, ayudarse del video: https://www.youtube.com/watch?v=j9e0auhmxnc Diagnóstico: Preguntas para establecer el conocimiento previo de los estudiantes. ¿Cuáles son las técnicas de integración que Usted conoce? ¿Qué operaciones matemáticas básicas son las más útiles para optimizar la solución de integrales? Planteamiento del Tema: ¿Recuerda los casos elementales de integración? ¿Reconoce a una EDO? ¿Conoce a algún método de resolución de las EDO? ¿Conoce el método de solución de una EDO por variables separables o reducibles a las mismas?	Diálogo acerca del video. Contestar preguntas para evaluar grado de conocimiento adquirido en la clase anterior. Crear una idea de del tema a tratarse en la clase por medio de las preguntas planteadas.	20 min	Actuación en clase Participación en el aula Resolución de un ejercicio de cualquiera de los casos analizados

	¿Conoce el modelo matemático del crecimiento poblacional o del drenado de un tanque? ¿Tiene alguna idea de cómo darle solución a una EDO y las aplicaciones prácticas en las que se lo puede emplear?			
DESARROLLO	Aplicación de métodos, técnicas, procedimientos y actividades: Reflexión: Desarrollo Conceptualización: Exposición Aplicación: Desarrollo de los métodos de variables separables y reducibles a las mismas. Experiencia: Métodos de solución, aplicaciones en la vida cotidiana a través de modelos de crecimiento poblacional, desintegración radiactiva, eliminación de medicamentos, Vaciado de tanques Medios: Solución de ejercicios y modelación en MODELLUS se apreciará la aplicación	Establece ejemplos de EDO por variables separables y reducibles a las mismas. Solución de ejercicios y problemas. Respuesta á de los estudiantes.	80 min	
FINAL	Evaluación: Solución de ejercicios	Solución de ejercicios y problemas de una EDO: Identificación, análisis, representación gráfica, método de solución por variables separables y reducibles a las mismas.	20 min	
TIEMPO TOTAL DE LA CLASE			2 h	

ACTIVIDADES PARA LA SIGUIENTE CLASE:

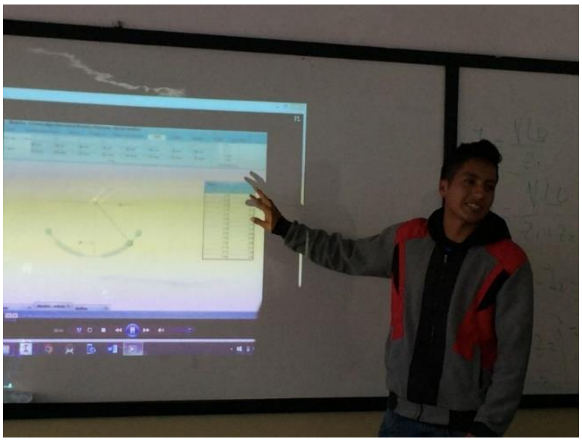
Libro Dennis Zill. Ecuaciones Diferenciales. 9 Edición. Capítulo 2. Páginas 50, 51, ejercicios: 1-59, impares. Libro Henry Edwards- Davis Penney. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores de Frontera. Capítulo 1. Página 43-46, ejercicios 1-69. Múltiplos de 5	Medios y Equipos: Pizarrón, Proyector, Video de aplicaciones, diapositivas, texto guía. Coordinaciones: Comandante de Curso

COORDINADOR ÁREA DE MATEMATICAS

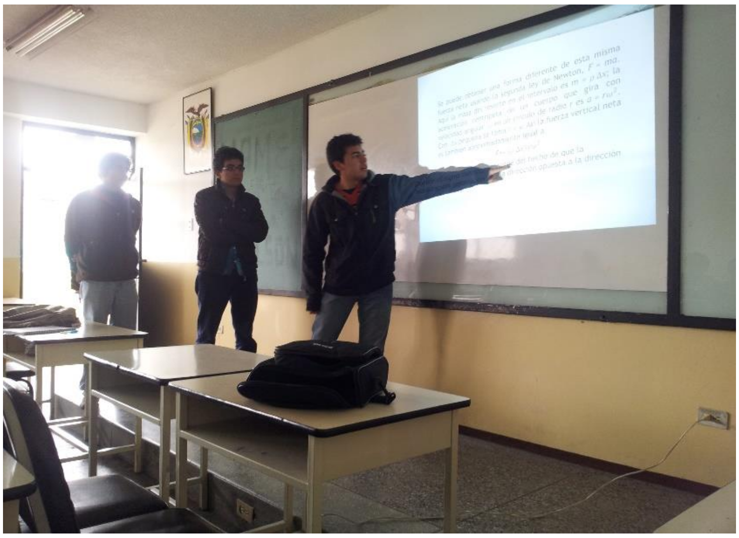
Ing. Ibeth Delgado
DOCENTE

Anexo D: EVIDENCIAS

GRUPO EXPERIMENTAL



GRUPO DE CONTROL



PRUEBA DIAGNÓSTICA

GRUPO EXPERIMENTAL Y DE CONTROL

UNIDAD UNO

PRUEBA PARCIAL 1

14-04-2014

Identifique la variable dependiente y la variable independiente y luego determine el orden , el grado y la linealidad (explique) de las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - x^2y = \cos(x)$$

$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = \text{tang (y)}$ (4p)

$$\frac{d^2x}{dy^2} - \cos(y)\frac{dx}{dy} + x = e^{-y}$$

$$D_x{}^3y + D_x{}^2y + y = 3x^2 - 1$$

Verifique que la función $G(x) = \int_{-1}^{1} \frac{Cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$, x≠0; es solución de la ecuación diferencial (4p) $G''(x) + \frac{G'(x)}{x} + G(x) = 0$

Dibuje la familia de curvas que representa la solución de la ecuación diferencial siguiente: $x\frac{dy}{dx} + y = 2$

Señale la solución para y(1)=2 (4p)

Resolver:

$(x^2y - x^2 + y - 1)dx + (xy + 2x - 3y - 6)dy = 0$ (4p)

$(x + y - 4)dx - (3x - y - 4)dy = 0$ y(4)=1 (4p)

PRUEBA FINAL

GRUPO EXPERIMENTAL Y DE CONTROL

UNIDAD UNO

PP3

09-05-2014

Desarrolle en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Determine una ecuación diferencial que describa el siguiente escenario:

En una ciudad con una población fija de P personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo t del número N de personas que han contraído cierta enfermedad contagiosa es proporcional al producto del número de quienes están enfermas y el número de las que no están.

(2P)

2. Un automóvil que va a 60 mi/h (88 pies/s) patina 176 pies después de que se aplica repentinamente los frenos. Bajo la suposición de que el sistema de frenado proporciona desaceleración constante.

a) Cuál es esa desaceleración? (1p)

b) Durante cuánto tiempo continuará el derrape? (1p)

3. Cuando nació su primer su hijo, una pareja depositó 5000 usd en una cuenta de ahorros que paga el 8% de interés compuesto continuamente. Se dejó que se acumularan los intereses devengados. A cuánto ascenderá la cuenta en el decimoctavo cumpleaños del niño?

(2P)

*4. Un tanque contiene 1000 lt (litros) de una solución que consta de 100 kg de sal disueltos en el agua. Se bombea agua pura hacia el tanque a razón de 5 lt/s (litros por segundo) y la mezcla que se mantiene uniforme mediante agitación- se extrae a la misma razón. Cuánto tiempo pasará antes de que queden solamente 10 kg de sal en el tanque?

Aplicaciones Geométricas

6. Hallar la ecuación de la curva cuya tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área A = 2 u^2. (primero haga un bosquejo de las curvas dadas y luego de las ortogonales) (4P)

7- Halle una fórmula para la corriente en cualquier tiempo t y calcule la corriente después de un segundo para un circuito serie, si R=10[Ω], L=10 [H], E=e^t [V], en el instante t=0 se cierra el interruptor. (4P)

a)Realice el diagrama del circuito

b) Escriba las ecuaciones que rigen el comportamiento del circuito.

c) Encuentre i(t)

d) Analice la respuesta para t=1 seg

8. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x^2(y')^2 + 4xyy' + 3y^2 = 0 \qquad (4P)$$