



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

INSTITUTO DE POSGRADO Y EDUCACIÓN CONTINUA

**“TELE-OPERACIÓN BILATERAL DE UN ROBOT
MANIPULADOR MÓVIL”**

**Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo,
presentado ante el Instituto de Postgrado y Educación Continua de la ESPOCH,
como requisito parcial para la obtención del grado de MAGISTER EN SISTEMAS
DE CONTROL Y AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL.**

AUTOR: Ing. JOSÉ LUIS VARELA ALDÁS

TUTOR: Ing. VÍCTOR H. ANDALUZ Ph.D.

RIOBAMBA – ECUADOR

Noviembre 2016

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
INSTITUTO DE POSTGRADO Y EDUCACIÓN CONTINUA

CERTIFICACIÓN

EL TRIBUNAL DEL TRABAJO DE TITULACIÓN CERTIFICA QUE:

El Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo titulado “Tele-Operación Bilateral de un Robot Manipulador Móvil”, de responsabilidad del Ing. José Luis Varela Aldás ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.

Tribunal:

Dr. Juan Vargas Guambo.

PRESIDENTE

FIRMA

Ing. Víctor H. Andaluz, Ph.D.

DIRECTOR

FIRMA

Ing. David Rivas, M.Sc.

MIEMBRO

FIRMA

Ing. Jorge Sánchez, M.Sc.

MIEMBRO

FIRMA

Riobamba, noviembre de 2016

©2016, José Luis Varela Aldás

Se autoriza la producción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de autor

DERECHOS INTELECTUALES

Yo, José Luis Varela Aldás, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en el **Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo**, y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Ing. José Luis Varela Aldás

C.I. 2200117758

DEDICATORIA

A Dios; a mi mamita linda y al único padre que conocí; a mi ñañita y ñañito; a mi esposa hermosa y a mi familia.

José Varela.

AGRADECIMIENTO

Al Todopoderoso; a mis padres y hermanos; a mi esposa hermosa; a mi familia, profesores y amigos; a mis amigos Víctor, Jorge, David y a todos los gatos del laboratorio por esa incondicional amistad; al Consorcio Ecuatoriano para el Desarrollo Del Internet Avanzado (CEDIA), por permitirme forma parte del proyecto de investigación “Teleoperación bilateral de múltiples manipuladores móviles”.

José Varela.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

CARÁTULA.....	i
CERTIFICACIÓN.....	ii
DERECHOS INTELECTUALES.....	iv
DEDICATORIA.....	v
AGRADECIMIENTO.....	vi
ÍNDICE DE CONTENIDOS.....	vii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	x
RESUMEN.....	xvii
SUMMARY.....	xviii
CAPÍTULO I.....	1
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Formulación del Problema.....	2
1.2 Preguntas Directrices.....	2
1.3 Justificación de la Investigación.....	3
1.4 Objetivos de la Investigación.....	4
1.4.1 Objetivo General.....	4
1.4.2 Objetivos Específicos.....	4
1.5 Hipótesis.....	5
CAPÍTULO II.....	6
2 MARCO TEÓRICO.....	6
2.1 Antecedentes del Problema.....	6
2.2 Bases Teóricas.....	7
2.2.1 Manipuladores Móviles.....	7
2.2.2 Modelación Matemática.....	15

2.2.3 Control de Robots	15
2.2.4 Tele-operación de Robots	17
CAPÍTULO III.....	21
3 MODELACIÓN MATEMÁTICA	21
3.1 Modelo Cinemático.....	21
3.1.1 Modelo Cinemático de la Plataforma Móvil.....	21
3.1.2 Modelo Cinemático del Brazo Manipulador	23
3.1.3 Modelo Cinemático del Manipulador Móvil	25
3.2. Modelo Dinámico	27
3.2.1 Modelo Dinámico de la Plataforma Móvil	27
3.2.2 Modelo Dinámico del Brazo Manipulador	34
3.2.3 Modelo Dinámico del Manipulador Móvil.....	43
CAPÍTULO IV.....	65
4 TELE-OPERACIÓN BILATERAL	65
4.1 Esquema de Tele-operación Bilateral	65
4.2 Control del Robot Móvil.....	66
4.2.1 Control Cinemático.....	67
4.2.2 Control Dinámico	68
4.3 Control del Robot Manipulador	70
4.3.1 Control Cinemático.....	70
4.3.2 Control Dinámico	72
4.4 Control del Robot Manipulador Móvil	73
4.4.1 Control Cinemático.....	74
4.4.2 Control de Redundancia.....	76
4.4.3 Control Dinámico	78
4.5 Fuerzas Ficticias	79
4.5.1. Retroalimentación de Fuerzas.....	80

4.5.2 Evasión de Obstáculos	81
4.6 Canal de Comunicación	81
4.7 Manipulador Móvil	83
4.8 Tele-operación Bilateral	84
CAPÍTULO V	86
5 RESULTADOS	86
5.1 Resultados De Manipulabilidad	86
5.1.1 Manipulabilidad del Brazo Robótico	86
5.1.2 Manipulabilidad del Manipulador Móvil.....	87
5.2 Validación del Modelo Dinámico	88
5.2.1 Validación de la Plataforma Móvil.....	88
5.2.2 Validación del Manipulador	89
5.2.3 Validación del Manipulador Móvil.....	91
5.3 Resultados del Control	93
5.3.1 Controlador del Robot Móvil.....	93
5.3.2 Controlador del Robot Manipulador.....	101
5.3.3 Controlador del Robot Manipulador.....	110
5.3.4 Resultados de Tele-operación	119
CAPÍTULO VI.....	128
6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	128
6.1 Conclusiones	128
6.2 Recomendaciones	129
BIBLIOGRAFÍA	130
ANEXOS.....	133

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-2. KUKA KMR iiwa	7
Figura 2-2. KUKA KMP omniMove.....	9
Figura 3-2. Tipos de robots móviles según la locomoción	10
Figura 4-2. Disposición de las ruedas en un Robot Móvil	11
Figura 5-2. Estructuras básicas de un robot Manipulador	13
Figura 6-2. Componentes de un Sistema de Tele-Operación	17
Figura 7-2. Aplicaciones de la Tele-operación	18
Figura 8-2. Sistema de Tele-operación Bilateral	20
Figura 1-3. Parámetros del modelo cinemático del robot móvil	22
Figura 2-3. Manipulador de 3 Grados de Libertad	23
Figura 3-3. Manipulador móvil.....	25
Figura 1-4. Esquema de Tele-operación	66
Figura 2-4. Esquema de control para el robot móvil	66
Figura 3-4. Parámetros del seguimiento de trayectoria del robot móvil.....	67
Figura 4-4. Esquema de control para el manipulador.....	70
Figura 5-4. Parámetros del control de posición del robot manipulador	71
Figura 6-4. Esquema de control para manipulador móvil	74
Figura 7-4. Parámetros de seguimiento de trayectoria para el manipulador móvil	75
Figura 8-4. Dispositivo háptico: Falcon Novint	79
Figura 9-4. Sensor laser: URG-04LX-UG01	80
Figura 10-4. Parámetros para retroalimentación de fuerzas y evasión de obstáculos .	80

Figura 11-4. Esquema de comunicación para el intercambio de datos.....	82
Figura 12-4. Esquema de comunicación para la transmisión de video.....	82
Figura 13-4. Robot manipulador móvil Akasha	83
Figura 14-4. Motor Inteligente Dynamixel Pro	83
Figura 15-4. Relación de control Falcon Novint - manipulador móvil	84
Figura 16-4. Disposición de botones del Falcon Novint	85
Figura 17-4. Diagrama de flujo del esquema de tele-operación bilateral.....	85
Figura 1-5. Manipulabilidad del brazo robótico	86
Figura 2-5. Elipsoides de manipulabilidad del brazo robótico	87
Figura 3-5. Manipulabilidad del manipulador móvil.....	87
Figura 4-5. Elipsoides de manipulabilidad del manipulador móvil.....	88
Figura 5-5. Validación 1 del modelo dinámico de la plataforma móvil	89
Figura 6-5. Validación 2 del modelo dinámico de la plataforma móvil	89
Figura 7-5. Validación 1 del modelo dinámico de robot manipulador.....	90
Figura 8-5. Validación 2 del modelo dinámico de robot manipulador.....	91
Figura 9-5. Validación 1 del modelo dinámico de robot manipulador móvil	92
Figura 10-5. Validación 2 del modelo dinámico de robot manipulador móvil	92
Figura 11-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil	93
Figura 12-5. Reproducción virtual: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	94
Figura 13-5. Errores de control: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	94

Figura 14-5. Velocidades de control: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	95
Figura 15-5. Movimiento Estroboscópico: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil	95
Figura 16-5. Reproducción virtual: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	96
Figura 17-5. Errores de control: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	96
Figura 18-5. Velocidades de control: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	97
Figura 19-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil	98
Figura 20-5. Reproducción virtual: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	98
Figura 21-5. Errores de control: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	99
Figura 22-5. Velocidades: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	99
Figura 23-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil	100
Figura 24-5. Reproducción virtual: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	100
Figura 25-5. Errores de control: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	101
Figura 26-5. Velocidades: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.....	101

Figura 27-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 1 del posicionamiento de robot manipulador	102
Figura 28-5. Reproducción virtual: Simulación 1 del posicionamiento de robot manipulador	103
Figura 29-5. Errores de control: Simulación 1 del posicionamiento de robot manipulador	103
Figura 30-5. Velocidades de control: Simulación 1 del posicionamiento de robot manipulador	104
Figura 31-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 2 del posicionamiento de robot manipulador	104
Figura 32-5. Reproducción virtual: Simulación 2 del posicionamiento de robot manipulador	105
Figura 33-5. Errores de control: Simulación 2 del posicionamiento de robot manipulador	105
Figura 34-5. Velocidades de control: Simulación 2 del posicionamiento de robot manipulador	106
Figura 35-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 1 del posicionamiento de robot manipulador.....	107
Figura 36-5. Reproducción virtual: Experimentación 1 del posicionamiento de robot manipulador	107
Figura 37-5. Errores de control: Experimentación 1 del posicionamiento de robot manipulador	108
Figura 38-5. Velocidades: Experimentación 1 del posicionamiento de robot manipulador	108
Figura 39-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 2 del posicionamiento de robot manipulador.....	109

Figura 40-5. Reproducción virtual: Experimentación 2 del posicionamiento de robot manipulador	109
Figura 41-5. Errores de control: Experimentación 2 del posicionamiento de robot manipulador	110
Figura 42-5. Velocidades: Experimentación 2 del posicionamiento de robot manipulador	110
Figura 43-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	111
Figura 44-5. Reproducción virtual: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	112
Figura 45-5. Errores de control: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	112
Figura 46-5. Velocidades de control: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil	113
Figura 47-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	113
Figura 48-5. Reproducción virtual: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	114
Figura 49-5. Errores de control: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	114
Figura 50-5. Velocidades de control: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil	115
Figura 51-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	116
Figura 52-5. Reproducción virtual: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil	116

Figura 53-5. Errores de control: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil	117
Figura 54-5. Velocidades: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	117
Figura 55-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	118
Figura 56-5. Reproducción virtual: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil	118
Figura 57-5. Errores de control: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria del robot manipulador móvil	119
Figura 58-5. Velocidades: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.....	119
Figura 59-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.....	120
Figura 60-5. Reproducción virtual: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.....	121
Figura 61-5. Velocidades en el extremo operativo: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil	122
Figura 62-5. Velocidades en el robot móvil: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.....	122
Figura 63-5. Errores del control de posición: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.....	123
Figura 64-5. Velocidades de reales y de control: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.....	123
Figura 65-5. Retardos de comunicación y procesamiento: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil	124

Figura 66-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.....	124
Figura 67-5. Reproducción virtual: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.....	125
Figura 68-5. Velocidades en el extremo operativo: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil	125
Figura 69-5. Errores del control de posición: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.....	126
Figura 70-5. Velocidades reales y de control: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.....	126
Figura 71-5. Fuerzas ficticias: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.....	127

RESUMEN

Desarrollo de un esquema para la tele-operación bilateral de un robot manipulador móvil. Un manipulador robótico montado sobre una base móvil posee tanto la destreza de los manipuladores robóticos y la movilidad de un vehículo, y es una solución versátil que ofrece un gran potencial en una amplia variedad de aplicaciones. Para la implementación del sistema de tele-operación se realizó la modelación cinemática y dinámica del manipulador móvil mediante expresiones matriciales. Los actuadores inteligentes que conforman el robot se controlaron mediante las librerías de MATLAB de comunicación RS-485. El esquema de tele-operación bilateral propuesto consideró la compensación dinámica del manipulador móvil, además se incluyó la realimentación de fuerzas en el sitio local. Por último, usando el control de redundancia se solucionó la configuración del brazo robótico y la evasión de obstáculos. Partiendo de los resultados obtenidos se concluyó que el sistema permite una combinación de manipulabilidad y locomoción en el sitio de trabajo demostrando un adecuado funcionamiento del sistema. Se recomienda analizar el contenido de este trabajo, para determinar el estado de nuestro país en relación a los avances tecnológicos del campo de la robótica.

PALABRAS CLAVES: <TECNOLOGÍAS Y CIENCIAS DE LA INGENIERÍA>, <INGENIERÍA DEL CONTROL AUTOMÁTICO>, <TELE-OPERACIÓN BILATERAL>, <MANIPULADOR MÓVIL>, <COMPENSACIÓN DINÁMICA>, <REALIMENTACIÓN DE FUERZAS>, <CONTROL DE REDUNDANCIA>, <EVASIÓN DE OBSTÁCULOS>.

SUMMARY

Development of a scheme for the bilateral tele-operation of a mobile manipulator robot. A robotic manipulator mounted on a mobile base possesses both the dexterity of robotic manipulators and the mobility of a vehicle, and is a versatile solution that offers great potential in a wide variety of applications. For the implementation of the tele-operation system, the kinematic and dynamic modeling of the mobile manipulator was performed using matrix expressions. The intelligent actuators that make up the robot were controlled by the MATLAB libraries of RS-485 communication. The proposed bilateral tele-operation scheme considered the dynamic compensation of the mobile manipulator, and also the force feedback was included at the local site. Finally, using the redundancy control the configuration of the robotic arm and the avoidance of obstacles were solved. Based on the results obtained, it was concluded that the system allows a combination of manipulation and locomotion in the workspace demonstrating an adequate functioning of the system. It is recommended to analyze the content of this work, to determine the state of our country in relation to technological advances in the field of robotics.

KEYWORDS: <TECHNOLOGIES AND SCIENCES ENGINEERING>, <AUTOMATIC CONTROL ENGINEERING>, <BILATERAL TELE-OPERATION>, <MOBILE MANIPULATOR>, <DYNAMIC COMPENSATION>, <FORCE FEEDBACK>, <REDUNDANCE CONTROL>, <EVASION OF OBSTACLE>.

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN

La implementación de sistemas robóticos para la resolución de problemas industriales, médicos, militares y otros, actualmente ha generado gran interés en todo el mundo (Andaluz, *et al.*, 2014; Fareh & Rabie, 2015). De esta manera, con el propósito de mejorar los sistemas de control existentes en el campo de estudio, se diseña la mejor alternativa para cumplir los requerimientos del problema. Los algoritmos desarrollados en las investigaciones más recientes permiten un alto grado de autonomía, y cuando de maniobrabilidad se trata, los manipuladores son la mejor opción (Xianghua Chu, *et al.*, 2015). Si se necesita añadir movilidad a las ventajas que presta un brazo robótico se presenta el manipulador móvil, que se caracteriza por un alto grado de redundancia, esto le permite un mayor espacio de trabajo debido a la combinación de traslación (locomoción) y manipulación (Kot, *et al.*, 2014).

Aún con todos los beneficios que ofrece un manipulador móvil autónomo, existen tareas que requieren la experticia que posee el operador humano, como es, en el campo de la medicina y ciertos procesos militares que necesitan la intervención de un controlador responsable de la toma de decisiones (Herdocia, *et al.*, 2012; Zhao, *et al.*, 2015). Y si las condiciones de operación son remotas respecto al entorno de trabajo del robot se obtiene el proceso conocido como tele operación.

La tele-operación de robots implica manejar un robot a distancia para realizar alguna tarea dada permitiendo de esta manera, que un operador humano pueda transportar su capacidad y destreza hacia ambientes de trabajos remotos y peligrosos, minimizando de esa manera los riesgos asociados o alcanzar lugares inaccesibles por el hombre. Así, se puede extender la inteligencia y experiencia de expertos hacia aplicaciones a distancia (Lee, *et al.*, 2013).

Los sistemas de tele-operación están constituidos por una estación o sitio de trabajo local, donde se encuentra el operador humano que manipula un robot o un dispositivo generando comandos de control y además recibe información visual de imagen y táctil de fuerza; un

lugar de trabajo o sitio remoto, donde un robot realiza una tarea determinada en interacción con un medio o entorno de trabajo, y un canal de comunicación bidireccional, que vincula ambos sitios (Ang, *et al.*, 2013).

Al momento de enlazar todos los elementos que hacen posible la tele-operación bilateral existen varios problemas a ser tomados en cuenta; empezando con el tipo de dispositivo háptico que permite al operador transmitir sus habilidades desde el sitio local, y el encargado de generar las sensaciones reales de tele-operación; además, del algoritmo de control que introduce la señales de movimiento hacia todo el robot ubicado en la estación remota, a partir de la interpretación de la información enviada desde el sitio local; pero el mayor inconveniente se presenta en el tiempo de respuesta de la comunicación bidireccional de datos, debido a que un excesivo retardo podría terminar en daños perjudiciales para el robot o el entorno de trabajo.

1.1 Formulación del Problema

¿Cómo influye un sistema de control en lazo cerrado en un esquema de tele-operación bilateral de un robot manipulador móvil tipo unicycle en ambientes parcialmente estructurados?

1.2 Preguntas Directrices

¿Cuáles son las técnicas de tele-operación bilateral de un robot?

¿Cómo se analiza el movimiento coordinado de un brazo robótico montado sobre una plataforma móvil con ruedas?

¿Cómo se realiza la tele-operación bilateral de los movimientos del extremo operativo de un robot manipulador móvil tipo unicycle?

¿Cuál es el desempeño del esquema de tele-operación bilateral para el control acoplado de un robot manipulador móvil?

1.3 Justificación de la Investigación

Según la planificación estratégica del Buen Vivir del Ecuador para el año 2013-2017, se plantea en el objetivo 10, impulsar la transformación de la matriz productiva, en referencia al lineamiento 10.2 que expresa “Promover la intensidad tecnológica en la producción primaria, de bienes intermedios y finales”, y específicamente en el literal a) que señala “Articular la investigación científica, tecnológica y la educación superior con el sector productivo, para una mejora constante de la productividad y competitividad sistémica, en el marco de las necesidades actuales y futuras del sector productivo y el desarrollo de nuevos conocimientos” (SEMPLADES, 2013). Por lo tanto, es impórtate fomentar el desarrollo de investigaciones en áreas científicas y tecnológicas con el fin de mejorar los procesos de producción y la prestación de innovadores servicios.

Un sistema de tele-operación permiten integrar métodos de automatización complejos y la capacidad del hombre con el fin de cubrir requerimientos actuales de tareas como son la reparaciones en reactores nucleares, mantenimiento de satélites comandados desde tierra, desactivación de artefactos explosivos, misiones de rescates, búsquedas submarinas, extinción de fuegos a distancia, inspección y monitoreo de ambientes peligrosos, o en donde se requiera que el ser humano no este expuesto a daños físicos e inaccesibles (Nahavandi, *et al.*, 2015).

Un perfeccionamiento de las técnicas de tele-operación podría impulsar el desarrollo de nuevas aplicaciones en telemedicina, tele-manufactura, exploración de lugares turísticos a través de Internet u otro medio de comunicación que permitan aumentar la concurrencia real o virtual a dichos lugares, una mayor cantidad de exploraciones espaciales, y también tareas cooperativas entre los expertos y otros situados en diferentes lugares para realizar tareas complejas, como por ejemplo la construcción y mantenimiento de bases espaciales (Lanini, *et al.*, 2015).

1.4 Objetivos de la Investigación

1.4.1 Objetivo General

Desarrollar un esquema de tele-operación bilateral para un robot manipulador móvil implementando algoritmos de control en lazo cerrado para la coordinación de movimiento de un brazo robótico montado sobre una la plataforma móvil tipo unicycle para aplicaciones que requieran la capacidad de locomoción y manipulación.

1.4.2 Objetivos Específicos

- ✓ Investigar las técnicas de tele-operación bilateral aplicados a robots mediante la investigación bibliográfica.
- ✓ Modelar matemáticamente el comportamiento cinemático de un robot manipulador móvil tipo unicycle, para su utilización en el diseño de algoritmos de control avanzados.
- ✓ Proponer un algoritmo de control en lazo cerrado que permita la tele-operación bilateral del extremo operativo de un robot manipulador móvil tipo unicycle en ambientes parcialmente estructurados, se afrontará el problema de evasión de obstáculos.
- ✓ Evaluar el desempeño del esquema de tele-operación bilateral propuesto a partir de los resultados experimentales obtenidos en un robot manipulador móvil tipo unicycle.

Nota: Las pruebas experimentales se realizan con el robot manipulador móvil construido en el proyecto de investigación “Tele-operación bilateral cooperativo de múltiples manipuladores móviles”, proyecto ganador de la novena convocatoria CEDIA-CEPRA 2015. El proyecto es ejecutado por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Universidad Técnica de Ambato, Escuela Politécnica Nacional y la Universidad de las Fuerzas Armadas.

1.5 Hipótesis

Es posible implementar un esquema de control para la tele-operación bilateral de un robot manipulador móvil tipo unicycle.

CAPÍTULO II

2 MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del Problema

Del análisis internacional se conoce una tesis magistral del Instituto Politécnico Nacional Unidad Querétaro en México con el tema “Prototipo de Robot Móvil Tele-operado”, en la que se desarrolla un prototipo de robot móvil tele-operado para tareas de inspección y ayuda en tareas de vigilancia, se transmite video mediante un cámara inalámbrica desde el sitio remoto, el operador utiliza un joystick para comandar el robot y la comunicación se realiza a base de radio frecuencia. Como resultados de esta investigación se obtiene un sistema estable y con mínimos retardos de control, pero carece de un dispositivo háptico que retroalimente las sensaciones al operador y no se considera la presencia de obstáculos.

En el Ecuador se puede resaltar la investigación realizada en la Escuela Superior Politécnica Nacional con el tema “Modelación, Identificación, y Control de Robots Móviles”, de la que se destaca la facilidad de haber utilizado un diseño en cascada que permitió tener un control independiente tanto en la parte cinemática como en la parte dinámica, debido a que si el diseño del controlador dinámico se cambió por otro, el controlador cinemático no se vería afectado por dicho cambio.

En el repositorio de la Facultad de Informática y Electrónica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo existe una investigación similar con el tema “Diseño e implementación de un sistema de tele-operación para controlar un robot humanoide mediante un sensor Kinect”, en la que se realizó el control inalámbrico de un robot humanoide de 15 grados de libertad usando el sensor Kinect para dirigir los movimientos, el video de la estación remota se obtiene de una cámara IP y la comunicación se basa en módulos de radio frecuencia, el sistema sincroniza los movimientos de la persona con las del robot permitiendo la interacción con el ambiente, aunque carece de sustento matemático y el control es poco robusto.

2.2 Bases Teóricas

La robótica puede definirse como el conjunto de conocimientos teóricos y prácticos que permiten concebir, realizar y automatizar sistemas basados en estructuras metálicas poliarticuladas, dotados de un determinado grado de autonomía y destinados a la producción industrial o a la sustitución del hombre en diversas tareas. Un sistema robótico puede describirse, como "aquel que es capaz de recibir información, de comprender su entorno a través del empleo de modelos, de formular y de ejecutar planes, y de controlar o supervisar su operación".

2.2.1 Manipuladores Móviles

Los manipuladores robóticos son diseñados para manejar y manipular objetos con destreza y precisión. A diferencia de los robots móviles, un manipulador industrial estándar no puede moverse y, por tanto, sólo puede manejar objetos en su vecindad. En este sentido, los robots industriales no son muy versátiles. Por otra parte, un vehículo que puede moverse libremente posee la movilidad de la que carecen los manipuladores industriales. Un manipulador robótico montado sobre una base móvil posee tanto la destreza de los manipuladores robóticos y la movilidad de un vehículo, y es una solución versátil que ofrece un gran potencial en una amplia variedad de aplicaciones, en la Figura 1-2 se presenta el manipulador móvil comercial de marca Kuka.



Figura 1-2. KUKA KMR iiwa

Fuente: KUKA Robotics

Un Manipulador Móvil es un robot que está destinado a funcionar con destreza en un espacio de trabajo mayor al de un manipulador fijo, y que consta de dos partes principales:

1. Una base, normalmente con accionamiento, que se puede mover libremente en un entorno determinado.
2. Uno o más brazos del manipulador montado en la base.

La base es la que da al sistema su capacidad de locomoción, que puede ser un vehículo normal, tal como un coche, satélite, nave, o vehículo subacuático, o puede ser otro dispositivo robótico que permite el movimiento en un área más restringida. (From, *et al.*, 2014).

Podemos imaginar varios tipos de brazos manipuladores que se pueden adjuntar a la base. Algunos ejemplos son manipuladores industriales estándar y brazos robóticos con formas especiales. La propiedad más importante del brazo manipulador es que tiene los grados de libertad necesarios para realizar las tareas que se deseen llevar a cabo.

Los sistemas de vehículos manipuladores se fusionan en dos áreas de investigación en robótica que son más bien de naturaleza diferente. El primer sistema es la base móvil que está diseñado para ser tan móvil, versátil y robusto como sea posible. El segundo sistema es el brazo robótico que se puede construir con precisión, repetitividad, y la velocidad como los principales objetivos de diseño. La fusión de estos sistemas en uno solo conduce a varias preguntas de investigación:

- ✓ El brazo manipulador tiene que ser construido para entornos mucho más difíciles que los industriales y debe tener las mismas características que la base móvil en términos de diseño, selección de materiales, el control y la inteligencia.
- ✓ Los robots industriales que son extremadamente peligrosos para los seres humanos y por lo tanto sólo operan en células separadas, donde los seres humanos no tienen acceso durante la operación. La utilización de brazos robóticos en otros entornos, requiere un funcionamiento seguro en cooperación con los seres humanos y se tiene que garantizar que las fuerzas de impacto que el robot puede imponer a su entorno no hacen ningún daño. Esto ha llevado al desarrollo de robots que pueden interactuar con un entorno dinámico con seguridad.
- ✓ El nivel de autonomía y la inteligencia implementada en el control del robot. Muchas investigaciones se han realizado en esta área en la implementación de los robots

móviles y lo mismo hay que hacer con los brazos manipuladores. Del mismo modo, los robots móviles se programan normalmente para suprimir los efectos ambientales y las perturbaciones. Así mismo, brazos manipuladores deben ser capaces de adaptarse al entorno de la misma manera.

2.2.1.1 Robótica Móvil

Los robots móviles y los vehículos auto-guiados son dispositivos de desplazamiento autónomo, es decir, una plataforma mecánica dotada de un sistema de locomoción capaz de navegar a través de un determinado ambiente de trabajo, dotado de cierto nivel de autonomía para su desplazamiento portando cargas o cumpliendo con una misión, en la Figura 2-2 se presenta un robot móvil comercial de la marca KUKA. En varias investigaciones sobre el control de movimiento se han basado en modelos cinemáticos de robots móviles. Se ha demostrado que los controles basados en modelo cinemáticos de los robots móviles son sólo válidos para bajas velocidades y baja carga en los robots. Luego, tomando en cuenta aplicaciones de alta velocidad y de alta carga en los robots, se han desarrollado investigaciones sobre control de movimiento basado en el modelo dinámico de los robots móviles. (Secchi, 2008)



Figura 2-1. KUKA KMP omniMove

Fuente: KUKA Robotics

Los robots móviles operando en ambientes no estructurados deben enfrentarse con significativas incertidumbres en la posición e identificación de objetos y del mismo robot en el ambiente. En efecto, la incertidumbre es tal que, trasladarse desde un punto A hasta un punto B es una actividad arriesgada para un robot móvil, en cambio es una actividad relativamente trivial para un manipulador industrial. En compensación por tener que enfrentarse con más incertidumbres del entorno, no se espera que un robot móvil siga

trayectorias o alcance su destino final con el mismo nivel de precisión que se espera de un manipulador industrial (que es del orden de las centésimas de milímetro).

Los robots móviles se caracterizan por su capacidad para moverse por el entorno que les rodea. El medio por el que se realiza dicho desplazamiento establece el modelo de clasificación más sencillo. Se puede hablar entonces de robots aéreos, acuáticos, terrestres, etc. Por supuesto, un robot móvil puede estar diseñado para moverse por varios medios.

Los robots móviles se pueden clasificar por tipo de locomoción de acuerdo al entorno al que se desarrollan el más utilizado es el terrestre, en general, los tres medios de movimiento como se indica en la Figura 3-2.

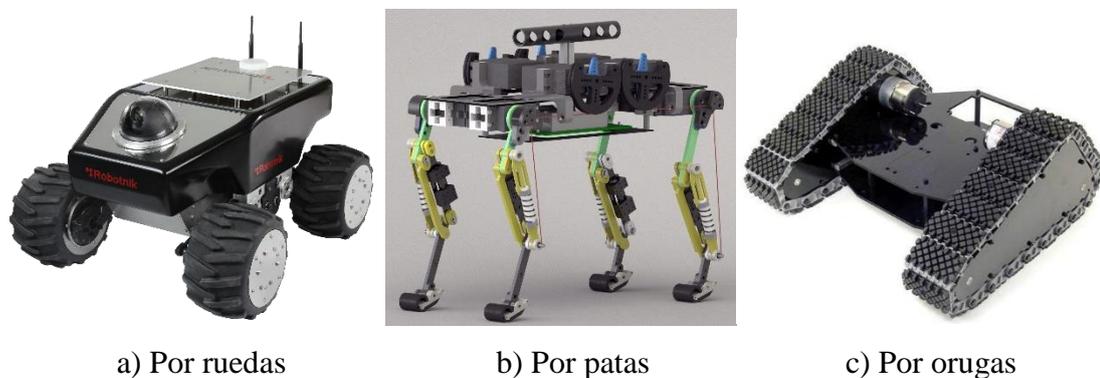


Figura 2-2. Tipos de robots móviles según la locomoción

Fuente: Secchi, H. A. Una introducción a los robots móviles

Cabe señalar que aunque la locomoción por patas y orugas han sido ampliamente estudiadas, el mayor desarrollo se presenta en los robots móviles con ruedas (RMR). Dentro de los atributos más relevantes de los RMR, destacan su eficiencia en cuanto a energía en superficies lisas y firmes, a la vez que no causan desgaste en la superficie donde se mueven, son más robustos, son fáciles de controlar, admiten mayores cargas y son más rápidos que los robots de patas y de orugas, lo que permite que su construcción sea más sencilla.

La mayoría de los robots móviles distribuyen sus sistemas de tracción y dirección sobre los ejes de sus ruedas de acuerdo a las exigencias de velocidad, maniobrabilidad y características del terreno. La precisión y rapidez con que el robot móvil debe alcanzar su destino, implica tener un sistema de tracción confiable y un sistema de dirección que dé maniobrabilidad al robot. Esta confiabilidad y maniobrabilidad que debe tener el robot móvil, determinan las características del sistema de tracción y dirección, no sólo en lo

que respecta a la técnica, sino también al número de ruedas necesarias y al tipo y disposición de éstas para, de esta manera, lograr una estructura estable.

Según la disposición de las ruedas sobre la estructura metálica en el robot móvil se tiene la siguiente clasificación:

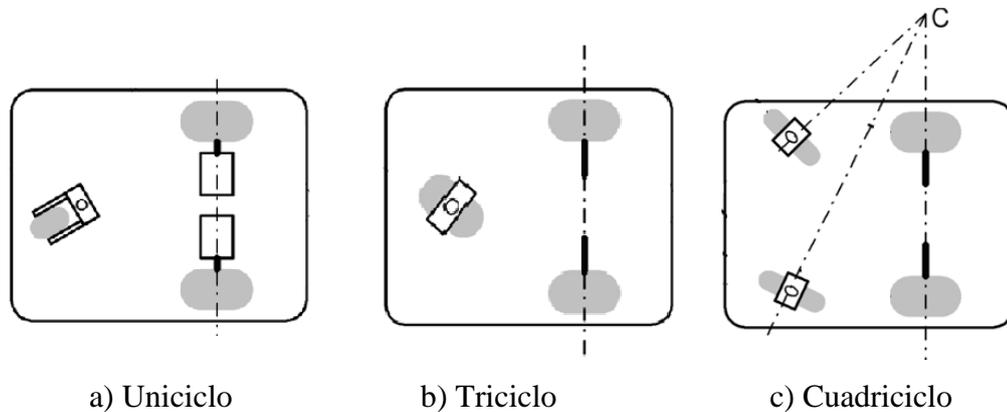


Figura 4-2. Disposición de las ruedas en un Robot Móvil

Fuente: Secchi, H. A. Una introducción a los robots móviles

En general el robot móvil tipo uniciclo, es el elegido por los investigadores a la hora de probar nuevas estrategias de control por tener una cinemática sencilla. Es una estructura que consta de dos ruedas fijas convencionales sobre el mismo eje, controladas de manera independiente y una rueda loca que le confiere estabilidad, según la Figura 4-2.a.

El sistema de tracción-dirección asociado al robot le permite independizar las consignas de velocidad lineal y angular respectivamente. Las ventajas que se derivan de la estructura mecánica y de la electrónica de control hacen de esta configuración la preferida para robots de laboratorio.

El robot tipo triciclo está conformado por dos ruedas convencionales fijas sobre un mismo eje y una rueda convencional centrada orientable que concentra las funciones de tracción-dirección, según la Figura 4-2.b. Al igual que el caso anterior, la estructura mecánica y la electrónica de control son sencillas, su tratamiento cinemática resulta de interés en áreas específicas de control de robots móviles. En cuanto a aplicaciones industriales esta configuración es apta para el transporte de cargas pesadas a baja velocidad.

Un problema asociado con la configuración tipo triciclo es que el centro de gravedad del vehículo se posiciona, en algunas ocasiones, en los límites de la superficie de equilibrio, definida por las tres ruedas, cuando el vehículo está en movimiento. Esto produce una pérdida de tracción en el vehículo y es fuente de error a la hora de estimar la posición del robot. Una solución a este problema lo presenta el sistema de dirección Ackerman

(Cuadriciclo). Las dos ruedas frontales se interpretan en un punto C que pertenece al eje común de las ruedas traseras, según la Figura 4-2.c. El lugar de los puntos en el plano trazados por cada rueda, alrededor de este punto C, es un conjunto de arcos concéntricos donde todos los vectores velocidad instantánea son tangentes a estos arcos. Esta estructura, además de brindar mayor estabilidad, evita el deslizamiento en las ruedas y por lo tanto reduce los errores de odometría.

Si bien su cinemática, su estructura mecánica y su electrónica de control no son tan sencillas esta configuración presenta un gran interés para los amantes de los robots todo terreno en donde los principales desarrollos se producen en la recolección de información sensorial y su posterior tratamiento para lograr reconstrucción de entornos o para el control en tiempo real.

2.2.1.2 Robótica de Manipuladores

La mayor parte de los robots industriales actuales son esencialmente brazos articulados. De hecho, según la definición de “Robot Institute of America”, un robot industrial es un manipulador móvil programable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, mediante movimientos variados, programados para la ejecución de distintas tareas. (Baturone, 2001).

La estructura típica de un manipulador consiste en un brazo compuesto por elementos con articulaciones entre ellos. En el último eslabón se coloca un extremo operativo tal como una pinza o equipo especial para realizar trabajos.

Estas estructuras tienen diferentes propiedades en cuanto al espacio de trabajo y accesibilidad a posiciones determinadas. A continuación, se describen las estructuras más utilizadas como brazos de un robot manipulador.

La configuración cartesiana es bastante usual en estructuras industriales, tales como pórticos, empleadas para el transporte de cargas voluminosas. La especificación de la posición de un punto se efectúa mediante las coordenadas cartesianas (x, y, z). Los valores que deben tomar las variables articulares corresponden directamente a las coordenadas que toma el extremo del brazo, como se observa en Figura 5-2.a. Por consiguiente, en esta configuración se simplifica la tarea del controlador del robot que debe generar las

órdenes para ejecutar una trayectoria definida mediante una secuencia de puntos expresados en coordenadas cartesianas.

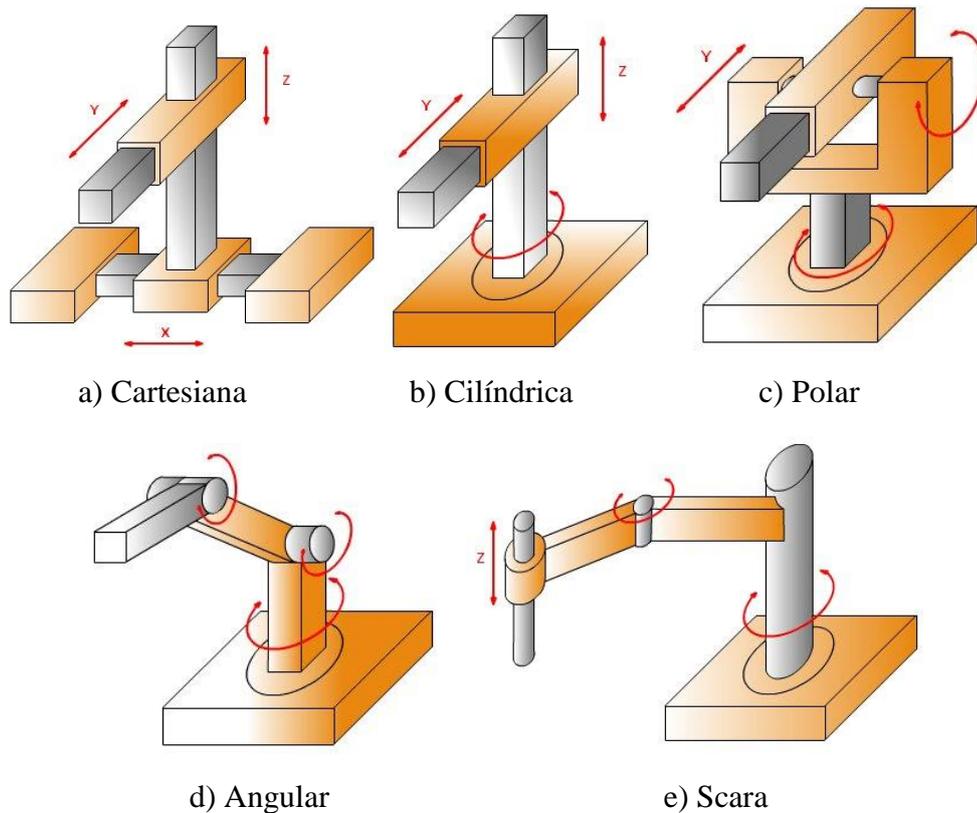


Figura 5-2. Estructuras básicas de un robot Manipulador

Fuente: portaleso.com, Control y Robótica

Sin embargo, la configuración cartesiana no resulta adecuada para acceder a puntos situados en espacios relativamente cerrados y su volumen de trabajo es pequeño cuando se compara con el que puede obtenerse con otras configuraciones. Nótese que si se tienen tres segmentos de variación de L , El volumen de trabajo sería L^3 .

La configuración cilíndrica tiene dos articulaciones prismáticas y una rotación. La primera articulación es normalmente de rotación, como se muestra en la Figura 5-2.b. La posición se especifica de forma natural en coordenadas cilíndricas.

Obsérvese que esta configuración puede ser de interés en una célula flexible, con el robot situado en el centro de la célula sirviendo a diversas maquinas dispuestas radialmente a su alrededor.

Para obtener el volumen de trabajo de esta estructura, se tiene, suponiendo un radio de 360° y un rango de desplazamiento de L , es el un toro de sección cuadrada de radio interior L y radio exterior $2L$. Se demuestra que el volumen resultante es $2\pi L^3$.

La configuración polar o esférica se caracteriza por dos articulaciones de rotación y una prismática. En este caso, las variables articulares expresan la posición del extremo del tercer enlace en coordenadas polares, tal como se muestra en la Figura 5-2.c.

Esta configuración permite un buen volumen de trabajo, tal que, en un manipulador con tres enlaces de longitud L , el volumen de trabajo de esta estructura, suponiendo un radio de giro de 360° y un rango de desplazamiento de L , es el que existe entre una esfera de radio $2L$ y otra concéntrica de radio L , teniendo un volumen de $(28/3)\pi L^3$.

La Configuración Angular o Articulada o también conocida como manipulador antropomorfo por su parecido con el brazo humano. Consta de articulaciones de rotación, tal como se muestra en la Figura 5-2.d. La posición del extremo final se especifica de forma natural en coordenadas angulares. Tiene un mejor acceso a espacios cerrados y es fácil desde el punto de vista constructivo. Es muy empleadas en robots manipuladores industriales, especialmente en tareas de manipulación que tenga una cierta complejidad. Existe en un gran número de laboratorios de investigación y desarrollo en robótica. De hecho, la configuración angular es, con mucho, la más utilizada en educación y actividades de investigación y desarrollo.

Obsérvese como, con esta estructura, es posible conseguir un gran volumen de trabajo. Si la longitud de los tres eslabones es de L , suponiendo un radio de giro de 360° , el volumen de trabajo será el de una esfera de radio $2L$, es decir $(32/3)\pi L^3$.

El controlador de un robot con un brazo de estructura angular debe realizar tareas más complejas debido a que, como ya se ha mencionado antes, la trayectoria normalmente en coordenadas cartesianas, por lo cual deben realizarse las transformaciones adecuadas.

La configuración Scara está especialmente diseñada para realizar tareas de montaje en planos. Está constituida por dos articulaciones de rotación con respecto a dos ejes paralelos, y una de desplazamiento en sentido perpendicular al plano, ver la Figura 5-2.e. EL volumen de trabajo de este tipo de robot, suponiendo segmento de longitud L , un radio de giro de 360° y un rango de desplazamiento de L es de $4\pi L^3$.

2.2.2 Modelación Matemática

El punto de partida en el análisis de un sistema de control es su representación por un modelo matemático, generalmente como un operador entre entradas y salidas del sistema, o como un conjunto de ecuaciones en diferencia y/o diferenciales. La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos del control son lineales. De hecho, los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles. Sin embargo, los avances tecnológicos actuales han generado una enorme variedad de nuevos problemas y aplicaciones que son no lineales en esencia. Se observan comúnmente en aplicaciones modernas importantes en ingeniería, tales como sistemas de comando de vuelo, control de robots, sistemas de autopistas automatizadas, estructuras de ala de avión, y sistemas de inyección de combustible de alto rendimiento. Tales fenómenos no lineales no se pueden describir mediante dinámica de modelos lineales, una razón ineludible para el uso de modelos no lineales y el desarrollo de conceptos y herramientas de sistemas no lineales de control.

2.2.2.1 Modelación de Robots

Aunque el robot sea el mismo, los modelos matemáticos que existen para representarlo son muy variados. Cada modelo matemático tiene características diversas a tal punto que ellos representan diversas propiedades cinemáticas y dinámicas del mismo robot. Por lo tanto, cada uno de los modelos matemáticos presentados tendrá una utilidad diferente de acuerdo a las propiedades o comportamientos que el usuario necesita observar. Por lo general se procede a la modelación matemática tanto de la cinemática como de la dinámica del robot, con la finalidad de conocer las velocidades lineal y angular a la que se desplaza el robot, así como también su posición y orientación.

2.2.3 Control de Robots

Los problemas principales en el control de movimiento de robots móviles o control acoplado del extremo operativo en manipuladores pueden ser:

- ✓ En el control de posición el objetivo es ubicar al punto de interés del robot en una posición de referencia dada, puede ser con una orientación deseada o sin orientación deseada.
- ✓ El Seguimiento de trayectoria se refiere a que el punto de interés del robot siga una referencia dada por parámetros en el tiempo, es decir, que recorra una trayectoria con valores temporales para cada punto.
- ✓ El seguimiento de caminos significa que el punto de interés del robot converja y siga un camino, sin ninguna especificación temporal, es decir, que recorra un camino sin tomar en cuenta el tiempo.

En cuanto al control de robots móviles, el objetivo es que el vehículo ejecute de forma autónoma movimientos previamente planificados o los que permiten reaccionar de forma apropiada a la percepción del entorno. El problema del control de vehículos autónomos puede formularse como la obtención de leyes de control que permita estabilizar el vehículo sobre un punto de trabajo, anulando el efecto de las perturbaciones, o bien hacer que el vehículo siga de forma autónoma una trayectoria de referencia.

Las características del robot móvil son importantes al momento de implementar un control, por ejemplo, las técnicas para controlar robots omnidireccionales son diferentes a las utilizadas para controlar vehículos automóviles convencionales adaptados para su funcionamiento autónomo.

Por otra parte, el control de robots manipuladores posee diferentes factores a considerar, es así, que existen dos alternativas: La estrategia más simple es el control de cada articulación de forma independiente o desacoplada del resto de las articulaciones. Es habitual emplear un controlador PID digital en cada articulación. En este controlador, la señal en lazo cerrado es el resultado de la suma de tres términos que son proporcionales al error, derivada del error e integral del error. Los pares de acoplamiento se tratan como perturbaciones que es necesario anular mediante el control.

Si se pretende considerar de forma apropiada los acoplamientos entre las articulaciones, es necesario emplear el modelo matemático del manipulador. Este modelo es no lineal y permite un control acoplado del todo el robot, teniendo como valores de interés las posiciones y velocidades del extremo operativo.

2.2.4 Tele-operación de Robots

En los robots tele-operados las tareas de percepción del entorno, planificación y manipulación compleja son realizadas por el humano. Es decir, el operador actúa en tiempo real cerrando un lazo de control de alto nivel. Los sistemas avanzados suministran al operador realimentación sensorial del entorno. En manipulación se utilizan brazos y manos antropomórficos con controladores automáticos que reproducen los movimientos del operador. Alternativamente, el operador mueve una réplica a escala del robot, reproduciéndose los movimientos en éste. Estos robots son útiles para trabajos en una localización remota, en tareas difíciles de automatizar y en entornos no estructurados, como por ejemplo, las que se realizan en la construcción o en el mantenimiento de líneas eléctricas.

Las mayores dificultades radican en las limitaciones del hombre en la capacidad de procesamiento numérico y procesamiento, y sobre todo, en el acoplamiento y coordinación entre el hombre y el robot. En algunas aplicaciones, el retraso de transmisión de información juega también un papel importante y su consideración resulta fundamental en el diseño del sistema de control.



Figura 6-2. Componentes de un Sistema de Tele-Operación

Fuente: Jae Young Lee, S. P., Haptic Teleoperation Systems

En un sistema de tele-operación, permite que un operador humano interactuar con un entorno remoto a través de tres componentes principales, ver la Figura 6-2: un maestro, esclavo, y un medio de comunicación interactivo entre los maestros y esclavos. El maestro controlado directamente por el operador humano y proporciona entradas de posición o de velocidad al esclavo. Mientras que el esclavo trabaja con el entorno remoto, los datos son generados, y se alimentan de nuevo en el maestro de la manipulación (Jae-young Lee, 2015).

Los objetivos de diseño en un esquema de tele-operación son:

- a.) Hacer que el control manual del operado humano sea robusto ante retardos, limitar las velocidades de los actuadores y otras no linealidades, e incluso ante los propios errores del operador.
- b.) Permitir elevadas prestaciones en la tele-operación, haciendo que los lazos de control tengan un comportamiento dinámico apropiado y reduciendo el trabajo del operador para lo cual se llega a realizar eventualmente de forma automática la acomodación y el control de esfuerzos en esquemas de control compartido.

Un aspecto particularmente importante es la determinación de la información que se suministra al operador o, en otros términos, la definición de los lazos de tele-operación. En muchos sistemas, la información sensorial fundamental es la visual. Existen también numerosos sistemas que emplean información de proximetría.

La tele-operación se ha aplicado en diversos entornos, por ejemplo, un reactor nuclear, el espacio de la tierra, para comandar vehículos submarinos no tripulados, para difundir una bomba, así como para la cirugía mínimamente invasiva y otros (Figura 7-2). A continuación se presentan algunos ejemplos (Li, *et al.*, 2015):

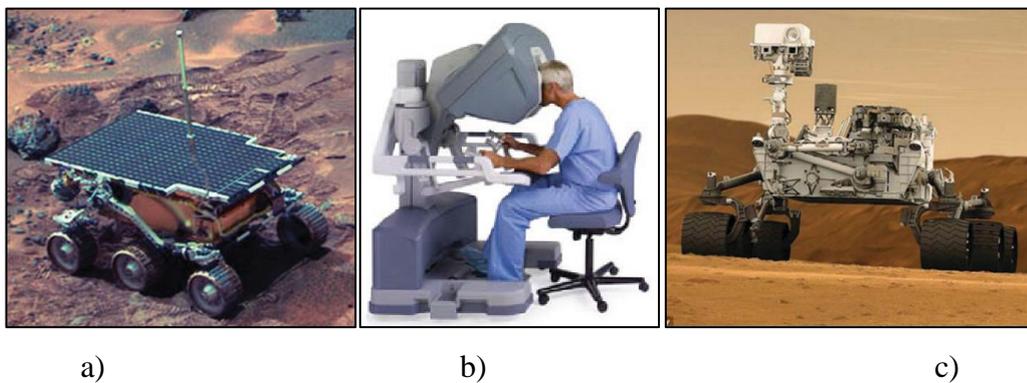


Figura 7-2. Aplicaciones de la Tele-operación

Fuente: Li Z., et. al., Intelligent Networked Teleoperation Control

a) En el manejo de materiales peligrosos, los primeros sistemas de tele-operación se construyeron después de la Segunda Guerra Mundial como requisitos para las actividades nucleares. Para la mayoría de los escenarios, por ejemplo, la limpieza de las instalaciones nucleares, el desmantelamiento nuclear, mantenimiento nuclear, etc.

b) Tele-cirugía, la tele-operación se ha encontrado en aplicaciones médicas tales como la tele-cirugía, que permite el intercambio de los conocimientos médicos de todo el mundo

sin requerir que el médico viaje. En general, la tele-cirugía ahorra tiempo, dinero y esfuerzo, que implican traer a la sala de la cirugía las manos del cirujano.

c) Tele-operación espacial, con el fin de reducir el riesgo de las tareas de mantenimiento y reparación en el espacio, la exploración espacial y el funcionamiento en órbita de satélites se necesita el uso de un robot tele-operado.

Existen varios factores a considerar en la Tele-operación de robots, así se describen los más importante, a continuación: (Mihelj & Podobnik, 2012)

- ✓ La percepción visual es la capacidad de interpretar la información de la luz visible que llega al ojo. Los diversos componentes fisiológicos implicados en la visión constituyen el sistema visual. Los visualizadores se optimizan para que corresponda a las características del aparato de la visión humana. Aunque todas las pantallas visuales presentan una imagen visual para el usuario, que difiere en algunas propiedades. Estas propiedades determinan la calidad de la presentación visual de la información y afectan a la movilidad del usuario dentro del sistema.
- ✓ La percepción auditiva es la capacidad de interpretar la información de las ondas de sonido que llega al oído. Los parlantes generan sonido para comunicar información de una computadora para el usuario. De manera similar a las pantallas visuales, las pantallas acústicas también se pueden dividir en dos grandes categorías: fija y auriculares que pueden separar por completo al usuario hacia los sonidos del entorno real.
- ✓ La percepción háptica representa la exploración activa y el proceso de reconocimiento de objetos a través del tacto. Se basa en las fuerzas experimentadas durante el contacto. El uso de dispositivos hápticos en aplicaciones de tele-operación es menos frecuente que el uso de indicadores visuales y sonoros, esto debido a que son más difíciles de implementar que las pantallas visuales o sonoras debido a la naturaleza bidireccional del sistema háptico. Estos no sólo permiten la percepción del medio ambiente, sino también la manipulación de los objetos en el ambiente. Por lo tanto, requiere el contacto directo con el usuario. La retroalimentación háptica activa puede ser difícil de implementar, y es suficiente usar la retroalimentación háptica pasiva en ciertas aplicaciones, en este caso, el dispositivo no genera fuerzas activas como una reacción a las acciones del usuario.

2.2.4.1 Sistemas Bilaterales

Idealmente, el operador debería sentir solo las desviaciones de posición causadas por fuerzas y pares externos al brazo esclavo. Sin embargo un sistema bilateral proporciona fuerzas de reacción al operador durante cualquier tipo de movimiento debido a los inevitables errores de posición del propio sistema de control.

En la Figura 8-2 se observa un sistema de tele-operación bilateral, el que está compuesto de los elementos básicos de tele-operación como es la transmisión de video y el control directo del robot, pero además, existe la retroalimentación de fuerza desde el sitio remoto hacia la estación local, esto se realiza mediante un dispositivo háptico generador de fuerza, que replica las sensaciones del robot hacia el operador humano.

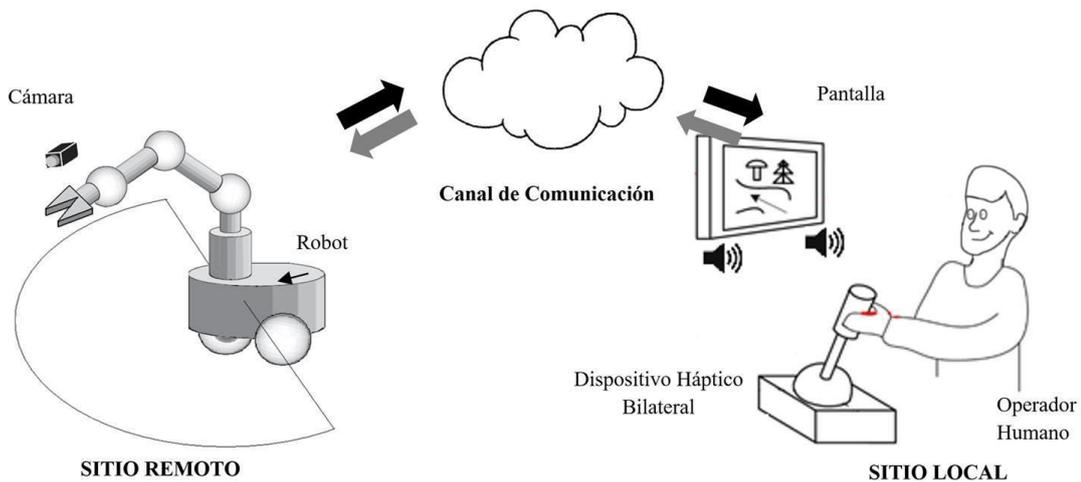


Figura 8-2. Sistema de Tele-operación Bilateral

Realizado por: Investigadores del Proyecto “Tele-operación Bilateral de Múltiples Manipuladores Móviles”

Los dispositivos hápticos pueden existir en forma de dispositivos de escritorio, robots exoesqueleto o sistemas grandes, que pueden mover cargas mayores. Dada la diversidad de retroalimentación háptica y las diferentes partes del cuerpo a la que el dispositivo se puede acoplar, los mecanismos de presentación son altamente optimizados para aplicaciones específicas.

CAPÍTULO III

3 MODELACIÓN MATEMÁTICA

3.1 Modelo Cinemático

El sistema en estudio está compuesto por un manipulador robótico montado sobre un robot móvil tipo unicycle, por lo que se propone la modelación cinemática y dinámica de manera independiente de cada uno, para a continuación encontrar un modelo compacto que considere todo el sistema el robot manipulador móvil.

3.1.1 Modelo Cinemático de la Plataforma Móvil

La Figura 1-3 muestra el robot móvil tipo unicycle, $\{R\}$ representa el sistema de referencia de coordenadas globales, con $\mathbf{h}_p(t) = [x_p \quad y_p \quad \theta_p]$ como la posición en $\{R\}$ y ángulo de rotación θ_p para el punto de interés (base para el manipulador) ubicado a una distancia a por delante de O (centro geométrico de las ruedas), donde, (x_o, y_o) es la posición de punto O y θ la orientación del vehículo respecto a $\{R\}$.

Por lo que, el modelo geométrico puede ser representado por (3.1),

$$\mathbf{h}_p(t) = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \theta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o + a \cos(\theta) \\ y_o + a \sin(\theta) \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Derivando (3.1) se obtiene el modelo cinemático del robot móvil expresado en (3.2), con $\dot{\mathbf{h}}_p$ como las velocidades en las coordenadas de $\{R\}$.

$$\dot{\mathbf{h}}_p(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_o - a\dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{y}_o + a\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

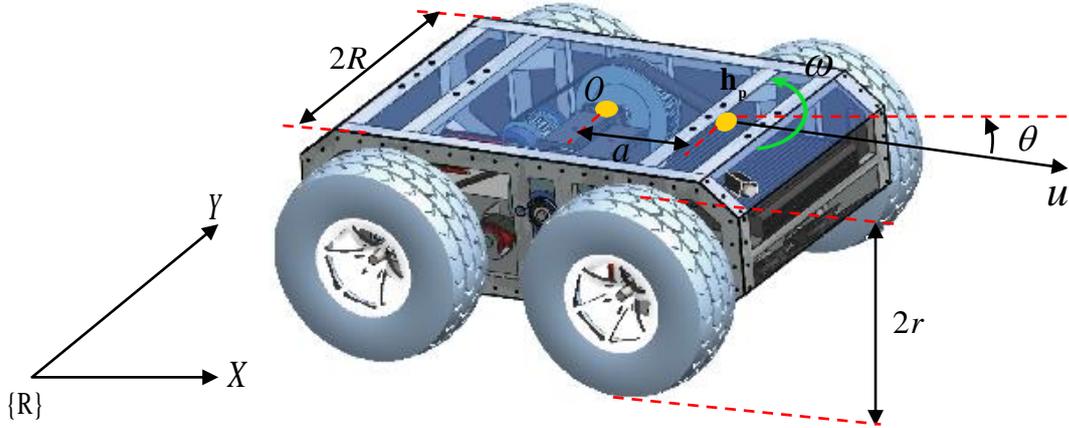


Figura 1-3. Parámetros del modelo cinemático del robot móvil

Realizado por: José Luis Varela Aldás

El robot móvil tipo unicycle se caracteriza por la restricción de velocidad no holonómica¹ que determina el impedimento de moverse paralelo al eje que une las ruedas, y está dada en la expresión (3.3):

$$\dot{x}_p \sin(\theta) - \dot{y}_p \cos(\theta) - a\dot{\theta} = 0 \quad (3.3)$$

Además, se indica en (3.4) las ecuaciones básicas de movimiento del robot móvil, donde u representa la velocidad lineal de todo el móvil, u_d y u_i son las velocidades lineales la rueda derecha e izquierda, respectivamente, ω es la velocidad angular del robot móvil y R la distancia paralela al eje motriz desde O hacía extremo de las ruedas.

$$u = \frac{u_d + u_i}{2} \quad \omega = \frac{u_d - u_i}{2R} \quad (3.4)$$

Es necesario expresar el modelo cinemático del robot móvil a partir de la velocidad lineal y angular, de esta manera se puede excitar su movimiento, entonces, se sustituye $\dot{x}_o = u \cos(\theta)$, $\dot{y}_o = u \sin(\theta)$, y $\dot{\theta} = \omega$ en (3.2), se obtiene modelo cinemático (3.5):

$$\dot{\mathbf{h}}_p(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos(\theta) - a\omega \sin(\theta) \\ u \sin(\theta) + a\omega \cos(\theta) \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Reordenando de forma matricial (3.5) puede expresarse según (3.6),

¹ No holonómica significa que la dimensión de las velocidades del robot es menor a la dimensión de espacio de trabajo.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -a \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & a \cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_p(t) = \mathbf{S}_p(\theta) \mathbf{v}_p(t)$$

donde $\mathbf{v}_p(\mathbf{t})$ representa las velocidades lineal y angular del robot, $\mathbf{S}_p(\theta)$ es la matriz de transformación en función del ángulo de giro θ .

3.1.2 Modelo Cinemático del Brazo Manipulador

La Figura 2-3 muestra la configuración del manipulador robótico a ser modelado, con $\mathbf{h}_a(t)$ como la posición del punto de interés (extremo operativo), donde $\{R_a\}$ representa el sistema de referencia de coordenadas locales para el brazo robótico, siendo (h_{xa}, h_{ya}, h_{za}) coordenadas del punto $\mathbf{h}_a(t)$ respecto a $\{R_a\}$.

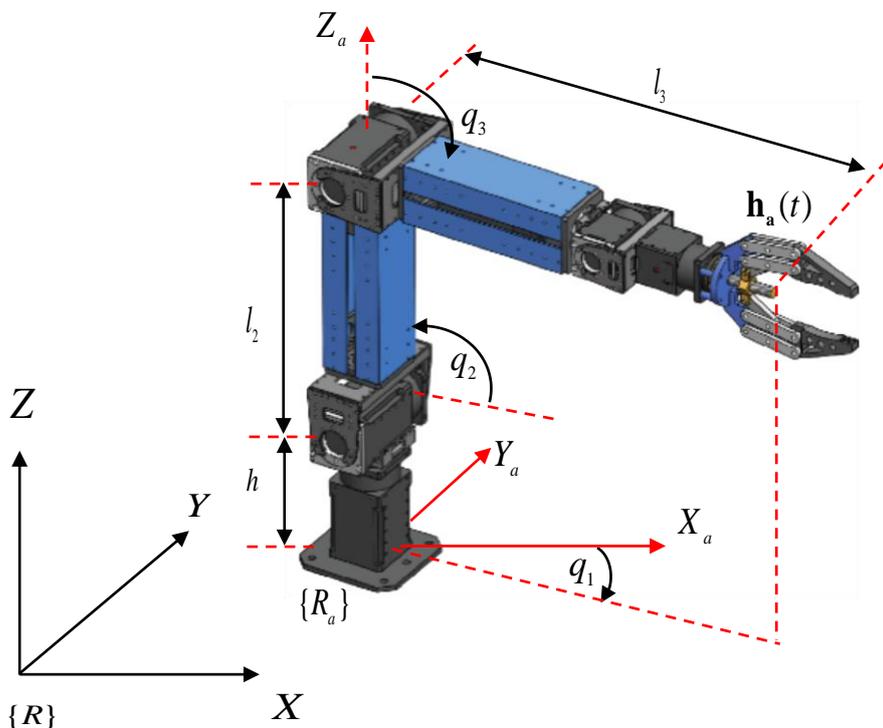


Figura 2-3. Manipulador de 3 Grados de Libertad

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Mediante la interpretación geométrica de la cadena de eslabones se determina la posición del extremo operativo en el sistema de referencia $\{R_a\}$.

$$\mathbf{h}_a(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} h_{ax} \\ h_{ay} \\ h_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_2) \cos(q_1) + l_3 \cos(q_2 + q_3) \cos(q_1) \\ l_2 \cos(q_2) \sin(q_1) + l_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_1) \\ h + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

donde h , l_2 y l_3 son dimensiones del brazo robótico; q_1 , q_2 y q_3 son los ángulos de giro para cada grado de libertad del robot manipulador.

Derivando (3.7) se obtiene el modelo cinemático del manipulador (3.8), con $\dot{\mathbf{h}}_a(\mathbf{t})$ como las velocidades en las coordenadas de $\{R_a\}$.

$$\dot{\mathbf{h}}_a(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \dot{h}_{ax} \\ \dot{h}_{ay} \\ \dot{h}_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_2 C_2 S_1 + l_3 C_{23} S_1) \dot{q}_1 - (l_2 C_1 S_2 + l_3 S_{23} C_1) \dot{q}_2 - l_3 S_{23} C_1 \dot{q}_3 \\ (l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \dot{q}_1 - (l_3 S_{23} S_1 + l_2 S_1 S_2) \dot{q}_2 - l_3 S_{23} S_1 \dot{q}_3 \\ (l_3 C_{23} + l_2 C_2) \dot{q}_2 + l_3 C_{23} \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

De forma matricial (3.8) puede expresarse según (3.9),

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_{ax} \\ \dot{h}_{ay} \\ \dot{h}_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 C_2 S_1 - l_3 C_{23} S_1 & -l_2 C_1 S_2 - l_3 S_{23} C_1 & -l_3 S_{23} C_1 \\ l_2 C_1 C_2 + l_3 C_{23} C_1 & -l_3 S_{23} S_1 - l_2 S_1 S_2 & -l_3 S_{23} S_1 \\ 0 & l_3 C_{23} + l_2 C_2 & l_3 C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_a(\mathbf{t}) = \mathbf{S}_a(\mathbf{q}_a) \dot{\mathbf{q}}_a(\mathbf{t})$$

donde $\dot{\mathbf{q}}_a(\mathbf{t})$ es el vector de las velocidades angulares en las articulaciones del brazo y $\mathbf{S}_a(\mathbf{q}_a)$ es la matriz de transformación en función de los ángulos de rotación.

3.1.2.1 Manipulabilidad del Brazo Manipulador

Para el análisis de manipulabilidad se plantea la técnica de la distancia a los puntos de singularidad del brazo robótico propuesto por (L. Sciavicco, 2000), para lo cual se propone (3.10).

$$w_a = |\det(\mathbf{S}_a(\mathbf{q}_a))| \quad (3.10)$$

Si se observa (3.10) $w_a > 0$, a excepción de los puntos de singularidad ($w_a = 0$), por esta razón permite evaluar la manipulabilidad del brazo en función de la posición de sus articulaciones

3.1.3 Modelo Cinemático del Manipulador Móvil

Para obtener la modelación cinemática de todo el manipulador móvil se utilizan las nomenclaturas indicadas en los modelos independientes del brazo robótico y el robot móvil. En la Figura 3-3 se presenta el robot manipulador móvil, donde \mathbf{h} es la posición del extremo operativo (efector) respecto a $\{R\}$.

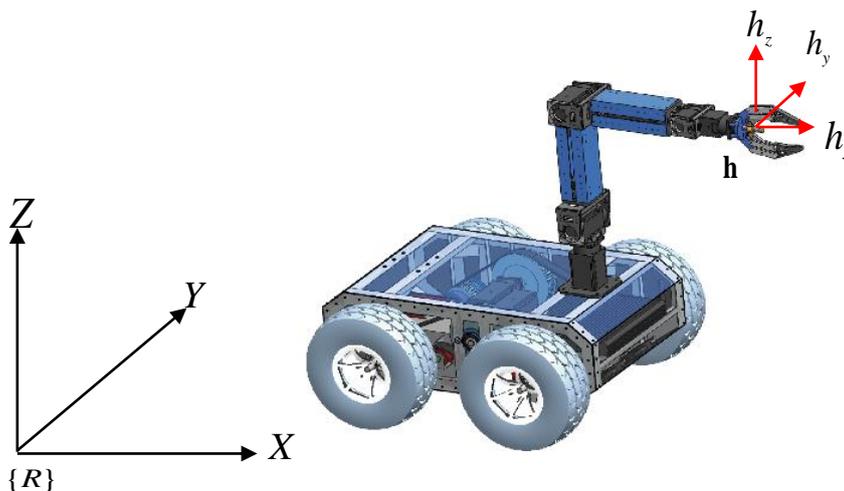


Figura 3-1. Manipulador móvil

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Combinando elementos de (3.1) y (3.7) se determina el modelo geométrico de manipulador móvil para su extremo operativo. (B. Bayle, 2003)

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o + (a + h_{ax}) \cos(\theta) - h_{ay} \sin(\theta) \\ y_o + (a + h_{ax}) \sin(\theta) + h_{ay} \cos(\theta) \\ h_{az} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Derivando (3.11) se obtiene el modelo cinemático (3.12) para el manipulador móvil.

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{h}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_o - (a + h_{ax})\dot{\theta}\sin(\theta) - h_{ay}\dot{\theta}\cos(\theta) + \dot{h}_{ax}\cos(\theta) - \dot{h}_{ay}\sin(\theta) \\ \dot{y}_o + (a + h_{ax})\dot{\theta}\cos(\theta) - h_{ay}\dot{\theta}\sin(\theta) + \dot{h}_{ax}\sin(\theta) + \dot{h}_{ay}\cos(\theta) \\ \dot{h}_{az} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Por cuestiones de modelación dinámica a realizarse en la siguiente sección se añade el ángulo de rotación de la plataforma móvil al modelo (3.12), encontrando (3.13), con $\dot{\mathbf{h}}(t)$ como el vector de velocidades lineales del extremo en $\{R\}$ y la velocidad de giro \dot{h}_θ del robot móvil.

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}_x \\ \dot{h}_y \\ \dot{h}_\theta \\ \dot{h}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_o - (a + h_{ax})\dot{\theta}\sin(\theta) - h_{ay}\dot{\theta}\cos(\theta) + \dot{h}_{ax}\cos(\theta) - \dot{h}_{ay}\sin(\theta) \\ \dot{y}_o + (a + h_{ax})\dot{\theta}\cos(\theta) - h_{ay}\dot{\theta}\sin(\theta) + \dot{h}_{ax}\sin(\theta) + \dot{h}_{ay}\cos(\theta) \\ \dot{\theta} \\ \dot{h}_{az} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Remplazando (3.13) de forma similar a (3.5), se obtiene el modelo cinemático compacto (3.14),

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \begin{bmatrix} C_\theta & -(a + h_{ax})S_\theta - h_{ay}C_\theta & (-l_2C_2S_1 - l_3C_{23}S_1)C_\theta + \dots & (-l_2C_1S_2 - l_3S_{23}C_1)C_\theta + \dots & -l_3S_{23}C_1C_\theta + \dots \\ & & \dots(l_2C_1C_2 + l_3C_{23}C_1)S_\theta & \dots(l_3S_{23}S_1 + l_2S_1S_2)S_\theta & \dots l_3S_{23}S_1S_\theta \\ S_\theta & (a + h_{ax})C_\theta - h_{ay}S_\theta & (-l_2C_2S_1 - l_3C_{23}S_1)S_\theta + \dots & (-l_2C_1S_2 - l_3S_{23}C_1)S_\theta + \dots & -l_3S_{23}C_1S_\theta - \dots \\ & & \dots(l_2C_1C_2 + l_3C_{23}C_1)C_\theta & \dots(-l_3S_{23}S_1 - l_2S_1S_{21})C_\theta & \dots l_3S_{23}S_1C_\theta \\ 0 & 0 & 0 & l_3C_{23} + l_2C_2 & l_3C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{v}(t),$$

donde $\mathbf{v}(t)$ son las velocidades lineal y angular de la plataforma móvil $[u \ \omega]^T$ y las velocidades angulares de las articulaciones del brazo $[\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T$ y $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ es la matriz de transformación en función de los ángulos de rotación $[\theta \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$.

3.1.3.1 Manipulabilidad del Manipulador Móvil

Para el análisis de manipulabilidad se plantea la técnica para sistemas redundantes (grados de libertad > dimensiones de trabajo), mediante la distancia a los puntos de singularidad del manipulador móvil propuesto por (L. Sciavicco, 2000), para lo cual se propone (3.15).

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{S}(\mathbf{q})\mathbf{S}^T(\mathbf{q}))} \quad (3.15)$$

Si se observa (3.15) $w > 0$, a excepción de los puntos de singularidad ($w = 0$), por esta razón permite evaluar la manipulabilidad del sistema redundante en función de la posición de sus articulaciones

3.2. Modelo Dinámico

3.2.1 Modelo Dinámico de la Plataforma Móvil

Basado en los aportes del trabajo de (Fierro & Lewis, 1998), se utiliza el método de Euler-Lagrange que determina el balance de energía cinética y potencial del sistema, y considerando una masa puntual concentrada en el punto de interés \mathbf{h}_p de la plataforma móvil debido a que soporta la carga del sistema.

Se describe la energía cinética del vehículo mediante $k_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{h}}_p^T(\mathbf{t}) m \dot{\mathbf{h}}_p(\mathbf{t})$, donde m es la masa puntual de la plataforma móvil. Resolviendo se tiene (3.16)

Para el caso de la energía potencial, el robot móvil no posee desplazamientos en el eje z se tiene (3.17), y se desprecia los efectos de fricción producidos por el roce con el suelo.

$$k_p = \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 - 2a \sin(\theta_p) \dot{\theta}_p \dot{x}_p + 2a \cos(\theta_p) \dot{\theta}_p \dot{y}_p + a^2 \dot{\theta}_p^2 + \dot{\theta}_p^2) \quad (3.16)$$

$$P_p = 0, \quad (3.17)$$

donde k_p y P_p son la energía cinética y potencial de la plataforma móvil, respectivamente.

Mediante (3.16) y (3.17) se determina el Lagrangeano (3.18) del sistema móvil a partir de $L_p = k_p - P_p$,

$$L_p = \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 - 2a \sin(\theta_p) \dot{\theta}_p \dot{x}_p + 2a \cos(\theta_p) \dot{\theta}_p \dot{y}_p + a^2 \dot{\theta}_p^2 + \dot{\theta}_p^2) \quad (3.18)$$

Utilizando el método de Euler-Lagrange que propone: $\frac{d\left(\frac{dL}{d\dot{\mathbf{h}}_p}\right)}{dt} - \frac{dL}{d\mathbf{h}_p}$ para determinar

las fuerzas y torque de rotación generados por el robot móvil respecto a $\{R\}$.

Resolviendo la derivada de (3.18) respecto a las velocidades, se halla (3.19), (3.20) y (3.21).

$$\frac{dL}{d\dot{x}_p} = m(\dot{x}_p - a\dot{\theta}_p \sin(\theta_p)) \quad (3.19)$$

$$\frac{dL}{d\dot{y}_p} = m(\dot{y}_p + a\dot{\theta}_p \cos(\theta_p)) \quad (3.20)$$

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}_p} = m(\dot{\theta}_p + a^2\dot{\theta}_p + a\dot{y}_p \cos(\theta_p) - a\dot{x}_p \sin(\theta_p)) \quad (3.21)$$

Derivando las ecuaciones (3.19), (3.20) y (3.21) respecto al tiempo según el método Euler-Lagrange se encuentran las expresiones (3.22), (3.23) y (3.24)

$$\frac{d\left(\frac{dL}{d\dot{x}_p}\right)}{dt} = m\ddot{x}_p - am \sin(\theta_p)\ddot{\theta}_p - am \cos(\theta_p)\dot{\theta}_p^2 \quad (3.22)$$

$$\frac{d\left(\frac{dL}{d\dot{y}_p}\right)}{dt} = m\ddot{y}_p + am \cos(\theta_p)\ddot{\theta}_p - am \sin(\theta_p)\dot{\theta}_p^2 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_p}\right)}{dt} &= m\ddot{\theta}_p(a^2 + 1) - m\dot{\theta}_p(a\dot{x}_p \cos(\theta_p) + a\dot{y}_p \sin(\theta_p))... \\ &\dots + am\ddot{y}_p \cos(\theta_p) - am\ddot{x}_p \sin(\theta_p) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Resolviendo la derivada de (3.18) respecto a las posiciones lineales y angulares, se halla (3.25), (3.26) y (3.27).

$$\frac{dL}{dx_p} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{dL}{dy_p} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{dL}{d\theta_p} = -am\dot{\theta}_p \dot{x} \cos(\theta_p) - am\dot{\theta}_p \dot{y} \sin(\theta_p) \quad (3.27)$$

Aplicando el método Euler-Lagrange se utiliza (3.22) y (3.25), para encontrar la fuerza fx_p generada sobre el eje x en el punto de interés \mathbf{h}_p de la plataforma móvil.

$$fx_p = \frac{d\left(\frac{dL}{d\dot{x}_p}\right)}{dt} - \frac{dL}{dx_p} = m\ddot{x}_p - am \sin(\theta_p) \ddot{\theta}_p - am \cos(\theta_p) \dot{\theta}_p^2 \quad (3.28)$$

De forma similar a (3.28) se utiliza (3.23) y (3.26), para encontrar la fuerza fy_p generada sobre el eje y en el punto de interés \mathbf{h}_p de la plataforma móvil.

$$fy_p = \frac{d\left(\frac{dL}{d\dot{y}_p}\right)}{dt} - \frac{dL}{dy_p} = m\ddot{y}_p + am \cos(\theta_p) \ddot{\theta}_p - am \sin(\theta_p) \dot{\theta}_p^2 \quad (3.29)$$

De manera similar a (3.28) y (3.29) se utiliza (3.24) y (3.27), para encontrar el torque τ_{θ_p} generado sobre la plataforma móvil.

$$\tau_{\theta_p} = \frac{d\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_p}\right)}{dt} - \frac{dL}{d\theta_p} = m\ddot{\theta}_p (a^2 + 1) + am\ddot{y}_p \cos(\theta_p) - am\ddot{x}_p \sin(\theta_p) \quad (3.30)$$

Resumiendo (3.28), (3.29) y (3.30) de forma matricial se tiene (3.31),

$$\begin{bmatrix} fx_p \\ fy_p \\ \tau_{\theta_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & -am \sin(\theta_p) \\ 0 & m & am \cos(\theta_p) \\ -am \sin(\theta_p) & am \cos(\theta_p) & a^2 m + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -am \dot{\theta}_p \cos(\theta_p) \\ 0 & 0 & -am \dot{\theta}_p \sin(\theta_p) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{M}_p(\mathbf{h}_p) \ddot{\mathbf{h}}_p(t) + \mathbf{C}_p(\mathbf{h}_p, \dot{\mathbf{h}}_p) \dot{\mathbf{h}}_p(t) \quad (3.31)$$

donde $\mathbf{M}_p(\mathbf{h}_p)$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}_p(\mathbf{h}_p, \dot{\mathbf{h}}_p)$ es la matriz de fuerzas centrípetas y centrifugas y $\mathbf{f}_p(t)$ las fuerzas y torques generado en el robot móvil.

El objetivo es expresar el modelo dinámico en función las velocidades lineal y angular del vehículo, partiendo del modelo (3.6) y encontrando su derivada (3.32):

$$\ddot{\mathbf{h}}_p(t) = \mathbf{S}_p(\theta)\dot{\mathbf{v}}_p(t) + \dot{\mathbf{S}}(\theta, \dot{\theta})\mathbf{v}_p(t) \quad (3.32)$$

Con,

$$\dot{\mathbf{S}}_p = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin(\theta) & -a\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{\theta} \cos(\theta) & -a\dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\dot{\mathbf{v}}_p(t)$ como las aceleraciones lineal y angular del robot móvil.

Sustituyendo (3.6) y (3.32) en el modelo dinámico (3.31), se obtiene (3.33)

$$\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{M}(\mathbf{h}_p) \left(\mathbf{S}_p(\theta)\dot{\mathbf{v}}_p(t) + \dot{\mathbf{S}}_p(\theta, \dot{\theta})\mathbf{v}_p(t) \right) + \mathbf{C}(\mathbf{h}_p, \dot{\mathbf{h}}_p) \mathbf{S}_p(\theta)\mathbf{v}_p(t)$$

$$\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{M}_p(\mathbf{h}_p) \mathbf{S}_p(\theta)\dot{\mathbf{v}}_p(t) + \mathbf{M}_p(\mathbf{h}_p) \dot{\mathbf{S}}_p(\theta, \dot{\theta})\mathbf{v}_p(t) + \mathbf{C}_p(\mathbf{h}_p, \dot{\mathbf{h}}_p) \mathbf{S}_p(\theta)\mathbf{v}_p(t) \quad (3.33)$$

Paralelamente es posible describir las fuerzas y torque del robot respecto a $\{R\}$ mediante la distribución de momento sobre las ruedas derecha e izquierda (τ_d, τ_i) , según (3.34), (3.35) y (3.36), donde r es el radio de las ruedas.

$$fx_p = \frac{\tau_d + \tau_i}{r} \cos(\theta) \quad (3.34)$$

$$fy_p = \frac{\tau_d + \tau_i}{r} \sin(\theta) \quad (3.35)$$

$$\tau_{\theta p} = \frac{\tau_d - \tau_i}{r} R \quad (3.36)$$

Resumiendo las igualdades (3.34), (3.35) y (3.36) de forma matricial se tiene (3.37).

$$\begin{bmatrix} fx_p \\ fy_p \\ \tau_{\theta p} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ R & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{B}_p(\theta)\boldsymbol{\tau}_p(t) \quad (3.37)$$

Es posible definir el comportamiento del torque generado en cada rueda, con los modelos simplificados (3.38) y (3.39),

$$\tau_d = \frac{k_{pa}(\nu_d - k_{pb}\omega_d)}{R_{pa}} \quad (3.38)$$

$$\tau_i = \frac{k_{pa}(\nu_i - k_{pb}\omega_i)}{R_{pa}} \quad (3.39)$$

donde, ν_d y ν_i son los voltajes de entrada aplicada a los motores derecho e izquierdo, respectivamente; k_{pa} es la constante de torque multiplicado por la constante de reducción, k_{pb} es el producto de la constante contra electromotriz y la constante de reducción, R_{pa} es la resistencia eléctrica del motor; y ω_i, ω_d son las velocidades angulares de la rueda izquierda y derecha, respectivamente. ω_i, ω_d pueden ser descritas en función del movimiento general del robot móvil según,

$$\omega_d = \frac{u}{r} + \frac{\omega R}{r} \quad (3.40)$$

$$\omega_i = \frac{u}{r} - \frac{\omega R}{r} \quad (3.41)$$

Además considerando las ecuaciones de tensión para la velocidad lineal y angular en función de la distribución de voltaje en cada motor se plantea (3.42) y (3.43)

$$\nu_u = \frac{\nu_d + \nu_i}{2} \quad (3.42)$$

$$\nu_\omega = \frac{\nu_d - \nu_i}{2} \quad (3.43)$$

Combinando las ecuaciones (3.40)..(3.43) en (3.38) y (3.39) se tiene (3.44) y (3.45),

$$\tau_d = \frac{k_{pa}(\nu_u + \nu_\omega)}{R_{pa}} - \frac{k_{pa}k_{pb}}{R_{pa}} \left(\frac{u + \omega R}{r} \right) \quad (3.44)$$

$$\tau_i = \frac{k_{pa}(\nu_u - \nu_\omega)}{R_{pa}} - \frac{k_{pa}k_{pb}}{R_{pa}} \left(\frac{u - \omega R}{r} \right) \quad (3.45)$$

Resumiendo (3.44) y (3.45) de forma matricial se tiene (3.46),

$$\begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} = \frac{K_{pa}}{R_{pa}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ v_\omega \end{bmatrix} - \frac{K_{pa}K_{pb}}{rR_{pa}} \begin{bmatrix} 1 & R \\ 1 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\boldsymbol{\tau}_p(t) = \mathbf{D}_p \mathbf{v}_p(t) - \mathbf{E}_p \mathbf{v}_p(t)$$

donde $\mathbf{v}_p(t)$ son los voltajes de alimentación para la velocidad lineal y angular, y \mathbf{D}_p , \mathbf{E}_p son matrices constantes.

Los voltajes de alimentación al robot pueden ser descritos en función de un controlador PD (3.47) y (3.48), muy comúnmente usados en este tipo de robots.

$$v_u = K_{PT} (u_{ref} - u) - \dot{u} K_{DT} \quad (3.47)$$

$$v_\omega = K_{PR} (\omega_{ref} - \omega) - \dot{\omega} K_{DR} \quad (3.48)$$

Siendo, u_{ref} y ω_{ref} los valores de referencia para la velocidad lineal y angular del controlador PD, K_{PT} y K_{DT} las constantes proporcional y derivativa de traslación del robot móvil, K_{PR} y K_{DR} las constantes proporcional y derivativa de rotación del robot móvil. (3.47) y (3.48) matricialmente se presenta (3.49),

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{PT} & 0 \\ 0 & K_{PR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{PT} & 0 \\ 0 & K_{PR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{DT} & 0 \\ 0 & K_{DR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{L}_p \mathbf{v}_{refp}(t) - \mathbf{L}_p \mathbf{v}_p(t) - \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{v}}_p(t) \quad (3.49)$$

donde $\mathbf{v}_{refp}(t)$ son las velocidades de referencia lineal y angular del robot móvil, y \mathbf{L}_p , \mathbf{J}_p son matrices constantes de ganancia.

Agrupando (3.46) y (3.49) en (3.37), se halla (3.50).

$$\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{B}_p(\theta) \left[\mathbf{D}_p \left[\mathbf{L}_p \mathbf{v}_{refp}(t) - \mathbf{L}_p \mathbf{v}_p(t) - \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{v}}_p(t) \right] - \mathbf{E}_p \mathbf{v}_p(t) \right] \quad (3.50)$$

Igualando las (3.33) y (3.50) se determina la expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{B}_p(\theta)\left[\mathbf{D}_p\left[\mathbf{L}_p\mathbf{v}_{\text{ref}p}(t)-\mathbf{L}_p\mathbf{v}_p(t)-\mathbf{J}_p\dot{\mathbf{v}}_p(t)\right]-\mathbf{E}_p\mathbf{v}_p(t)\right] &= \mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{M}_p(\mathbf{h}_p)\mathbf{S}_p(\theta)\dot{\mathbf{v}}_p(t)\dots \\ &\dots + \mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{M}_p(\mathbf{h}_p)\dot{\mathbf{S}}(\theta,\dot{\theta})\mathbf{v}_p(t) + \mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{C}_p(\mathbf{h}_p,\dot{\mathbf{h}}_p)\mathbf{S}_p(\theta)\mathbf{v}_p(t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Se ordena (3.51) para obtener un modelo matemático compacto del robot móvil (3.52) en función de las velocidades de referencia y las velocidades y aceleraciones reales.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{ref}p}(t) &= \mathbf{L}_p^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p^{-1}(\mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{B}_p(\theta))^{-1}\mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{M}_p(\mathbf{h}_p)\mathbf{S}_p(\theta) \\ \dots + \mathbf{J}_p \end{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_p(t) + \mathbf{L}_p^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p^{-1}(\mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{B}_p(\theta))^{-1}\mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{M}_p(\mathbf{h}_p)\dot{\mathbf{S}}_p(\theta) \\ + \mathbf{D}_p^{-1}(\mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{B}_p(\theta))^{-1}\mathbf{S}'_p(\theta)\mathbf{C}_p(\mathbf{h}_p)\mathbf{S}_p(\theta) \\ + \mathbf{D}_p^{-1}\mathbf{E}_p + \mathbf{L}_p \end{bmatrix} \mathbf{v}_p(t) \\ \mathbf{v}_{\text{ref}p}(t) &= \bar{\mathbf{M}}_p \dot{\mathbf{v}}_p(t) + \bar{\mathbf{C}}_p(\mathbf{v}_p) \mathbf{v}_p(t), \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}_p &= \begin{bmatrix} \frac{2K_{pa}K_{DT} + R_{pa}mr}{2K_{pa}K_{PT}} & 0 \\ 0 & \frac{K_{DR}}{K_{PR}} + \frac{4R_{pa}mra^2 + R_{pa}mr}{2K_{pa}K_{PR}R} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{C}}_p &= \begin{bmatrix} \frac{K_{pb}}{K_{PT}r} + 1 & -\frac{R_{pa}amr\omega}{K_{pa}K_{PT}} \\ \frac{R_{pa}amr\omega}{K_{pa}K_{PR}R} & \frac{K_{pb}R}{K_{PR}r} + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Partiendo del modelo (3.52) se asignan las constantes a los parámetros ζ_{p1} , ζ_{p2} , ζ_{p3} , ζ_{p4} , ζ_{p5} y ζ_{p6} . Reduciendo el modelo a (3.53).

$$\begin{aligned} \zeta_{p1} &= \frac{2K_{pa}K_{DT} + R_{pa}mr}{2K_{pa}K_{PT}} & \zeta_{p2} &= \frac{K_{DR}}{K_{PR}} + \frac{4R_{pa}mra^2 + R_{pa}mr}{2K_{pa}K_{PR}R} \\ \zeta_{p3} &= \frac{R_{pa}amr}{K_{pa}K_{PT}} & \zeta_{p4} &= \frac{K_{pb}}{K_{PT}r} + 1 \\ \zeta_{p5} &= \frac{R_{pa}amr}{K_{pa}K_{PR}R} & \zeta_{p6} &= \frac{K_{pb}R}{K_{PR}r} + 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_{refp}(t) = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_{p1} & 0 \\ 0 & \zeta_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_{p4} & -\zeta_{p3}\omega \\ \zeta_{p5}\omega & \zeta_{p6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

3.2.2 Modelo Dinámico del Brazo Manipulador

Para determinar el modelo dinámico de manipulador se utiliza el método de Euler-Lagrange que permite encontrar las ecuaciones de los torques producidos por las articulación del brazo robótico mediante el balance energético (Cinético-Potencial), para este análisis se consideran masas puntuales en el extremo de cada eslabón debido a el significativo peso de los actuadores.

Para determinar las ecuaciones de la energía cinética se requiere las velocidades de movimiento de cada eslabón respecto al sistema de referencia $\{R_a\}$, partiendo de las ecuaciones de posición del extremo de cada eslabón (h_{a2} , h_{a3}).

$$\mathbf{h}_{a2} = \begin{bmatrix} h_{ax2} \\ h_{ay2} \\ h_{az2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_2) \cos(q_1) \\ l_2 \cos(q_2) \sin(q_1) \\ h + l_2 \sin(q_2) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{h}_{a3} = \begin{bmatrix} h_{ax3} \\ h_{ay3} \\ h_{az3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_2) \cos(q_1) + l_3 \cos(q_2 + q_3) \cos(q_1) \\ l_2 \cos(q_2) \sin(q_1) + l_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_1) \\ h + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Derivando (3.58) y (3.59) respecto al tiempo se determina la velocidad de cada extremo para los eslabones que conforma el manipulador.

$$\dot{\mathbf{h}}_{a2} = \begin{bmatrix} \dot{h}_{ax2} \\ \dot{h}_{ay2} \\ \dot{h}_{az2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cos(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_2 \\ l_2 \cos(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_2 \\ l_2 \cos(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_{a3} = \begin{bmatrix} \dot{h}_{ax3} \\ \dot{h}_{ay3} \\ \dot{h}_{az3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h}_{ax2} - l_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_1) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \dot{h}_{ay2} + l_3 \cos(q_2 + q_3) \cos(q_1) \dot{q}_1 - l_3 \sin(q_2 + q_3) \sin(q_1) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \dot{h}_{az2} + l_3 \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Mediante las ecuaciones (3.60) y (3.61) se encuentra la energía cinética del brazo descrita en (3.62) encontrado a partir de $K_a = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{h}}_{a2}^T m_2 \dot{\mathbf{h}}_{a2} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{h}}_{a3}^T m_3 \dot{\mathbf{h}}_{a3}$, donde $\dot{\mathbf{h}}_{a2}$ son las velocidades en el primer eslabón del brazo, $\dot{\mathbf{h}}_{a3}$ son las velocidades en el eslabón que contiene el extremo operativo, m_2 y m_3 son las masas puntuales de los eslabones 2 y 3, respectivamente.

$$K_a = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 \cos^2(q_2)) + \frac{1}{2} m_3 \left[\left(\left(l_2 l_3 \cos(q_3) + \frac{l_2^2}{2} + \frac{l_3^2}{2} \right) \dot{q}_2^2 + \frac{l_3^2}{2} \dot{q}_3^2 \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \left(\frac{l_2^2 + l_2^2 \cos(2q_2)}{4} \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \dots + \frac{l_3^2 + l_3^2 \cos(2q_2 + 2q_3)}{4} \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \dots + \frac{l_2 l_3 \cos(q_3) + l_2 l_3 \cos(2q_2 + q_3)}{2} \right) \dot{q}_1^2 \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + (l_3^2 + l_2 l_3 \cos(q_3)) \dot{q}_2 \dot{q}_3 \right) \right] \quad (3.62)$$

Para completar el modelo dinámico por Euler-Lagrange se determina la Energía potencial (3.63) del conjunto de eslabones, según $P_a = m_2 g h_{az2} + m_3 g h_{az3}$, donde h_{az2} y h_{az3} son las posiciones en eje z de los eslabones 2 y 3, respectivamente.

$$P_a = (m_2 + m_3) g h + m_2 g l_2 \sin(q_2) + m_3 g l_2 \sin(q_2) + m_3 g l_3 \sin(q_2 + q_3) \quad (3.63)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de las energías cinética y potencial se aplica el método Euler-Lagrange, restando la energía potencial (3.62) de la energía cinética (3.63), determinando el Lagrangeano (3.64).

$$L_a = \left(\frac{2l_2^2 m_2 \cos(q_2)^2 + 2l_2^2 m_3 \cos(q_2)^2 + 2l_2 l_3 m_3 \cos(2q_2 + q_3) \dots}{4} \right) \dot{q}_1^2 \dots$$

$$\dots + \left(\frac{l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3 \cos(q_3) + l_2^2 m_2}{2} \right) \dot{q}_2^2$$

$$+ (l_2 l_3 m_3 \cos(q_3) + l_3^2 m_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \frac{l_3^2 m_3 \dot{q}_3^2}{2} \dots$$

$$\dots - gh(m_2 + m_3) - gl_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) - gl_2 m_2 \sin(q_2) - gl_2 m_3 \sin(q_2)$$
(3.64)

El método de Euler-Lagrange utiliza (3.65) para determinar el torque en cada articulación

mediante $\frac{d}{dt} \left(\frac{dL_a}{d\dot{q}_i} \right) - \frac{dL_a}{dq_i} = \tau_i$.

Resolviendo la derivada de (3.64) respecto a las velocidades angulares en las articulaciones, se halla (3.65), (3.66) y (3.67).

$$\frac{dL}{d\dot{q}_1} = \left(l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3)^2 + l_2^2 m_2 \cos(q_2)^2 + l_2^2 m_3 \cos(q_2)^2 \dots \right) \dot{q}_1$$
(3.65)

$$\frac{dL}{d\dot{q}_2} = (l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3 \cos(q_3)) \dot{q}_2 + (l_3^2 m_3 + l_2 l_3 m_3 \cos(q_3)) \dot{q}_3$$
(3.66)

$$\frac{dL}{d\dot{q}_3} = l_3 m_3 (l_3 \dot{q}_2 + l_3 \dot{q}_3 + l_2 \dot{q}_2 \cos(q_3))$$
(3.67)

Derivando las ecuaciones (3.65), (3.66) y (3.67) respecto al tiempo según el método Euler-Lagrange se encuentran las expresiones (3.68), (3.69) y (3.70)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_1} \right) = \left(l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3)^2 + l_2^2 m_2 \cos(q_2)^2 + l_2^2 m_3 \cos(q_2)^2 \dots \right) \ddot{q}_1 \dots$$

$$\dots + 2 \left(\begin{array}{l} -l_2^2 m_2 \cos(q_2) \sin(q_2) - 2l_2^2 m_3 \cos(q_2) \sin(q_2) \\ -l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) - l_2 l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dots \\ \dots - l_2 l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2) \end{array} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dots$$
(3.68)

$$\dots + (-2l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) - 2l_2 l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq_2} \right) = (l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3 \cos(q_3)) \ddot{q}_2 + (l_3^2 m_3 + l_2 l_3 m_3 \cos(q_3)) \ddot{q}_3 \dots \quad (3.69)$$

$$\dots - l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3^2 \sin(q_3) - 2l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq_3} \right) = l_3 m_3 (l_3 \ddot{q}_2 + l_3 \ddot{q}_3 + l_2 \ddot{q}_2 \cos(q_3) - l_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3)) \quad (3.70)$$

Resolviendo la derivada de (3.64) respecto a las posiciones angulares, se halla (3.71), (3.72) y (3.73).

$$\frac{dL}{dq_1} = 0 \quad (3.71)$$

$$\frac{dL}{dq_2} = \left(\frac{-l_2^2 m_2 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2) - l_2^2 m_3 \sin(2q_2) \dots}{2} \right) \dot{q}_1^2 \dots \quad (3.72)$$

$$\dots - gl_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) - gl_2 m_2 \cos(q_2) - gl_2 m_3 \cos(q_2)$$

$$\frac{dL}{dq_3} = l_3 m_3 \left(-g \cos(q_2 + q_3) - \frac{l_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2 \sin(q_3) + l_2 \sin(2q_2 + q_3)}{2} \dot{q}_1^2 \dots \right) \quad (3.73)$$

$$\dots - l_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_3) - l_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3)$$

Aplicando $\tau_{a1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq_1} \right) - \frac{dL}{dq_1}$ se utiliza (3.68) y (3.71), para encontrar el torque

generado sobre sobre el primer motor del manipulador.

$$\tau_{a1} = \left(l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3)^2 + l_2^2 m_2 \cos(q_2)^2 + l_2^2 m_3 \cos(q_2)^2 \dots \right) \ddot{q}_1 \dots$$

$$- 2 \left(l_2^2 m_2 \cos(q_2) \sin(q_2) + l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) + \dots \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (3.74)$$

$$+ (-2l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) - 2l_2 l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_3$$

De manera similar a (3.74) se usa $\tau_{a2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq_2} \right) - \frac{dL}{dq_2}$ remplazando las expresiones

(3.69) y (3.72), para determinar el torque generado sobre sobre el segundo motor del manipulador.

$$\begin{aligned}
\tau_{a2} = & (l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3 \cos(q_3)) \ddot{q}_2 + (l_3^2 m_3 + l_2 l_3 m_3 \cos(q_3)) \ddot{q}_3 \dots \\
& \dots + \left(\frac{l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) \dots}{2} \right) \dot{q}_1^2 \dots \quad (3.75) \\
& \dots - l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3^2 \sin(q_3) - 2l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3) + g l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) \dots \\
& \dots + g l_2 m_2 \cos(q_2) + g l_2 m_3 \cos(q_2)
\end{aligned}$$

Así también, se aplica $\tau_{a3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq_3} \right) - \frac{dL}{dq_3}$ con (3.70) y (3.73), para determinar el torque generado sobre por el tercer motor del manipulador.

$$\tau_{a3} = l_3 m_3 \left(\frac{(l_3 + l_2 \cos(q_3)) \ddot{q}_2 + l_3 \ddot{q}_3 + g \cos(q_2 + q_3) + l_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_3) \dots}{\dots + \frac{l_2 \sin(q_3) + l_2 \sin(2q_2 + q_3) + l_3 \sin(2q_2 + 2q_3)}{2} \dot{q}_1^2} \right) \quad (3.76)$$

Agrupando (3.74), (3.75) y (3.76) de forma matricial se obtiene el modelo dinámico (3.77) del manipulador, donde $\boldsymbol{\tau}_a = [\tau_{a1} \quad \tau_{a2} \quad \tau_{a3}]$ son los torques producidos para cada articulación, $M_a(q)$ es la matriz de inercia, $C_a(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrípetas y centrífugas en el los eslabones el brazo; y $g_a(q)$ es el vector de gravedad.

$$\boldsymbol{\tau}_a(t) = M_a(q_a) \ddot{q}_a(t) + C_a(q_a, \dot{q}_a) \dot{q}_a(t) + g_a(q_a), \quad (3.77)$$

donde,

$$M_a(q) = \begin{bmatrix} M_{a11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{a22} & M_{a23} \\ 0 & M_{a32} & M_{a33} \end{bmatrix}$$

$$M_{a11} = l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3)^2 + l_2^2 m_2 \cos(q_2)^2 + l_2^2 m_3 \cos(q_2)^2 + 2l_2 l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) \cos(q_2)$$

$$M_{a22} = l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3 \cos(q_3)$$

$$M_{a23} = l_3^2 m_3 + l_2 l_3 m_3 \cos(q_3)$$

$$M_{a32} = l_3^2 m_3 + l_2 l_3 m_3 \cos(q_3)$$

$$M_{a33} = l_3^2 m_3$$

$$C_a(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{a11} & C_{a12} & C_{a13} \\ C_{a21} & C_{a22} & C_{a23} \\ C_{a31} & C_{a32} & C_{a33} \end{bmatrix}$$

$$C_{a11} = \left(\begin{array}{l} -l_2^2 m_2 \cos(q_2) \sin(q_2) - l_2^2 m_3 \cos(q_2) \sin(q_2) - l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \\ \dots - l_2 l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) - l_2 l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2) \\ + (-l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) - l_2 l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2)) \end{array} \right) \dot{q}_2$$

$$C_{a12} = \left(\begin{array}{l} -l_2^2 m_2 \cos(q_2) \sin(q_2) - l_2^2 m_3 \cos(q_2) \sin(q_2) - l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \\ \dots - l_2 l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) - l_2 l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2) \end{array} \right) \dot{q}_1$$

$$C_{a13} = (-l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) - l_2 l_3 m_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2)) \dot{q}_1$$

$$C_{a21} = \frac{l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3)}{2} \dot{q}_1$$

$$C_{a22} = -l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin(q_3) \quad C_{a23} = -l_2 l_3 m_3 \sin(q_3) \dot{q}_3 - l_2 l_3 m_3 \sin(q_3) \dot{q}_2$$

$$C_{a31} = \frac{l_2 l_3 m_3 \sin(q_3) + l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) + l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3)}{2} \dot{q}_1$$

$$C_{a32} = l_2 l_3 m_3 \sin(q_3) \dot{q}_2 \quad C_{a33} = 0$$

$$g_a(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_{a2} = g l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) + g l_2 m_2 \cos(q_2) + g l_2 m_3 \cos(q_2) \\ m_3 g l_3 \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

Es posible definir el torque de los motores de forma general según (3.78), donde $i = 1 \dots 3$ corresponde a cada motor del manipulador, τ_{ai} son los torques, v_i son los voltajes de alimentación, \dot{q}_i son las velocidades angulares de cada articulación, k_a es la constante de torque multiplicado por la constante de reducción, k_b es el producto de la constante contra electromotriz y la constante de reducción, R_a es la resistencia eléctrica del motor; (se consideran motores de similares características).

$$\tau_{ai} = \frac{k_a (v_i - k_b \dot{q}_i)}{R_a} \quad (3.78)$$

Considerando los principales tres motores del brazo robótico, (3.78) se expresa matricialmente en (3.79),

$$\begin{bmatrix} \tau_{a1} \\ \tau_{a2} \\ \tau_{a3} \end{bmatrix} = \frac{K_a}{R_a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} - \frac{K_a K_b}{r R_a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\boldsymbol{\tau}_a(t) = \mathbf{D}_a \mathbf{v}_a(t) - \mathbf{E}_a \dot{\mathbf{q}}_a(t)$$

donde $\mathbf{v}_a(t)$ son los voltajes de alimentación para cada motor, y \mathbf{D}_a , \mathbf{E}_a son matrices constantes.

Los voltajes de alimentación al robot pueden ser descritos en función de un controlador PD muy comúnmente usados en robot manipuladores comerciales. Estos controlador determinar el voltaje de alimentación al motor de forma general según (3.80).

$$\nu_i = K_P (\dot{q}_{i_ref} - \dot{q}_i) - \ddot{q}_i K_D \quad (3.80)$$

Siendo \dot{q}_{i_ref} la velocidad angular de referencia de los controladores PD, \ddot{q}_i la aceleración producida en los motores; y, K_P y K_D las constantes de ganancia proporcional y derivativa, respectivamente. Según las condiciones de nuestro robot manipulador, (3.80) se presenta matricialmente en (3.81),

$$\begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_P & 0 & 0 \\ 0 & K_P & 0 \\ 0 & 0 & K_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{1ref} \\ \dot{q}_{2ref} \\ \dot{q}_{3ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_P & 0 & 0 \\ 0 & K_P & 0 \\ 0 & 0 & K_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_D & 0 & 0 \\ 0 & K_D & 0 \\ 0 & 0 & K_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_a(t) = \mathbf{L}_a \dot{\mathbf{q}}_{a_ref}(t) - \mathbf{L}_a \dot{\mathbf{q}}_a(t) - \mathbf{J}_a \ddot{\mathbf{q}}_a(t) \quad (3.81).$$

donde, $\dot{\mathbf{q}}_{a_ref}(t)$ son las velocidades angulares de referencia, y \mathbf{L}_a , \mathbf{J}_a son matrices constantes de ganancia.

Agrupando (3.79) y (3.81), se determina (3.82).

$$\boldsymbol{\tau}_a(t) = \mathbf{D}_a [\mathbf{L}_a \dot{\mathbf{q}}_{a_ref}(t) - \mathbf{L}_a \dot{\mathbf{q}}_a(t) - \mathbf{J}_a \ddot{\mathbf{q}}_a(t)] - \mathbf{E}_a \dot{\mathbf{q}}_a(t) \quad (3.82)$$

Igualando las ecuaciones (3.77) y (3.82), resulta la expresión (3.83)

$$\mathbf{D}_a \left[\mathbf{L}_a \dot{\mathbf{q}}_{a_ref}(t) - \mathbf{L}_a \dot{\mathbf{q}}_a(t) - \mathbf{J}_a \ddot{\mathbf{q}}_a(t) \right] - \mathbf{E}_a \dot{\mathbf{q}}_a(t) = \mathbf{M}_a(\mathbf{q}_a) \ddot{\mathbf{q}}_a(t) + \mathbf{C}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) \dot{\mathbf{q}}_a(t) + \mathbf{g}_a(\mathbf{q}_a) \quad (3.83)$$

Ordenando (3.83) para obtener un modelo dinámico compacto (3.84) para el manipulador en función de las velocidades angulares de referencia, y las velocidades y aceleraciones angulares reales en el robot manipulador,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{a_ref}(t) &= \mathbf{L}_a^{-1} \left[\mathbf{D}_a^{-1} \mathbf{M}_a(\mathbf{q}_a) + \mathbf{J}_a \right] \ddot{\mathbf{q}}_a(t) + \mathbf{L}_a^{-1} \left[\mathbf{D}_a^{-1} \left[\mathbf{C}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) + \mathbf{E}_a \right] + \mathbf{L}_a \right] \dot{\mathbf{q}}_a(t) + \mathbf{L}_a^{-1} \mathbf{D}_a^{-1} \mathbf{g}_a(\mathbf{q}_a) \\ \dot{\mathbf{q}}_{a_ref}(t) &= \bar{\mathbf{M}}_a(\mathbf{q}_a) \ddot{\mathbf{q}}_a(t) + \bar{\mathbf{C}}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) \dot{\mathbf{q}}_a(t) + \bar{\mathbf{g}}_a(\mathbf{q}_a) \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde,

$$\bar{\mathbf{M}}_a(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \bar{M}_{a11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_{a22} & \bar{M}_{a23} \\ 0 & \bar{M}_{a32} & \bar{M}_{a33} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{a11} & \bar{C}_{a12} & \bar{C}_{a13} \\ \bar{C}_{a21} & \bar{C}_{a22} & \bar{C}_{a23} \\ \bar{C}_{a31} & \bar{C}_{a32} & \bar{C}_{a33} \end{bmatrix}$$

$$\bar{M}_{a11} = \frac{K_d}{K_p} + \frac{R_a}{K_a K_p} \left(l_3^2 m_3 \cos(q_2 + q_3)^2 + l_2^2 m_2 \cos(q_2)^2 + l_2^2 m_3 \cos(q_2)^2 + 2l_2 l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) \cos(q_2) \right)$$

$$\bar{M}_{a22} = \frac{K_d}{K_p} + \frac{R_a}{K_a K_p} \left(l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3 \cos(q_3) \right), \quad \bar{M}_{a32} = \frac{R_a l_3 m_3}{K_a K_p} (l_3 + l_2 \cos(q_3))$$

$$\bar{M}_{a23} = \frac{R_a l_3 m_3}{K_a K_p} (l_3 + l_2 \cos(q_3)), \quad \bar{M}_{a33} = \frac{K_d}{K_p} + \frac{R_a l_3^2 m_3}{K_a K_p}$$

$$\bar{C}_{a11} = \frac{K_b}{K_p} - \frac{R_a}{K_a K_p} \left(\dot{q}_3 \frac{(l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2 l_3 m_3 \sin(q_3) + l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3))}{2} + \dot{q}_2 \left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) \right) + 1$$

$$\bar{C}_{a12} = -\frac{R_a}{2K_a K_p} \dot{q}_1 \left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) \right)$$

$$\bar{C}_{a13} = -\frac{R_a}{K_a K_p} \dot{q}_1 \left(m_3 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) l_3^2 + l_2 m_3 \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2) l_3 \right)$$

$$\bar{C}_{a21} = \frac{R_a}{2K_a K_p} \dot{q}_1 \left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) \right)$$

$$\bar{C}_{a22} = \frac{K_b}{K_p} - \frac{R_a}{K_a K_p} l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 \sin(q_3) + 1, \quad \bar{C}_{a23} = -\frac{R_a}{K_a K_p} l_2 l_3 m_3 \sin(q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_{a31} &= \frac{R_a}{2K_a K_p} l_3 m_3 \dot{q}_1 (l_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2 \sin(q_3) + l_2 \sin(2q_2 + q_3)) \\ \bar{C}_{a32} &= \frac{R_a}{K_a K_p} l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2 \sin(q_3), \quad \bar{C}_{a33} = \frac{K_b}{K_p} + 1 \\ \bar{\mathbf{g}}_a(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \frac{R_a}{K_a K_p} g l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) \\ \frac{R_a}{K_a K_p} (g l_3 m_3 \cos(q_2 + q_3) + g l_2 m_2 \cos(q_2) + g l_2 m_3 \cos(q_2)) \\ \bar{g}_{a3} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Partiendo de la expresión dinámica (3.84) se asignan en parámetros a ser identificados todas las constantes del modelo.

$$\begin{aligned}\zeta_{a1} &= \frac{K_d}{K_p} & \zeta_{a2} &= \frac{R_a}{K_a K_p} l_2^2 m_2 & \zeta_{a3} &= \frac{R_a}{K_a K_p} l_2^2 m_3 \\ \zeta_{a4} &= \frac{R_a}{K_a K_p} l_3^2 m_3 & \zeta_{a5} &= \frac{R_a}{K_a K_p} l_2 l_3 m_3 & \zeta_{a6} &= \frac{K_b}{K_p} + 1 \\ \zeta_{a7} &= \frac{R_a}{K_a K_p} g l_2 m_2 & \zeta_{a8} &= \frac{R_a}{K_a K_p} g l_2 m_3 & \zeta_{a9} &= \frac{R_a}{K_a K_p} g l_3 m_3\end{aligned}$$

Reduciendo las matrices al modelo (3.85),

$$\dot{\mathbf{q}}_{a_ref}(t) = \bar{\mathbf{M}}_a(\mathbf{q}_a) \ddot{\mathbf{q}}_a(t) + \bar{\mathbf{C}}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) \dot{\mathbf{q}}_a(t) + \bar{\mathbf{g}}_a(\mathbf{q}_a) \quad (3.85)$$

donde,

$$\bar{\mathbf{M}}_a(\mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} \zeta_{a1} + \zeta_{a2} C_2^2 + \zeta_{a3} C_2^2 & 0 & 0 \\ \dots + \zeta_{a4} C_{23}^2 + 2\zeta_{a5} C_{23} C_2 & & \\ 0 & \zeta_{a1} + \zeta_{a2} + \zeta_{a3} & \zeta_{a4} + \zeta_{a5} C_3 \\ 0 & \dots + \zeta_{a4} + 2\zeta_{a5} C_3 & \zeta_{a4} + \zeta_{a5} C_3 \\ & \zeta_{a4} + \zeta_{a5} C_3 & \zeta_{a1} + \zeta_{a4} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_a(\mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{a11} & \bar{C}_{a12} & \bar{C}_{a13} \\ \bar{C}_{a21} & \bar{C}_{a22} & \bar{C}_{a23} \\ \bar{C}_{a31} & \bar{C}_{a32} & \bar{C}_{a33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{a11} &= \zeta_{a6} - \frac{\dot{q}_3}{2} (\zeta_{a4} \sin(2q_2 + 2q_3) + \zeta_{a5} (\sin(q_3) + \sin(2q_2 + q_3))) \dots \\
&\dots + \dot{q}_2 (\zeta_{a4} \sin(2q_2 + 2q_3) + \zeta_{a2} \sin(2q_2) + \zeta_{a3} \sin(2q_2) + 2\zeta_{a5} \sin(2q_2 + q_3)) \\
\bar{C}_{a12} &= -\frac{\dot{q}_1}{2} (\zeta_{a2} \sin(2q_2) + \zeta_{a3} \sin(2q_2) + \zeta_{a4} \sin(2q_2 + 2q_3) + 2\zeta_{a5} \sin(2q_2 + q_3)) \\
\bar{C}_{a13} &= -\dot{q}_1 (\zeta_{a4} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) + \zeta_{a5} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2)) \\
\bar{C}_{a21} &= \frac{\dot{q}_1}{2} (\zeta_{a2} \sin(2q_2) + \zeta_{a3} \sin(2q_2) + \zeta_{a4} \sin(2q_2 + 2q_3) + 2\zeta_{a5} \sin(2q_2 + q_3)) \\
\bar{C}_{a22} &= \zeta_{a6} - \zeta_{a5} \dot{q}_3 \sin(q_3) & \bar{C}_{a23} &= -\zeta_{a5} \sin(q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
\bar{C}_{a31} &= \frac{\dot{q}_1}{2} (\zeta_{a4} \sin(2q_2 + 2q_3) + \zeta_{a5} (\sin(q_3) + \sin(2q_2 + q_3))) \\
\bar{C}_{a32} &= \zeta_{a5} \dot{q}_2 \sin(q_3) & \bar{C}_{a33} &= \zeta_{a6} \\
\bar{\mathbf{g}}_a(\mathbf{q}_a) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_{a7} \cos(q_2) + \zeta_{a8} \cos(q_2) + \zeta_{a9} \cos(q_2 + q_3) \\ \zeta_{a9} \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3.2.3 Modelo Dinámico del Manipulador Móvil

La modelación dinámica del manipulador móvil se realiza combinando los conceptos propuestos en los modelos independientes del robot móvil y el brazo robótico. Se aplica en método de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de fuerza y torque en el sistema y se realizan las modificaciones que permiten obtener un modelo compacto en función de las variables pertinentes.

Se describe la energía cinética del manipulador móvil mediante la expresión:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{h}}_p^T(t) m \dot{\mathbf{h}}_p(t) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{h}}_2^T m_2 \dot{\mathbf{h}}_2 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{h}}_3^T m_3 \dot{\mathbf{h}}_3,$$

donde $\dot{\mathbf{h}}_p$ son las velocidades para la plataforma, $\dot{\mathbf{h}}_2$ son las velocidades en el primer eslabón del brazo, y $\dot{\mathbf{h}}_3$ son las velocidades en el eslabón que contiene el extremo operativo. Así también, se determina la Energía potencial del conjunto plataforma-

eslabones con $P = m_2gh_{z_2} + m_3gh_{z_3}$, donde h_{z_2} y h_{z_3} son las posiciones en eje z de los eslabones 2 y 3, correspondientemente.

La Ecuaciones (3.90) y (3.91) son las energías cinética y potencial del robot manipulador móvil, respectivamente.

$$\begin{aligned}
K = & \frac{m}{2} \left((a^2 + 1) \dot{\theta}^2 + 2C_\theta a \dot{\theta} \dot{y}_p \right) + \left(\frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{m_3}{2} (\dot{q}_2 (l_3 C_{23} + l_2 C_2) + l_3 \dot{q}_3 C_{23})^2 \dots \\
& \dots + \frac{m_3}{2} \left(\begin{array}{c} \dot{q}_1 \left(\begin{array}{c} S_\theta (l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \\ + C_\theta (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \end{array} \right) - \dot{x}_p \dots \\ \dots + \dot{q}_2 \left(\begin{array}{c} C_\theta (l_3 S_{23} C_1 + l_2 C_1 S_2) \\ - S_\theta (l_3 S_{23} S_1 + l_2 S_1 S_2) \end{array} \right) \dots \\ \dots + \dot{\theta} \left(\begin{array}{c} C_\theta (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ + S_\theta (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{array} \right) \dots \\ \dots + \dot{q}_3 (l_3 S_{23} C_1 C_\theta - l_3 S_{23} S_1 S_\theta) \end{array} \right)^2 \\
& \dots + \frac{m_3}{2} \left(\begin{array}{c} \dot{q}_2 \left(\begin{array}{c} S_\theta (l_3 S_{23} C_1 + l_2 C_1 S_2) \\ + C_\theta (l_3 S_{23} S_1 + l_2 S_1 S_2) \end{array} \right) \dots \\ \dots - \dot{q}_1 \left(\begin{array}{c} C_\theta (l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \\ - S_\theta (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \end{array} \right) \dots \\ \dots + \dot{\theta} \left(\begin{array}{c} S_\theta (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ - C_\theta (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{array} \right) \dots \\ \dots + \dot{q}_3 \left(\begin{array}{c} l_3 S_{23} C_1 S_\theta \\ + l_3 S_{23} C_\theta S_1 \end{array} \right) - \dot{y}_p \end{array} \right)^2 \dots \\
& \dots + \frac{m_2}{2} \left(\begin{array}{c} \dot{y}_p - \dot{q}_2 \left(\begin{array}{c} l_2 C_1 S_2 S_\theta \\ + l_2 S_1 S_2 C_\theta \end{array} \right) \\ + \dot{\theta} \left(\begin{array}{c} a C_\theta + l_2 C_1 C_2 C_\theta \\ - l_2 C_2 S_1 S_\theta \end{array} \right) \\ + \dot{q}_1 \left(\begin{array}{c} l_2 C_1 C_2 C_\theta \\ - l_2 C_2 S_1 S_\theta \end{array} \right) \end{array} \right)^2 \\
& \dots + \frac{m_2}{2} \left(\begin{array}{c} \dot{q}_2 \left(\begin{array}{c} l_2 C_1 C_\theta S_2 \\ - l_2 S_1 S_2 S_\theta \end{array} \right) - \dot{x}_p \\ + \dot{\theta} \left(\begin{array}{c} a S_\theta + l_2 C_1 C_2 S_\theta \\ + l_2 C_2 S_1 C_\theta \end{array} \right) \\ + \dot{q}_1 \left(\begin{array}{c} l_2 C_1 C_2 S_\theta \\ + l_2 C_2 S_1 C_\theta \end{array} \right) \end{array} \right)^2 + \frac{l_2^2 m_2}{2} \dot{q}_2^2 C_2^2
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$P = (m_2 + m_3)gh + m_2 gl_2 \sin(q_2) + m_3 gl_2 \sin(q_2) + m_3 gl_3 \sin(q_2 + q_3) \tag{3.91}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de las energías cinética y potencial se aplica el método Euler-Lagrange, restando la energía potencial (3.91) de la energía cinética (3.90), determinando el Lagrangeano (3.92).

$$\begin{aligned}
L = & \left(\frac{m+m_2+m_3}{2} \right) \dot{x}_p^2 + \left(\frac{m+m_2+m_3}{2} \right) \dot{y}_p^2 + \left(\frac{l_3^2 m_3 C_{23}^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 + l_2^2 m_3 C_2^2}{2} + \frac{2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2}{2} \right) \dot{q}_1^2 \\
& \left(\frac{m+m_2+m_3+a^2 m+a^2 m_2+a^2 m_3+l_3^2 m_3 C_{23}^2+l_2^2 m_2 C_2^2}{2} + \frac{l_2^2 m_3 C_2^2 + a l_3 m_3 C_{23} C_1 + l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2 + a l_2 m_2 C_1 C_2 + a l_2 m_3 C_1 C_2}{2} \right) \dot{\theta}^2 + \left(\frac{l_3^2 m_3}{2} \right) \dot{q}_3^2 \\
& + \left(\frac{l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3 C_3}{2} \right) \dot{q}_2^2 - S_{\theta 1} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \dot{q}_1 \dot{x} \\
& - C_{\theta 1} \begin{pmatrix} l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 \\ + l_3 m_3 S_{23} \end{pmatrix} \dot{q}_2 \dot{x} - \begin{pmatrix} m_2 (S_{\theta} (a + l_2 C_1 C_2) + l_2 C_2 C_{\theta} S_1) - a m S_{\theta} \\ + m_3 \begin{pmatrix} C_{\theta} (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ + S_{\theta} (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 \cos(q_1) C_2) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \dot{\theta} \dot{x} \\
& - l_3 m_3 C_{\theta 1} S_{23} \dot{q}_3 \dot{x} - l_3 m_3 S_{23} S_{\theta 1} \dot{q}_3 \dot{y} + \begin{pmatrix} m_2 (C_{\theta} (a + l_2 C_1 C_2) - l_2 C_2 S_1 S_{\theta}) + a m C_{\theta} \\ - m_3 \begin{pmatrix} S_{\theta} (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ - C_{\theta} (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \dot{\theta} \dot{y} \\
& + C_{\theta 1} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \dot{q}_1 \dot{y} - S_{\theta 1} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \dot{q}_2 \dot{y} \\
& + \left(\frac{l_3^2 m_3 C_{23}^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 + l_2^2 m_3 C_2^2}{2} + \frac{a l_3 m_3 C_{23} C_1 + 2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2}{2} + \frac{a l_2 m_2 C_1 C_2 + a l_2 m_3 C_1 C_2}{2} \right) \dot{q}_1 \dot{\theta} - a S_1 (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \dot{q}_2 \dot{\theta} \\
& - a l_3 m_3 S_{23} S_1 \dot{q}_3 \dot{\theta} + l_3 m_3 (l_3 + l_2 C_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (m_2 (h + l_2 S_2) + m_3 (h + l_3 S_{23} + l_2 S_2)) g
\end{aligned} \tag{3.92}$$

El método de Euler-Lagrange mediante (3.92) determina el torque y las fuerzas generadas en el punto de robot móvil que soporta la carga del brazo robótico (x_p, y_p, θ_p) y el torque

en cada articulación del manipulador (q_1, q_2, q_3) , usando $\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{dL}{d\mathbf{q}}$.

Resolviendo la derivada de (3.92) respecto a las velocidades lineales y angulares $(\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{\theta}_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, se halla (3.93), (3.94), (3.95), (3.96), (3.97) y (3.98).

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{d\dot{x}} = & (m+m_2+m_3) \dot{x} + (l_3 m_3 C_{\theta 1} S_{23}) \dot{q}_3 - S_{\theta 1} \begin{pmatrix} l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 \\ + l_3 m_3 C_{23} \end{pmatrix} \dot{q}_1 \dots \\
& \dots - \begin{pmatrix} m_2 (S_{\theta} (a + l_2 C_1 C_2) + l_2 C_2 C_{\theta} S_1) - a m S_{\theta} \\ + m_3 \begin{pmatrix} C_{\theta} (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ + S_{\theta} (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \dot{\theta} - C_{\theta 1} \begin{pmatrix} l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 \\ + l_3 m_3 S_{23} \end{pmatrix} \dot{q}_2
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\frac{dL}{d\dot{y}_p} = (m + m_2 + m_3) \dot{y} + (C_{1\theta}(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})) \dot{q}_1 - l_3 m_3 S_{23} S_{\theta 1} \dot{q}_3 \dots$$

$$\dots + \begin{pmatrix} m_2 (C_\theta (a + l_2 C_1 C_2) - 2l_2 C_2 S_1 S_\theta) + a m C_{\theta \dots} \\ \dots - m_3 \begin{pmatrix} S_\theta (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ -C_\theta (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \dot{\theta} - S_{\theta 1} \begin{pmatrix} l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 \dots \\ \dots + l_3 m_3 S_{23} \end{pmatrix} \dot{q}_2 \quad (3.94)$$

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}_p} = \begin{pmatrix} m + m_2 + m_3 + a^2 m_2 + a^2 m_3 + m a^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 \\ + l_2^2 m_3 C_2^2 + l_3^2 m_3 C_{23}^2 + 2a l_3 m_3 C_{23} C_1 + 2a l_2 m_2 C_1 C_2 \\ + 2a l_2 m_3 C_1 C_2 + 2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2 \end{pmatrix} \dot{\theta} - a l_3 m_3 S_{23} S_1 \dot{q}_3 \dots$$

$$\dots + \begin{pmatrix} l_3^2 m_3 C_{23}^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 + l_2^2 m_3 C_2^2 \\ + a l_3 m_3 C_{23} C_1 + 2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2 \\ + a l_2 m_2 C_1 C_2 + a l_2 m_3 C_1 C_2 \end{pmatrix} \dot{q}_1 + \begin{pmatrix} m a C_\theta + a m_2 C_\theta + a m_3 C_\theta - l_3 m_3 C_{23} S_1 S_\theta \\ + l_3 m_3 C_{23} C_1 C_\theta + l_2 m_2 C_1 C_2 C_\theta \\ - l_2 m_2 C_2 S_1 S_\theta - l_2 m_3 C_2 S_1 S_\theta + l_2 m_3 C_1 C_2 C_\theta \end{pmatrix} \dot{y} \dots$$

$$\dots + \begin{pmatrix} -m a S_\theta - a m_2 S_\theta - a m_3 S_\theta - l_3 m_3 C_{23} C_1 S_\theta \\ - l_3 m_3 C_{23} C_\theta S_1 - l_2 m_3 C_1 \cos(q_2) S_\theta \\ - l_2 m_2 C_1 C_2 S_\theta - l_2 m_2 C_2 C_\theta \sin(q_1) - l_2 m_3 C_2 C_\theta S_1 \end{pmatrix} \dot{x} - \begin{pmatrix} a l_3 m_3 S_{23} S_1 + a l_2 m_2 S_1 S_2 \\ + a l_2 m_3 S_1 S_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2 \quad (3.95)$$

$$\frac{dL}{d\dot{q}_1} = -S_{\theta 1} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \dot{x} + C_{\theta 1} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 \cos(q_2) + l_3 m_3 C_{23}) \dot{y} \dots$$

$$\dots + \begin{pmatrix} l_3^2 m_3 C_{23}^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 + l_2^2 m_3 C_2^2 + a l_3 m_3 C_{23} C_1 \\ + 2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2 + a l_2 m_2 C_1 C_2 + a l_2 m_3 C_1 C_2 \end{pmatrix} \dot{\theta} + \begin{pmatrix} l_3^2 m_3 C_{23}^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 \\ + l_2^2 m_3 C_2^2 + 2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2 \end{pmatrix} \dot{q}_1 \quad (3.96)$$

$$\frac{dL}{d\dot{q}_2} = -C_{\theta 1} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \dot{x} - a \sin(q_1) (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \dot{\theta}$$

$$+ l_3 m_3 (l_3 + l_2 C_3) \dot{q}_3 - S_{\theta 1} \begin{pmatrix} l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 \\ + l_3 m_3 S_{23} \end{pmatrix} \dot{y} + \begin{pmatrix} l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 \\ + l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3 C_3 \end{pmatrix} \dot{q}_2 \quad (3.97)$$

$$\frac{dL}{d\dot{q}_3} = -l_3 m_3 C_{\theta 1} S_{23} \dot{x} - l_3 m_3 S_{23} S_{\theta 1} \dot{y} - a l_3 m_3 S_{23} S_1 \dot{\theta} + l_3 m_3 (l_3 + l_2 C_3) \dot{q}_2 + l_3^2 m_3 \dot{q}_3 \quad (3.98)$$

Derivando las ecuaciones (3.93), (3.94), (3.95), (3.96), (3.97) y (3.98) respecto al tiempo según el método Euler-Lagrange se encuentran las expresiones (3.99), (3.100), (3.101), (3.102), (3.103) y (3.104), respetivamente.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dx_p} \right) &= (m + m_2 + m_3) \ddot{x} - l_3 m_3 C_{\theta_1} S_{23} \ddot{q}_3 + \left(\begin{array}{c} -m_2 (S_{\theta} (a + l_2 C_1 C_2) + l_2 C_2 C_{\theta} S_1) \\ -m_3 \left(\begin{array}{c} C_{\theta} (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ + S_{\theta} (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{array} \right) - am S_{\theta} \end{array} \right) \ddot{\theta} \\
&- S_{\theta_1} \left(\begin{array}{c} l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 \\ + l_3 m_3 C_{23} \end{array} \right) \ddot{q}_1 - C_{\theta_1} \left(\begin{array}{c} l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 \\ + l_3 m_3 S_{23} \end{array} \right) \ddot{q}_2 - 2l_3 m_3 C_{23} C_{\theta_1} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 2l_3 m_3 S_{23} S_{\theta_1} \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
&+ \left(\begin{array}{c} m_3 \left(\begin{array}{c} S_{\theta} (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ - C_{\theta} (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{array} \right) \\ -m_2 (C_{\theta} (a + l_2 C_1 C_2) - l_2 C_2 S_1 S_{\theta}) - am C_{\theta} \end{array} \right) \dot{\theta}^2 - C_{\theta_1} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \dot{q}_1^2 \\
&- C_{\theta_1} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \dot{q}_2^2 - l_3 m_3 C_{23} C_{\theta_1} \dot{q}_3^2 - 2C_{\theta_1} (l_2 m_2 \cos(q_2) + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \dot{q}_1 \dot{\theta} \\
&+ 2S_{\theta_1} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \dot{q}_2 \dot{\theta} + 2l_3 m_3 S_{23} S_{\theta_1} \dot{q}_3 \dot{\theta} + 2S_{\theta_1} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \dot{q}_1 \dot{q}_2
\end{aligned} \tag{3.99}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dy_p} \right) &= (m + m_2 + m_3) \ddot{y}_p + \left(\begin{array}{c} m_2 (C_{\theta} (a + l_2 C_1 C_2) - l_2 C_2 S_1 S_{\theta}) \\ -m_3 \left(\begin{array}{c} S_{\theta} (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ - C_{\theta} (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{array} \right) + am C_{\theta} \end{array} \right) \ddot{\theta} \\
&+ \left(\begin{array}{c} l_3 m_3 C_{23} C_{\theta_1} \\ + l_2 m_2 C_2 C_{\theta_1} + l_2 m_3 C_2 C_{\theta_1} \end{array} \right) \ddot{q}_1 - l_3 m_3 S_{23} S_{\theta_1} \ddot{q}_3 - S_{\theta_1} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \ddot{q}_2 \\
&- S_{\theta_1} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \dot{q}_1^2 - S_{\theta_1} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \dot{q}_2^2 \\
&- \left(\begin{array}{c} m_2 (S_{\theta} (a + l_2 C_1 C_2) + l_2 C_2 C_{\theta} S_1) \\ + m_3 \left(\begin{array}{c} C_{\theta} (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ + S_{\theta} (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{array} \right) + am S_{\theta} \end{array} \right) \dot{\theta}^2 - (l_3 m_3 C_{23} S_{\theta_1}) \dot{q}_3^2 - 2l_3 m_3 C_{23} S_{\theta_1} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
&- 2C_{\theta_1} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2l_3 m_3 S_{23} C_{\theta_1} \dot{q}_1 \dot{q}_3 - 2l_3 m_3 S_{23} C_{\theta_1} \dot{q}_3 \dot{\theta} \\
&- (l_3 m_3 C_{23} S_{\theta_1} + l_2 m_2 C_2 S_{\theta_1} + l_2 m_3 C_2 S_{\theta_1}) 2\dot{q}_1 \dot{\theta} - \left(\begin{array}{c} l_3 m_3 S_{23} C_{\theta_1} + l_2 m_2 \sin(q_2) C_{\theta_1} \\ + l_2 m_3 S_2 C_{\theta_1} \end{array} \right) 2\dot{q}_2 \dot{\theta}
\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_p} \right) &= \begin{pmatrix} -m_2(S_\theta(a+l_2C_1C_2)+l_2C_2C_\theta S_1) \\ -m_3(C_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1)) \\ +S_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2) - amS_\theta \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} -m_2(C_\theta(a+l_2C_1C_2)-l_2C_2S_1S_\theta) \\ -m_3(S_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1)+amC_\theta) \\ -C_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2) \end{pmatrix} \ddot{y} \\
&+ \begin{pmatrix} m+m_2+m_3+a^2m+a^2m_2+a^2m_3+l_3^2m_3C_{23}^2 \\ +l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2+2al_3m_3C_{23}C_1 \\ +2l_2l_3m_3C_{23}C_2+2al_2m_2C_1C_2+2al_2m_3C_1C_2 \end{pmatrix} \ddot{\theta} + \begin{pmatrix} l_3^2m_3C_{23}^2+l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2 \\ +al_3m_3C_{23}C_1+2l_2l_3m_3C_{23}C_2 \\ +al_2m_2C_1C_2+al_2m_3C_1C_2 \end{pmatrix} \ddot{q}_1 \\
&-aS_1(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23})\ddot{q}_2 - al_3m_3S_{23}\sin(q_1)\ddot{q}_3 - aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1^2 \\
&-aS_1 \begin{pmatrix} l_2m_2C_2+l_2m_3C_2 \\ +l_3m_3C_{23} \end{pmatrix} \dot{q}_2^2 - al_3m_3C_{23}S_1\dot{q}_3^2 + \begin{pmatrix} m_3(S_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1)-amC_\theta) \\ -C_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2) \\ -m_2(C_\theta(a+l_2C_1C_2)-l_2C_2S_1S_\theta) \end{pmatrix} \dot{\theta}\dot{x} \\
&-C_{1\theta}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{x} + S_{\theta 1}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23})\dot{q}_2\dot{x} + (l_3m_3S_{23}S_{\theta 1})\dot{q}_3\dot{x} \\
&+ \begin{pmatrix} -m_2(S_\theta(a+l_2C_1C_2)+l_2C_2C_\theta S_1) \\ -m_3(C_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1)) \\ +S_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2) - amS_\theta \end{pmatrix} \dot{\theta}\dot{y} - S_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{y} \\
&-S_{\theta 1}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23})\dot{q}_2\dot{y} - l_3m_3C_{\theta 1}S_{23}\dot{q}_3\dot{y} - 2aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{\theta} \\
&+ \begin{pmatrix} -2l_2^2m_2C_2S_2-2l_2^2m_3C_2S_2-2l_3^2m_3C_{23}S_{23}-2al_3m_3S_{23}C_1-2l_2l_3m_3C_{23}S_2 \\ -2l_2l_3m_3S_{23}C_2-2al_2m_2C_1S_2-2al_2m_3C_1S_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2\dot{\theta} \tag{3.101} \\
&-2l_3m_3S_{23}(l_3C_{23}+aC_1+l_2C_2)\dot{q}_3\dot{\theta} - aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&-aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{q}_3 - aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_2\dot{q}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{q}_1} \right) &= -S_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\ddot{x} + C_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\ddot{y} \\
&+ \begin{pmatrix} l_3^2m_3C_{23}^2+l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2+al_3m_3C_{23}C_1 \\ +2l_2l_3m_3C_{23}C_2+al_2m_2C_1C_2+al_2m_3C_1C_2 \end{pmatrix} \ddot{\theta} + \begin{pmatrix} l_3^2m_3C_{23}^2+l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2 \\ +2l_2l_3m_3C_{23}C_2 \end{pmatrix} \ddot{q}_1 \\
&+ (-C_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23}))\dot{\theta}\dot{x} - C_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{x} \\
&+ (S_{1\theta}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23}))\dot{q}_2\dot{x} + (l_3m_3S_{23}S_{1\theta})\dot{q}_3\dot{x} - l_3m_3C_{1\theta}S_{23}\dot{q}_3\dot{y} \\
&-S_{1\theta}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{\theta}\dot{y} - S_{1\theta}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{y} \tag{3.102} \\
&-C_{1\theta}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_2\dot{y} - a\sin(q_1)(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{\theta} \\
&+ \begin{pmatrix} -2l_2^2m_2C_2S_2-2l_2^2m_3C_2S_2-2l_3^2m_3C_{23}S_{23} \\ -al_3m_3S_{23}C_1-2l_2l_3m_3C_{23}S_2-al_2m_2C_1S_1 \\ -2l_2l_3m_3S_{23}C_{22}-al_2m_3C_1S_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2\dot{\theta} - l_3m_3S_{23}(2l_3C_{23}+a\cos(q_1)+2l_2C_2)\dot{q}_3\dot{\theta} \\
&+ (-l_3^2m_3\sin(2q_2+2q_3)-l_2^2m_2\sin(2q_2)-l_2^2m_3\sin(2q_2)-2l_2l_3m_3\sin(2q_2+q_3))\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&-2l_3m_3S_{23}(l_3C_{23}+l_2C_2)\dot{q}_1\dot{q}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_2}\right) &= -C_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\ddot{x} - S_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\ddot{y}.. \\
&\dots - aS_1(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\ddot{\theta} + (l_2^2m_2 + l_2^2m_3 + l_3^2m_3 + 2l_2l_3m_3C_3)\ddot{q}_2.. \\
&\dots + (l_3m_3(l_3 + l_2C_3))\ddot{q}_3 - l_2l_3m_3S_3\dot{q}_3^2 + (S_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23}))\dot{\theta}\dot{x}.. \\
&\dots + (S_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23}))\dot{q}_1\dot{x} - C_{\theta_1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{q}_2\dot{x}.. \\
&\dots - l_3m_3C_{23}C_{\theta_1}\dot{q}_3\dot{x} - C_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\dot{\theta}\dot{y} - al_3m_3C_{23}\sin(q_1)\dot{q}_3\dot{\theta} \\
&\dots - S_{\theta_1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{q}_2\dot{y} - l_3m_3C_{23}S_{\theta_1}\dot{q}_3\dot{y} \\
&\dots + (-aC_1(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23}))\dot{q}_1\dot{\theta} - 2l_2l_3m_3S_3\dot{q}_3\dot{q}_2 \\
&\dots - C_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\dot{q}_1\dot{y} - aS_1(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{q}_2\dot{\theta}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_3}\right) &= (-l_3m_3C_{\theta_1}S_{23})\ddot{x} - l_3m_3S_{\theta_1}S_{23}\ddot{y} - al_3m_3S_{23}S_1\ddot{\theta} + (l_3m_3(l_3 + l_2C_3))\ddot{q}_2.. \\
&\dots + (l_3^2m_3)\ddot{q}_3 + (l_3m_3S_{23}S_{\theta_1})\dot{\theta}\dot{x} + (l_3m_3S_{23}S_{\theta_1})\dot{q}_1\dot{x} - l_3m_3C_{23}C_{\theta_1}\dot{q}_2\dot{x} - l_3m_3C_{23}C_{\theta_1}\dot{q}_3\dot{x} \\
&\dots - l_3m_3C_{\theta_1}S_{23}\dot{\theta}\dot{y} - l_3m_3C_{\theta_1}S_{23}\dot{q}_1\dot{y} - al_3m_3C_{23}S_1\dot{q}_3\dot{\theta} - l_3m_3C_{23}S_{\theta_1}\dot{q}_2\dot{y} - l_3m_3C_{23}S_{\theta_1}\dot{q}_3\dot{y} \\
&\dots - al_3m_3S_{23}C_1\dot{q}_1\dot{\theta} - al_3m_3C_{23}S_1\dot{q}_2\dot{\theta} - l_2l_3m_3S_3\dot{q}_2\dot{q}_3
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Continuando con el método de Euler-Lagrange, se resuelve la derivada de (3.92) respecto a las posiciones lineales y angulares, para determinar (3.105), (3.106), (3.107), (3.108), (3.109) y (3.110).

$$\frac{dL}{dx_p} = 0 \tag{3.105}$$

$$\frac{dL}{dy} = 0 \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{d\theta_p} &= \left(m_3 \begin{pmatrix} S_{\theta}(l_3C_{23}S_1 + l_2C_2S_1) - .. \\ ..C_{\theta}(a + l_3C_{23}C_1 + l_2C_1C_2) \\ -m_2(C_{\theta}(a + l_2C_1C_2) - l_2C_2S_1S_{\theta}) - amC_{\theta} \end{pmatrix} \right) \dot{\theta}\dot{x} - C_{\theta_1} \begin{pmatrix} l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 \\ +l_3m_3C_{23} \end{pmatrix} \dot{q}_1\dot{x}.. \\
&\dots - \left(m_3 \begin{pmatrix} C_{\theta}(l_3C_{23}S_1 + l_2C_2S_1) + .. \\ ..S_{\theta}(a + l_3C_{23}C_1 + l_2C_1C_2) \\ +m_2(S_{\theta}(a + l_2C_1C_2) + l_2C_2C_{\theta}S_1) + amS_{\theta} \end{pmatrix} \right) \dot{\theta}\dot{y} + \begin{pmatrix} S_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2) \\ +l_3m_3S_{23} \end{pmatrix} \dot{q}_2\dot{x}.. \\
&\dots + (l_3m_3S_{23}S_{\theta_1})\dot{q}_3\dot{x} - S_{\theta_1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{y}.. \\
&\dots - C_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\dot{q}_2\dot{y} - l_3m_3C_{\theta_1}S_{23}\dot{q}_3\dot{y}
\end{aligned} \tag{3.107}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dq_1} &= -aS_1(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{\theta}^2 - C_{\theta 1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{\theta}\dot{x}.. \\
&.. - C_{\theta 1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{x} + (S_{\theta 1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23}))\dot{q}_2\dot{x}.. \\
&.. - S_{\theta 1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\dot{\theta}\dot{y} - S_{\theta 1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\dot{q}_1\dot{y}.. \\
&.. - C_{\theta 1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\dot{q}_2\dot{y} - aS_1(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{\theta}.. \\
&.. + l_3m_3S_{23}S_{\theta 1}\dot{q}_3\dot{x} - aC_1(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\dot{q}_2\dot{\theta} - al_3m_3S_{23}C_1\dot{q}_3\dot{\theta} - l_3m_3C_{\theta 1}S_{23}\dot{q}_3\dot{y}
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dq_2} &= \left(\begin{array}{l} -l_2^2m_2C_2S_2 - l_2^2m_3C_2S_2 - l_3^2m_3C_{23}S_{23} \\ -al_3m_3S_{23}C_1 - l_2l_3m_3C_{23}S_2 \\ -l_2l_3m_3S_{23}C_2 - al_2m_2C_1S_2 - al_2m_3C_1S_2 \end{array} \right) \dot{\theta}^2 + \left(\begin{array}{l} S_{\theta 1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2) \\ +l_3m_3S_{23} \end{array} \right) \dot{\theta}\dot{x}.. \\
&.. + \left(\frac{-l_3^2m_3\sin(2q_2 + 2q_3) - l_2^2m_2\sin(2q_2) - l_2^2m_3\sin(2q_2) - 2l_2l_3m_3\sin(2q_2 + q_3)}{2} \right) \dot{q}_1^2 \\
&.. + (S_{\theta 1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23}))\dot{q}_1\dot{x} + (-C_{\theta 1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23}))\dot{q}_2\dot{x} \\
&.. + (-l_3m_3C_{23}C_{\theta 1})\dot{q}_3\dot{x} + (-C_{\theta 1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23}))\dot{\theta}\dot{y} + (-l_3m_3C_{23}S_{\theta 1})\dot{q}_3\dot{y} \\
&.. + (-C_{\theta 1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23}))\dot{q}_1\dot{y} + (-S_{\theta 1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23}))\dot{q}_2\dot{y} \\
&.. + \left(\begin{array}{l} -2l_2^2m_2C_2S_2 - 2l_2^2m_3C_2S_2 - 2l_3^2m_3C_{23}S_{23} \\ -al_3m_3S_{23}C_1 - 2l_2l_3m_3C_{23}S_2 - 2l_2l_3m_3S_{23}C_2 \\ -al_2m_2C_1\sin(q_2) - al_2m_3C_1\sin(q_2) \end{array} \right) \dot{q}_1\dot{\theta} - al_3m_3C_{23}S_1\dot{q}_3\dot{\theta} \\
&.. - aS_{\theta 1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{q}_2\dot{\theta} - (l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})g
\end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dq_3} &= (-l_3m_3S_{23}(l_3C_{23} + aC_1 + l_2C_2))\dot{\theta}^2 + (-l_3m_3S_{23}(l_3C_{23} + l_2C_2))\dot{q}_1^2 \\
&- l_2l_3m_3S_3\dot{q}_2^2 + (l_3m_3S_{23}S_{1\theta})\dot{\theta}\dot{x} + (l_3m_3S_{23}S_{1\theta})\dot{q}_1\dot{x} - l_3m_3C_{23}C_{\theta 1}\dot{q}_2\dot{x} \\
&- l_3m_3C_{23}C_{\theta 1}\dot{q}_3\dot{x} - l_3m_3C_{\theta 1}S_{23}\dot{\theta}\dot{y} - l_3m_3C_{\theta 1}S_{23}\dot{q}_1\dot{y} - l_3m_3C_{23}S_{1\theta}\dot{q}_2\dot{y} \\
&- l_3m_3C_{23}S_{1\theta}\dot{q}_3\dot{y} - al_3m_3C_{23}S_1\dot{q}_2\dot{\theta} - l_3m_3S_{23}(2l_3C_{23} + aC_1 + 2l_2C_2)\dot{q}_1\dot{\theta} \\
&+ (-al_3m_3C_{23}S_1)\dot{q}_3\dot{\theta} + (-l_2l_3m_3S_3)\dot{q}_2\dot{q}_3 + (-l_3m_3C_{23})g
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Aplicando $f_x = \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dt} - \frac{dL}{dx}^0$ se utiliza (3.99) y (3.105), para encontrar la fuerza en x

respecto a $\{R\}$ generada en la plataforma sobre el punto de interés.

$$f_x = \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dt} \tag{3.111}$$

De forma parecida a (3.11), se utiliza $f_y = \frac{d\left(\frac{dL}{dy}\right)}{dt} - \frac{dL}{dy}$ sustituyendo (3.100) y (3.106),

para encontrar la fuerza en y respecto a $\{R\}$ generada en el punto de interés de la plataforma.

$$f_y = \frac{d\left(\frac{dL}{dy}\right)}{dt} \quad (3.112)$$

Aplicando $\tau_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta}$ se utiliza (3.101) y (3.107), para encontrar el torque

generado sobre sobre la plataforma móvil.

$$\begin{aligned} \tau_\theta = & \begin{pmatrix} -m_2(S_\theta(a+l_2C_1C_2)+l_2C_2C_\theta S_1) \\ -m_3(C_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1)) \\ +S_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2) - amS_\theta \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} -m_2(C_\theta(a+l_2C_1C_2)-l_2C_2S_1S_\theta) \\ -m_3(S_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1)) \\ -C_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2) + amC_\theta \end{pmatrix} \ddot{y} \\ & + \begin{pmatrix} m+m_2+m_3+a^2m+a^2m_2+a^2m_3+l_3^2m_3C_{23}^2 \\ +l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2+2al_3m_3C_{23}C_1 \\ +2l_2l_3m_3C_{23}C_2+2al_2m_2C_1C_2+2al_2m_3C_1C_2 \end{pmatrix} \ddot{\theta} + \begin{pmatrix} l_3^2m_3C_{23}^2+l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2 \\ +al_3m_3C_{23}C_1+2l_2l_3m_3C_{23}C_2 \\ +al_2m_2C_1C_2+al_2m_3C_1C_2 \end{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ & -aS_1(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23})\ddot{q}_2 - aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1^2 \\ & -aS_1\begin{pmatrix} l_2m_2C_2+l_2m_3C_2 \\ +l_3m_3C_{23} \end{pmatrix}\dot{q}_2^2 - al_3m_3C_{23}S_1\dot{q}_3^2 - 2aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{\theta} \quad (3.113) \\ & + \begin{pmatrix} -l_2^2m_2C_2S_2-l_2^2m_3C_2S_2-l_3^2m_3C_{23}S_{23}-al_3m_3S_{23}C_1 \\ -l_2l_3m_3C_{23}S_2-l_2l_3m_3S_{23}C_2-al_2m_2C_1S_2-al_2m_3C_1S_2 \end{pmatrix} 2\dot{q}_2\dot{\theta} - al_3m_3S_{23}S_1\ddot{q}_3 \\ & -2l_3m_3S_{23}(l_3C_{23}+aC_1+l_2C_2)\dot{q}_3\dot{\theta} - aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ & -aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1\dot{q}_3 - aS_1(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_2\dot{q}_3 \end{aligned}$$

De forma similar a (3.113), mediante $\tau_1 = \frac{d\left(\frac{dL}{dq_1}\right)}{dt} - \frac{dL}{dq_1}$ se utiliza (3.102) y (3.108), para

encontrar el torque del motor en la primera articulación del manipulador que está montado sobre la plataforma móvil.

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & -S_{\theta_1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\ddot{x} + C_{\theta_1}(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\ddot{y} \\
& + \left(l_3^2m_3C_{23}^2 + l_2^2m_2C_2^2 + l_2^2m_3C_2^2 + al_3m_3C_{23}C_1 \right) \ddot{\theta} + \left(l_3^2m_3C_{23}^2 + l_2^2m_2C_2^2 + l_2^2m_3C_2^2 \right) \ddot{q}_1 \\
& + \left(2l_2l_3m_3C_{23}C_2 + al_2m_2C_1C_2 + al_2m_3C_1C_2 \right) \ddot{\theta} + \left(2l_2l_3m_3C_{23}C_2 \right) \ddot{q}_1 \\
& - \left(l_2^2m_2C_2S_2 + l_2^2m_3C_2S_2 + l_3^2m_3C_{23}S_{23} \right) 2\dot{q}_2\dot{\theta} - l_3m_3S_{23}(l_3C_{23} + l_2C_2)2\dot{q}_3\dot{\theta} \\
& + \left(l_2l_3m_3C_{23}S_2 + l_2l_3m_3S_{23}C_{22} \right) 2\dot{q}_2\dot{\theta} - l_3m_3S_{23}(l_3C_{23} + l_2C_2)2\dot{q}_3\dot{\theta} \\
& - \left(l_3^2m_3\sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2m_2\sin(2q_2) + l_2^2m_3\sin(2q_2) + 2l_2l_3m_3\sin(2q_2 + q_3) \right) \dot{q}_1\dot{q}_2 \\
& - 2l_3m_3S_{23}(l_3C_{23} + l_2C_2)\dot{q}_1\dot{q}_3 + aS_1(l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 + l_3m_3C_{23})\dot{\theta}^2
\end{aligned} \tag{3.114}$$

De forma similar a (3.113) y (3.114), mediante $\tau_2 = \frac{d\left(\frac{dL}{dq_2}\right)}{dt} - \frac{dL}{dq_2}$ se utiliza (3.103) y (3.109), para encontrar el torque del motor en la segunda articulación del manipulador que está montado sobre la plataforma móvil.

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & -C_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\ddot{x} - S_{\theta_1}(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\ddot{y} \\
& .. - aS_1(l_2m_2S_2 + l_2m_3S_2 + l_3m_3S_{23})\ddot{\theta} + \left(l_2^2m_2 + l_2^2m_3 + l_3^2m_3 + 2l_2l_3m_3C_3 \right) \ddot{q}_2 \\
& + \left(\frac{l_3^2m_3\sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2m_2\sin(2q_2) + l_2^2m_3\sin(2q_2) + 2l_2l_3m_3\sin(2q_2 + q_3)}{2} \right) \dot{q}_1^2 \\
& .. + \left(l_3m_3(l_3 + l_2C_3) \right) \ddot{q}_3 - l_2l_3m_3S_3\dot{q}_3^2 + \left(\begin{array}{l} l_2^2m_2C_2S_2 + l_2^2m_3C_2S_2 + l_3^2m_3C_{23}S_{23} \\ +al_3m_3S_{23}C_1 + l_2l_3m_3C_{23}S_2 \\ +l_2l_3m_3S_{23}C_2 + al_2m_2C_1S_2 - al_2m_3C_1S_2 \end{array} \right) \dot{\theta}^2 \\
& .. + \left(\begin{array}{l} l_2^2m_2C_2S_2 + l_2^2m_3C_2S_2 + l_3^2m_3C_{23}S_{23} \\ +l_2l_3m_3C_{23}S_2 + l_2l_3m_3S_{23}C_2 \end{array} \right) 2\dot{q}_1\dot{\theta} - 2l_2l_3m_3S_3\dot{q}_3\dot{q}_2 + \left(\begin{array}{l} l_2m_2C_2 + l_2m_3C_2 \\ +l_3m_3C_{23} \end{array} \right) g
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Así también, se determina el torque del motor en tercera articulación del manipulador que

está montado sobre la plataforma móvil, mediante $\tau_3 = \frac{d\left(\frac{dL}{dq_3}\right)}{dt} - \frac{dL}{dq_3}$ y usando (3.104) y (3.110).

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & -l_3m_3C_{\theta_1}S_{23}\ddot{x} - l_3m_3S_{\theta_1}S_{23}\ddot{y} - al_3m_3S_{23}S_1\ddot{\theta} + \left(l_3m_3(l_3 + l_2C_3) \right) \ddot{q}_2 \\
& .. + l_3^2m_3\ddot{q}_3 + l_3m_3S_{23}(l_3C_{23} + aC_1 + l_2C_2)\dot{\theta}^2 + l_3m_3S_{23}(l_3C_{23} + l_2C_2)\dot{q}_1^2 \\
& .. + l_3m_3S_{23}(l_3C_{23} + l_2C_2)2\dot{q}_1\dot{\theta} + l_2l_3m_3S_3\dot{q}_2^2 + (l_3m_3C_{23})g
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Agrupando (3.111), (3.112), (3.113), (3.114), (3.115) y (3.116) de forma matricial se obtiene el modelo dinámico (3.117) del manipulador, donde $f(t) = [fx \quad fy \quad \tau_\theta \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3]$ son las fuerzas y torques producidas en la plataforma móvil y en las articulaciones del manipulador móvil.

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (3.117)$$

donde, $\mathbf{q} = [x \quad y \quad \theta \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ 0 & 0 & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ 0 & 0 & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_3 g(l_3 \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)) + l_2 m_2 g \cos(q_2) \\ l_3 m_3 g \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

Con:

$$M_{11} = m + m_2 + m_3 \quad M_{12} = 0 \quad M_{16} = -l_3 m_3 C_{\theta 1} S_{23}$$

$$M_{13} = -m_2 (S_\theta (a + l_2 C_1 C_2) + l_2 C_2 C_\theta S_1) - m_3 \left(\begin{array}{l} C_\theta (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) \\ + S_\theta (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) \end{array} \right) - am S_\theta$$

$$M_{14} = -S_{\theta 1} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \quad M_{15} = -C_{\theta 1} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23})$$

$$M_{21} = 0 \quad M_{22} = m + m_2 + m_3 \quad M_{26} = -l_3 m_3 S_{23} S_{\theta 1}$$

$$M_{23} = m_2 (C_\theta (a + l_2 C_1 C_2) - l_2 C_2 S_1 S_\theta) - m_3 (S_\theta (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1) - C_\theta (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2)) + am C_\theta$$

$$M_{24} = l_3 m_3 C_{23} C_{\theta 1} + l_2 m_2 C_2 C_{\theta 1} + l_2 m_3 C_2 C_{\theta 1} \quad M_{25} = -S_{\theta 1} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23})$$

$$\begin{aligned}
M_{31} &= -m_2(S_\theta(a+l_2C_1C_2)+l_2C_2C_\theta S_1)-m_3(C_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1)+S_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2))-amS_\theta \\
M_{32} &= m_2(C_\theta(a+l_2C_1C_2)-l_2C_2S_1S_\theta)-m_3(S_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1)-C_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2))+amC_\theta \\
M_{33} &= m+m_2+m_3+a^2m+a^2m_2+a^2m_3+l_3^2m_3C_{23}^2+l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2+2al_3m_3C_{23}C_1 \\
&\quad +2l_2l_3m_3C_{23}C_2+2al_2m_2C_1C_2+2al_2m_3C_1C_2 \\
M_{34} &= l_3^2m_3C_{23}^2+l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2+al_3m_3C_{23}C_1+2l_2l_3m_3C_{23}C_2+al_2m_2C_1C_2+al_2m_3C_1C_2 \\
&\quad +2l_2l_3m_3\cos(q_2+q_3)\cos(q_2)+al_2m_2\cos(q_1)\cos(q_2)+al_2m_3\cos(q_1)\cos(q_2) \\
M_{35} &= -aS_1(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23}) \quad M_{36} = -al_3m_3S_{23}S_1 \\
M_{41} &= -S_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23}) \quad M_{42} = C_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23}) \\
M_{43} &= l_3^2m_3C_{23}^2+l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2+al_3m_3C_{23}C_1+2l_2l_3m_3C_{23}C_2+al_2m_2C_1C_2+al_2m_3C_1C_2 \\
M_{44} &= l_3^2m_3C_{23}^2+l_2^2m_2C_2^2+l_2^2m_3C_2^2+2l_2l_3m_3C_{23}C_2 \quad M_{45} = 0 \quad M_{46} = 0 \\
M_{51} &= -C_{\theta 1}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23}) \quad M_{52} = -S_{\theta 1}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23}) \\
M_{53} &= -aS_1(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23}) \quad M_{54} = 0 \\
M_{55} &= l_2^2m_2+l_2^2m_3+l_3^2m_3+2l_2l_3m_3C_3 \quad M_{56} = l_3m_3(l_3+l_2C_3) \\
M_{61} &= -l_3m_3C_{\theta 1}S_{23} \quad M_{62} = -l_3m_3S_{\theta 1}S_{23} \quad M_{63} = -al_3m_3S_{23}S_1 \\
M_{64} &= 0 \quad M_{65} = l_3m_3(l_3+l_2C_3) \quad M_{66} = l_3^2m_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13} &= \left(m_3 \begin{pmatrix} S_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1) \\ -C_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2) \end{pmatrix} - m_2(C_\theta(a+l_2C_1C_2)-l_2C_2S_1S_\theta) - amC_\theta \right) \dot{\theta} \\
&\quad - C_{\theta 1}(l_2m_2\cos(q_2)+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1 + S_{\theta 1}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23})\dot{q}_2 + l_3m_3S_{23}S_{\theta 1}\dot{q}_3 \\
C_{14} &= -C_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1 - C_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{\theta} \\
&\quad + S_{\theta 1}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23})\dot{q}_2 + l_3m_3S_{23}S_{\theta 1}\dot{q}_3 \\
C_{15} &= -C_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_2 + S_{\theta 1}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23})\dot{\theta} \\
&\quad + S_{\theta 1}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23})\dot{q}_1 - l_3m_3C_{23}C_{\theta 1}\dot{q}_3 \\
C_{16} &= -l_3m_3C_{23}C_{\theta 1}\dot{q}_3 + l_3m_3S_{23}S_{\theta 1}\dot{\theta} + l_3m_3S_{23}S_{\theta 1}\dot{q}_1 - l_3m_3C_{23}C_{\theta 1}\dot{q}_2 \\
C_{23} &= - \left(m_2(S_\theta(a+l_2C_1C_2)+l_2C_2C_\theta S_1) + amS_\theta \right. \\
&\quad \left. + m_3(C_\theta(l_3C_{23}S_1+l_2C_2S_1)+S_\theta(a+l_3C_{23}C_1+l_2C_1C_2)) \right) \dot{\theta} - l_3m_3S_{23}C_{\theta 1}\dot{q}_3 \\
&\quad - (l_3m_3C_{23}S_{\theta 1}+l_2m_2C_2S_{\theta 1}+l_2m_3C_2S_{\theta 1})\dot{q}_1 - (l_3m_3S_{23}C_{\theta 1}+l_2m_2S_2C_{\theta 1}+l_2m_3S_2C_{\theta 1})\dot{q}_2 \\
C_{24} &= -S_{\theta 1}(l_2m_2C_2+l_2m_3C_2+l_3m_3C_{23})\dot{q}_1 - C_{\theta 1}(l_2m_2S_2+l_2m_3S_2+l_3m_3S_{23})\dot{q}_2 \\
&\quad - l_3m_3S_{23}C_{\theta 1}\dot{q}_3 - (l_3m_3C_{23}S_{\theta 1}+l_2m_2C_2S_{\theta 1}+l_2m_3C_2S_{\theta 1})\dot{\theta}
\end{aligned}$$

$$C_{25} = -S_{\theta_1}(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_2 - C_{\theta_1}(l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23})\dot{q}_1 \\ - (l_3 m_3 S_{23} C_{\theta_1} + l_2 m_2 \sin(q_2) C_{\theta_1} + l_2 m_3 S_2 C_{\theta_1})\dot{\theta} - l_3 m_3 C_{23} S_{\theta_1} \dot{q}_3$$

$$C_{26} = -(l_3 m_3 C_{23} S_{\theta_1})\dot{q}_3 - l_3 m_3 S_{23} C_{\theta_1} \dot{q}_1 - l_3 m_3 S_{23} C_{\theta_1} \dot{\theta} - l_3 m_3 C_{23} S_{\theta_1} \dot{q}_2$$

$$C_{33} = -aS_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_1 - l_3 m_3 S_{23}(l_3 C_{23} + aC_1 + l_2 C_2)\dot{q}_3 \\ - \left(l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + al_3 m_3 S_{23} C_1 \right. \\ \left. + l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 + l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 + al_2 m_2 C_1 S_2 + al_2 m_3 C_1 S_2 \right) \dot{q}_2$$

$$C_{34} = -aS_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_1 - aS_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{\theta} \\ - \frac{a}{2} S_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_2 - \frac{a}{2} S_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_3$$

$$C_{35} = -aS_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_2 - \left(l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + al_3 m_3 S_{23} C_1 \right. \\ \left. + l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 + l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 + al_2 m_2 C_1 S_2 + al_2 m_3 C_1 S_2 \right) \dot{\theta} \\ - \frac{a}{2} S_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_1 - \frac{a}{2} S_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_3$$

$$C_{36} = -al_3 m_3 C_{23} S_1 \dot{q}_3 - l_3 m_3 S_{23}(l_3 C_{23} + aC_1 + l_2 C_2)\dot{\theta} \\ - \frac{a}{2} S_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_1 - \frac{a}{2} S_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{q}_2$$

$$C_{43} = aS_1(l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})\dot{\theta} - \left(l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} \right. \\ \left. + l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 + l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 \right) \dot{q}_2 - l_3 m_3 S_{23}(l_3 C_{23} + l_2 C_2)\dot{q}_3$$

$$C_{44} = -\frac{1}{2} \left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) \dot{q}_2 - l_3 m_3 S_{23}(l_3 C_{23} + l_2 C_2)\dot{q}_3$$

$$C_{45} = - \left(l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 + l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 \right) \dot{\theta} \\ - \frac{1}{2} \left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) \dot{q}_1$$

$$C_{46} = -l_3 m_3 S_{23}(l_3 C_{23} + l_2 C_2)\dot{\theta} - l_3 m_3 S_{23}(l_3 C_{23} + l_2 C_2)\dot{q}_1$$

$$C_{51} = 0 \quad C_{52} = 0$$

$$C_{53} = \left(l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + al_3 m_3 S_{23} C_1 + l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 \right) \dot{\theta} \\ + \left(l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 + l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 \right) \dot{q}_1$$

$$C_{54} = \frac{1}{2} \left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) \dot{q}_1$$

$$+ \left(l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 + l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 \right) \dot{\theta}$$

$$C_{55} = -l_2 l_3 m_3 S_3 \dot{q}_3 \quad C_{56} = -l_2 l_3 m_3 S_3 \dot{q}_3 - l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2$$

$$\begin{aligned}
C_{63} &= l_3 m_3 S_{23} (l_3 C_{23} + a C_1 + l_2 C_2) \dot{\theta} + l_3 m_3 S_{23} (l_3 C_{23} + l_2 C_2) \dot{q}_1 \\
C_{64} &= l_3 m_3 S_{23} (l_3 C_{23} + l_2 C_2) \dot{q}_1 + l_3 m_3 S_{23} (l_3 C_{23} + l_2 C_2) \dot{\theta} \\
C_{65} &= l_2 l_3 m_3 S_3 \dot{q}_2 \quad C_{66} = 0
\end{aligned}$$

donde, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es la matriz de inercia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz de fuerzas centrípetas y centrífugas, y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es el vector de gravedad del robot manipulador móvil.

El objetivo es expresar el modelo dinámico (3.117) a partir de variable comúnmente usados en robot comerciales, es decir trasladar de las variables \dot{x} , \dot{y} y $\dot{\theta}$ a u y ω , realizando una modificación a la matriz $\mathbf{S}_p(\theta)$ indicada en (3.6), se obtiene (3.18).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{\theta} & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T &= \mathbf{S}(\theta) \begin{bmatrix} u & \omega & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.118) \\
\dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{S}(\theta) \mathbf{v}(t)
\end{aligned}$$

Con,

$$\mathbf{S}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_p(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Y para corregir las aceleraciones se obtiene de la derivada temporal de (3.118)

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{S}(\theta) \dot{\mathbf{v}}(t) + \dot{\mathbf{S}}(\theta, \dot{\theta}) \mathbf{v}(t) \quad (3.119)$$

Reemplazando (3.118) y (3.119) en el modelo (3.117) se tiene (3.120).

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{S}(\theta) \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}(\theta, \dot{\theta}) \mathbf{v}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{S}(\theta) \mathbf{v}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.120)$$

De la misma manera es posible sustituir las fuerzas y torque producidos en el robot mobil con la distribución de momento sobre las ruedas derecha e izquierda (τ_d, τ_i) , mediante una adaptación que se muestra en (3.121).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_x & f_y & \tau_\theta & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix}^T &= \mathbf{B}(\theta) \begin{bmatrix} \tau_d & \tau_i & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{f}(t) &= \mathbf{B}(\theta) \boldsymbol{\tau}(t) \quad (3.121)
\end{aligned}$$

Con,

$$\mathbf{B}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

A continuación, se sigue el mismo procedimiento de transformación del modelo dinámico utilizado en las formas independientes del robot móvil y el manipulador robótico, para obtener la expresión (3.120) en función de las velocidades deseadas y las velocidades reales. Iniciando con las ecuaciones de torque de (3.46) y (3.79).

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{D}\mathbf{v}(t) - \mathbf{E}\mathbf{v}(t) \quad (3.122)$$

Con, $\mathbf{v}(t) = [v_u \quad v_\omega \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]$ y

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_a \end{bmatrix}$$

donde, $\mathbf{v}(t)$ son los voltajes de alimentación para la velocidad lineal y las velocidades angulares, \mathbf{D} y \mathbf{E} son matrices constantes.

Así también, usando las ecuaciones (3.49) y (3.81) se pueden describir los voltajes de alimentación de los actuadores del robot manipulador móvil en base a un controlador PD.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{L}\mathbf{v}_{\text{ref}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{v}(t) - \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}}(t) \quad (3.123)$$

Con, $\mathbf{v}_{\text{ref}}(t) = [u_{\text{ref}} \quad \omega_{\text{ref}} \quad q_{1\text{ref}} \quad q_{1\text{ref}} \quad q_{3\text{ref}}]$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_a \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_a \end{bmatrix}$$

donde, $\mathbf{v}_{\text{ref}}(t)$ son las velocidades de referencia lineal y angulares; y, \mathbf{L} y \mathbf{J} son matrices constantes.

Agrupando (3.122) y (3.123) en (3.121),

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{B}(\theta) [\mathbf{D} [\mathbf{L}\mathbf{v}_{\text{ref}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{v}(t) - \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}}(t)] - \mathbf{E}\mathbf{v}(t)] \quad (3.124)$$

Igualando (3.124) y (3.120) se encuentra la expresión (3.125).

$$\mathbf{B}(\theta) [\mathbf{D} [\mathbf{L}\mathbf{v}_{\text{ref}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{v}(t) - \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}}(t)] - \mathbf{E}\mathbf{v}(t)] = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\theta)\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}(\theta, \dot{\theta})\mathbf{v}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{S}(\theta)\mathbf{v}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.125)$$

Se ordena (3.125) para obtener un modelo matemático compacto del robot manipulador móvil (3.126) en función de las velocidades de referencia, así como, las velocidades y aceleraciones reales.

$$\mathbf{v}_{\text{ref}}(t) = \mathbf{L}^{-1} \left[\mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}^{-1}(\theta) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{S}(\theta) + \mathbf{J} \right] \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{L}^{-1} \left[\mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}^{-1}(\theta) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}(\theta) + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}^{-1}(\theta) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{S}(\theta) + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E} + \mathbf{L} \right] \mathbf{v}(t) + \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{v}_{\text{ref}}(t) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{v}(t) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \quad (3.126)$$

donde,

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \bar{M}_{13} & \bar{M}_{14} & \bar{M}_{15} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & \bar{M}_{23} & \bar{M}_{24} & \bar{M}_{25} \\ \bar{M}_{31} & \bar{M}_{32} & \bar{M}_{33} & \bar{M}_{34} & \bar{M}_{35} \\ \bar{M}_{41} & \bar{M}_{42} & \bar{M}_{43} & \bar{M}_{44} & \bar{M}_{45} \\ \bar{M}_{51} & \bar{M}_{52} & \bar{M}_{53} & \bar{M}_{54} & \bar{M}_{55} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{14} & \bar{C}_{15} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{24} & \bar{C}_{25} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{34} & \bar{C}_{35} \\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{51} & \bar{C}_{52} & \bar{C}_{53} & \bar{C}_{54} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}$$

$$\bar{M}_{11} = \frac{K_{dt}}{K_{pt}} + \frac{R_{pa} r (m + m_2 + m_3)}{2K_{pa} K_{pt}} \quad \bar{M}_{12} = -\frac{R_{pa} r S_1}{2K_{pa} K_{pt}} (l_2 m_3 C_2 + l_2 m_2 C_2 + l_3 m_3 C_{23})$$

$$\bar{M}_{13} = -\frac{R_{pa} r S_1}{2K_{pa} K_{pt}} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \quad \bar{M}_{14} = -\frac{R_{pa} r C_1}{2K_{pa} K_{pt}} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23})$$

$$\bar{M}_{15} = -\frac{R_{pa} l_3 m_3 r S_{23} C_1}{2K_{pa} K_{pt}} \quad \bar{M}_{21} = -\frac{R_{pa} r S_1}{2K_{pa} K_{pr} R} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})$$

$$\bar{M}_{22} = \frac{K_{dr}}{K_{pr}} + \frac{r R_{pa}}{2R K_{pa} K_{pr}} \left(m + m_2 + m_3 + a^2 m + a^2 m_2 + a^2 m_3 + l_3^2 m_3 C_{23}^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 \right. \\ \left. + l_2^2 m_3 C_2^2 + 2a l_3 m_3 C_{23} C_1 + 2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2 + 2a l_2 m_2 C_1 C_2 + 2a l_2 m_3 C_1 C_2 \right) \\ + \frac{a r R_{pa} C_\theta}{2R K_{pa} K_{pr}} \begin{pmatrix} m_2 (C_\theta (a + l_2 C_1 C_2) - l_2 C_2 S_1 S_\theta) \\ -m_3 (S_\theta (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1)) \\ -C_\theta (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) + a m C_\theta \end{pmatrix} + \frac{a r R_{pa}}{2R K_{pa} K_{pr}} S_\theta \begin{pmatrix} m_2 (a S_\theta + l_2 S_{\theta 1} C_2) + a m S_\theta \\ + m_3 (a S_\theta + l_3 C_{23} S_{\theta 1} + l_2 S_{\theta 1} C_2) \end{pmatrix}$$

$$\bar{M}_{23} = \frac{r R_{pa}}{2R K_{pa} K_{pr}} \left(l_3^2 m_3 C_{23}^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 + l_2^2 m_3 C_2^2 + a l_3 m_3 C_{23} C_1 + 2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2 \right. \\ \left. + a l_2 m_2 C_1 C_2 + a l_2 m_3 C_1 C_2 \right)$$

$$\bar{M}_{24} = -\frac{a r R_{pa} S_1}{R K_{pa} K_{pr}} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \quad \bar{M}_{25} = \frac{-R_{pa} a l_3 m_3 r S_{23} S_1}{K_{pa} K_{pr} R}$$

$$\bar{M}_{31} = -\frac{R_a S_1}{K_a K_p} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23})$$

$$\bar{M}_{32} = \frac{R_a}{K_a K_p} (l_3^2 m_3 C_{23}^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 + l_2^2 m_3 C_2^2 + a l_3 m_3 C_{23} C_1 + 2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2 + a l_2 m_2 C_1 C_2 + a l_2 m_3 C_1 C_2)$$

$$+ \frac{R_a a S_\theta}{K_a K_p} (m_3 (l_3 C_{23} S_{1\theta} + l_2 S_{1\theta} C_2) + l_2 m_2 S_{1\theta} C_2) + \frac{R_a}{K_a K_p} \text{acos}(\theta) (m_3 (l_3 C_{23} C_{1\theta} + l_2 C_{1\theta} C_2) + l_2 m_2 C_{1\theta} C_2)$$

$$\bar{M}_{33} = \frac{K_d}{K_p} + \frac{R_a}{K_a K_p} (l_3^2 m_3 C_{23}^2 + l_2^2 m_2 C_2^2 + l_2^2 m_3 C_2^2 + 2l_2 l_3 m_3 C_{23} C_2) \quad \bar{M}_{34} = 0 \quad \bar{M}_{35} = 0$$

$$\bar{M}_{41} = -\frac{R_a C_1}{K_a K_p} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}) \quad \bar{M}_{42} = -2 \frac{R_a a S_1}{K_a K_p} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23})$$

$$\bar{M}_{43} = 0 \quad \bar{M}_{44} = \frac{K_d}{K_p} + \frac{R_a}{K_a K_p} (l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3 C_3) \quad \bar{M}_{45} = \frac{R_a l_3 m_3}{K_a K_p} (l_3 + l_2 C_3)$$

$$\bar{M}_{51} = -\frac{R_a}{K_a K_p} l_3 m_3 S_{23} C_1 \quad \bar{M}_{52} = -\frac{2R_a}{K_a K_p} \left(a l_3 m_3 S_{23} S_1 - a l_3 m_3 C_{1\theta} S_{23} S_\theta \right)$$

$$\bar{M}_{53} = 0 \quad \bar{M}_{54} = \frac{R_a}{K_a K_p} l_3 m_3 (l_3 + l_2 C_3) \quad \bar{M}_{55} = \frac{K_d}{K_p} + \frac{R_a l_3^2 m_3}{K_a K_p}$$

$$\bar{C}_{11} = \frac{K_{pb}}{K_{pt} r} + 1$$

$$\bar{C}_{12} = -\frac{r R_{pa}}{2K_{pa} K_{pt}} \left(\begin{array}{l} \left(2am + 2am_2 + 2am_3 + l_2 m_2 C_1 C_2 \right) \dot{\theta} + \left(l_3 m_3 C_{23} C_1 + l_2 m_2 C_1 C_2 \right) \dot{q}_1 \\ \left(+l_2 m_3 C_1 C_2 + l_3 m_3 C_1 C_{23} \right) \\ \left(-l_3 m_3 S_1 S_{23} + l_2 m_2 S_1 S_2 + l_2 m_3 S_1 S_2 \right) \dot{q}_2 - \left(l_3 m_3 C_1 S_{23} \right) \dot{q}_3 \end{array} \right)$$

$$\bar{C}_{15} = \frac{R_{pa} r}{2K_{pa} K_{pt}} (l_3 m_3 \dot{q}_1 S_{23} S_1 + l_3 m_3 \dot{\theta} S_{23} S_1 - l_3 m_3 \dot{q}_2 C_{23} C_1 - l_3 m_3 \dot{q}_3 C_{23} C_1)$$

$$\bar{C}_{13} = \frac{R_{pa} r}{2K_{pa} K_{pt}} \left(\dot{q}_2 (l_2 m_2 S_1 S_2 + l_2 m_3 S_1 S_2 + l_3 m_3 S_1 S_{23}) + \dot{q}_1 (-l_2 m_2 C_2 C_1 - l_2 m_3 C_2 C_1 - l_3 m_3 C_{23} C_1) \right)$$

$$\bar{C}_{14} = \frac{R_{pa} r}{2K_{pa} K_{pt}} \left(\dot{q}_1 (l_2 m_2 S_2 S_1 + l_2 m_3 S_2 S_1 + l_3 m_3 S_{23} S_1) + \dot{\theta} (l_2 m_2 S_2 S_1 + l_2 m_3 S_2 S_1 + l_3 m_3 S_{23} S_1) \right)$$

$$\bar{C}_{21} = \frac{r R_{pa} C_\theta \dot{\theta}}{2R K_{pa} K_{pr}} \left(\begin{array}{l} m_2 (C_\theta (a + l_2 C_1 C_2) - l_2 C_2 S_1 S_\theta) \\ -m_3 (S_\theta (l_3 C_{23} S_1 + l_2 C_2 S_1)) \\ -C_\theta (a + l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_1 C_2) + a m C_\theta \end{array} \right) + \frac{r R_{pa} S_\theta \dot{\theta}}{2R K_{pa} K_{pr}} \left(\begin{array}{l} m_2 (a S_\theta + l_2 S_{\theta 1} C_2) + m_3 (S_\theta) \\ +l_3 C_{23} S_{\theta 1} + l_2 S_{\theta 1} C_2 + a m S_\theta \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{22} &= \frac{K_{pb}R}{K_{pr}r} + \frac{rR_{pa}}{2RK_{pa}K_{pr}} \left(\dot{q}_2 \left(\begin{aligned} &l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + al_3 m_3 S_{23} C_1 + l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 \\ &+ l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 + al_2 m_2 C_1 S_2 + al_2 m_3 C_1 S_2 \end{aligned} \right) \right. \\
&\quad \left. + a\dot{q}_1 S_1 (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) + l_3 m_3 \dot{q}_3 S_{23} (l_3 C_{23} + aC_1 + l_2 C_2) \right) \\
&\quad + \frac{rR_{pa}}{2RK_{pa}K_{pr}} (al_2 m_2 C_2 S_1 + al_2 m_3 C_2 S_1 + la_3 m_3 C_{23} S_1) \dot{\theta} + 1 \\
\bar{C}_{23} &= -\frac{R_{pa}r}{2K_{pa}K_{pr}R} \left(\dot{q}_2 \left(\begin{aligned} &l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + al_3 m_3 S_{23} C_1 + l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 \\ &+ l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 + al_2 m_2 C_1 S_2 + al_2 m_3 C_1 S_2 \end{aligned} \right) \right. \\
&\quad \left. + a\dot{q}_1 S_1 (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) + a\dot{\theta} S_1 (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \right. \\
&\quad \left. + l_3 m_3 \dot{q}_3 S_{23} (l_3 C_{23} + aC_1 + l_2 C_2) \right) \\
\bar{C}_{24} &= -\frac{R_{pa}\dot{q}_1 r}{2K_{pa}K_{pr}R} \left(\begin{aligned} &l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + al_3 m_3 S_{23} C_1 \\ &+ l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 + l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 + al_2 m_2 C_1 S_2 - al_2 m_3 C_1 S_2 \end{aligned} \right) - \frac{R_{pa}a\dot{q}_3}{2K_{pa}K_{pr}R} C_{23} S_1 \\
&- \frac{R_{pa}r\dot{\theta}}{2K_{pa}K_{pr}R} \left(\begin{aligned} &l_2^2 m_2 C_2 S_2 + l_2^2 m_3 C_2 S_2 + l_3^2 m_3 C_{23} S_{23} + al_3 m_3 S_{23} C_1 \\ &+ l_2 l_3 m_3 C_{23} S_2 + l_2 l_3 m_3 S_{23} C_2 + al_2 m_2 C_1 S_2 - al_2 m_3 C_1 S_2 \end{aligned} \right) - \frac{R_{pa}a\dot{q}_2 r S_1}{2K_{pa}K_{pr}R} \left(\begin{aligned} &l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 \\ &+ l_3 m_3 C_{23} \end{aligned} \right) \\
\bar{C}_{25} &= -\frac{R_{pa}r}{2K_{pa}K_{pr}R} \left(\begin{aligned} &\dot{q}_1 l_3 m_3 S_{23} (l_3 C_{23} + aC_1 + l_2 C_2) + \dot{\theta} l_3 m_3 S_{23} (l_3 C_{23} + aC_1 + l_2 C_2) \\ &+ a\dot{q}_2 l_3 m_3 C_{23} S_1 + a\dot{q}_3 l_3 m_3 C_{23} S_1 \end{aligned} \right) \\
\bar{C}_{31} &= \frac{R_a \dot{\theta} C_1}{K_a K_p} (l_2 m_2 C_2 + l_2 m_3 C_2 + l_3 m_3 C_{23}) \\
\bar{C}_{32} &= \frac{R_a}{2K_a K_p} \left(\begin{aligned} &\left((-l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) - l_2^2 m_2 \sin(2q_2) - l_2^2 m_3 \sin(2q_2) - 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3)) \dot{q}_2 \right) \\ &+ \left(\begin{aligned} &2al_2 m_2 S_{12} + 2al_2 m_3 S_{12} - \frac{al_3 m_3}{2} \sin(q_2 - q_1 + q_3) + 2al_2 m_3 \sin(q_1 - q_2) \\ &+ \frac{3}{2} R_a al_3 m_3 \sin(q_1 - q_2 - q_3) + 2al_2 m_2 \sin(q_1 - q_2) + 2al_3 m_3 S_{123} \end{aligned} \right) \dot{\theta} \\ &+ \left(-l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) - l_2 l_3 m_3 S_3 - l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) \dot{q}_3 \end{aligned} \right) \\
\bar{C}_{33} &= \frac{K_b}{K_p} + 1 - \frac{R_a}{2K_a K_p} \left(\begin{aligned} &\left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) \dot{q}_2 \\ &+ 2l_3 m_3 S_{23} (l_3 C_{23} + l_2 C_2) \dot{q}_3 \end{aligned} \right) \\
\bar{C}_{34} &= \frac{R_a}{2K_a K_p} \left(\left(l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) \right) \\
\bar{C}_{35} &= -\frac{R_a}{K_a K_p} m_3 S_{23} (l_3 C_{23} + l_2 C_2) (\dot{q}_1 + \dot{\theta})
\end{aligned}$$

$$\bar{C}_{42} = \frac{R_a}{2K_a K_p} \left(\begin{array}{l} \left((l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3) \sin(2q_2) + (l_3^2 m_3 + 2l_2 l_3 m_3) \sin(2q_2 + q_3) + \frac{al_3 m_3}{2} \sin(q_2 - q_1 + q_3) \right) \\ - (2al_2 m_2 + 2al_2 m_3) \sin(q_1 - q_2) + 2al_3 m_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \\ + (2al_2 m_2 + 2al_2 m_3) \sin(q_1 + q_2) - \frac{3}{2} al_3 m_3 \sin(q_1 - q_2 - q_3) \\ + (l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3)) \dot{q}_1 \end{array} \right) \dot{\theta}$$

$$\bar{C}_{43} = \frac{R_a}{2K_a K_p} \left(\begin{array}{l} (l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3)) \dot{q}_1 \\ + (l_3^2 m_3 \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2^2 m_2 \sin(2q_2) + l_2^2 m_3 \sin(2q_2) + 2l_2 l_3 m_3 \sin(2q_2 + q_3)) \dot{\theta} \end{array} \right)$$

$$\bar{C}_{41} = -\frac{R_a \dot{\theta} S_1}{K_a K_p} (l_2 m_2 S_2 + l_2 m_3 S_2 + l_3 m_3 S_{23}), \quad \bar{C}_{44} = \frac{K_b}{K_p} - \frac{R_a l_2 l_3 m_3 \dot{q}_3 S_3}{K_a K_p} + 1$$

$$\bar{C}_{45} = -\frac{R_a l_2 l_3 m_3 S_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)}{K_a K_p}, \quad \bar{C}_{51} = -\frac{R_a l_3 m_3 S_{23} S_1 \dot{\theta}}{K_a K_p}$$

$$\bar{C}_{52} = \frac{R_a l_3 m_3 S_{23}}{K_a K_p} \left((2aC_1 + l_2 C_2 + l_3 C_{23}) \dot{\theta} + (C_1 + l_3 C_{23}) \dot{q}_1 \right)$$

$$\bar{C}_{53} = \frac{R_a l_3 m_3 S_{23}}{K_a K_p} (l_3 C_{23} + l_2 C_2) (\dot{q}_1 + \dot{\theta}), \quad \bar{C}_{54} = \frac{R_a l_2 l_3 m_3 \dot{q}_2 S_3}{K_a K_p}, \quad \bar{C}_{55} = \frac{K_b}{K_p} + 1$$

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{R_a g}{K_a K_p} (m_3 l_3 C_{23} + m_3 l_2 C_2) + l_2 m_2 C_2 \quad \frac{R_a g l_3 m_3 C_{23}}{K_a K_p} \right]^T$$

Reagrupando en constantes;

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= \frac{K_{dt}}{K_{pt}}, \quad \varsigma_2 = \frac{R_{pa} r (m + m_2 + m_3)}{2K_{pa} K_{pt}}, \quad \varsigma_3 = \frac{R_{pa} m_2 r}{2K_{pa} K_{pt}}, \quad \varsigma_4 = \frac{R_{pa} m_3 r}{2K_{pa} K_{pt}} \\ \varsigma_5 &= \frac{R_{pa} r m_2}{2K_{pa} K_{pr} R}, \quad \varsigma_6 = \frac{R_{pa} r m_3}{2K_{pa} K_{pr} R}, \quad \varsigma_7 = \frac{K_{dr}}{K_{pr}}, \quad \varsigma_8 = \frac{r R_{pa} (m + m_2 + m_3)}{2R K_{pa} K_{pr}}, \\ \varsigma_9 &= \frac{R_a m_2}{K_a K_p}, \quad \varsigma_{10} = \frac{R_a m_3}{K_a K_p}, \quad \varsigma_{11} = \frac{K_d}{K_p}, \quad \varsigma_{12} = \frac{K_{pb}}{K_{pr} r} + 1, \quad \varsigma_{13} = \frac{K_{pb} R}{K_{pr} r} + 1, \quad \varsigma_{14} = \frac{K_b}{K_p} + 1 \\ \varsigma_{15} &= \frac{R_a g m_2}{K_a K_p}, \quad \varsigma_{16} = \frac{R_a g m_3}{K_a K_p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= \varsigma_1 + \varsigma_2, \quad \bar{M}_{12} = -l_2 \varsigma_3 C_2 S_1 - \varsigma_4 (l_2 C_2 S_1 + l_3 C_{23} S_1), \quad \bar{M}_{15} = -\varsigma_4 l_3 S_{23} C_1 \\ \bar{M}_{13} &= -l_2 \varsigma_3 C_2 S_1 - \varsigma_4 (l_2 C_2 S_1 + l_3 C_{23} S_1), \quad \bar{M}_{14} = -l_2 \varsigma_3 S_2 C_1 - \varsigma_4 (l_2 S_2 C_1 + l_3 S_{23} C_1) \\ \bar{M}_{21} &= -l_2 \varsigma_3 C_2 S_1 - \varsigma_4 (l_2 C_2 S_1 + l_3 C_{23} S_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_{22} &= \zeta_7 + \zeta_8(1 + 2a^2) + \zeta_5 l_2 C_2 (l_2 C_2 + 2aC_1 + aC_{\theta_1} C_{\theta} + aS_{\theta_1} S_{\theta}) \\ &+ \zeta_6 (l_3^2 C_{23}^2 + l_2^2 C_2^2 + 2l_2 l_3 C_{23} C_2 + 2al_3 C_{23} C_1 + 2al_2 C_1 C_2 + al_3 C_{23} C_1 + al_2 C_2 C_1)\end{aligned}$$

$$\bar{M}_{23} = \zeta_5 (l_2^2 C_2^2 + al_2 C_1 C_2) + \zeta_6 (l_3^2 C_{23}^2 + l_2^2 C_2^2 + al_2 C_1 C_2 + al_3 C_{23} C_1 + 2l_2 l_3 C_{23} C_2)$$

$$\bar{M}_{24} = -\zeta_5 al_2 S_2 S_1 + \zeta_6 (-al_2 S_2 S_1 - al_3 S_{23} S_1) \quad \bar{M}_{25} = -\zeta_6 al_3 S_{23} S_1$$

$$\bar{M}_{31} = -\zeta_9 l_2 C_2 S_1 + \zeta_{10} (-l_2 C_2 S_1 - l_3 C_{23} S_1)$$

$$\bar{M}_{32} = \zeta_9 (l_2^2 C_2^2 + 2al_2 C_1 C_2) + \zeta_{10} (l_3^2 C_{23}^2 + l_2^2 C_2^2 + 2al_2 C_1 C_2 + 2al_3 C_{23} C_1 + 2l_2 l_3 C_{23} C_2)$$

$$\bar{M}_{33} = \zeta_{11} + \zeta_9 l_2^2 C_2^2 + \zeta_{10} (l_2^2 C_2^2 + l_3^2 C_{23}^2 + 2l_2 l_3 C_{23} C_2) \quad \bar{M}_{34} = 0 \quad \bar{M}_{35} = 0$$

$$\bar{M}_{41} = -\zeta_9 l_2 S_2 C_1 + \zeta_{10} (-l_2 S_2 C_1 - l_3 S_{23} C_1) \quad \bar{M}_{42} = -\zeta_9 2al_2 S_2 S_1 + \zeta_{10} (-2al_2 S_2 S_1 - 2al_3 S_{23} S_1)$$

$$\bar{M}_{43} = 0 \quad \bar{M}_{44} = \zeta_{11} + \zeta_9 l_2^2 + \zeta_{10} (l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 C_3) \quad \bar{M}_{45} = \zeta_{10} l_3 (l_3 + l_2 C_3)$$

$$\bar{M}_{51} = -\zeta_{10} l_3 S_{23} C_1 \quad \bar{M}_{52} = -\zeta_{10} 2al_3 S_{23} S_1$$

$$\bar{M}_{53} = 0 \quad \bar{M}_{54} = \zeta_{10} l_3 (l_3 + l_2 C_3) \quad \bar{M}_{55} = \zeta_{11} + \zeta_{10} l_3^2$$

$$\bar{C}_{11} = \zeta_{12}$$

$$\bar{C}_{12} = \left(-2a\zeta_2 \dot{\theta} + \zeta_3 (l_2 S_1 S_2 \dot{q}_2 - l_2 C_1 C_2 \dot{\theta} - l_2 C_1 C_2 \dot{q}_1) + \zeta_4 \begin{pmatrix} l_3 S_1 S_{23} \dot{q}_3 + (l_3 S_1 S_{23} + l_2 S_1 S_2) \dot{q}_2 \\ -(l_2 C_1 C_2 + l_3 C_{23} C_1) \dot{q}_1 - (l_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_{23}) \dot{\theta} \end{pmatrix} \right)$$

$$\bar{C}_{13} = \left(\zeta_3 (l_2 S_1 S_2 \dot{q}_2 + l_2 C_2 C_1 \dot{q}_1 - l_2 C_2 C_1 \dot{\theta}) + \zeta_4 \begin{pmatrix} (l_2 S_1 S_2 + l_3 S_1 S_{23}) \dot{q}_2 - (l_2 C_2 C_1 + l_3 C_{23} C_1) \dot{\theta} \\ -(l_3 C_{23} C_1 + l_2 C_2 C_1) \dot{q}_1 + l_3 S_{23} S_1 \dot{q}_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bar{C}_{14} = \left(\zeta_3 (l_2 S_2 S_1 \dot{\theta} + l_2 S_2 S_1 \dot{q}_1 - l_2 C_2 C_1 \dot{q}_2) + \zeta_4 \begin{pmatrix} (l_2 S_2 S_1 + l_3 S_{23} S_1) \dot{\theta} - (l_2 C_2 C_1 + l_3 C_{23} C_1) \dot{q}_2 \\ + (l_3 S_{23} S_1 + l_2 S_2 S_1) \dot{q}_1 - l_3 C_{23} C_1 \dot{q}_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bar{C}_{15} = \zeta_4 (l_3 S_{23} S_1 \dot{q}_1 + l_3 S_{23} S_1 \dot{\theta} - l_3 C_{23} C_1 \dot{q}_2 - l_3 C_{23} C_1 \dot{q}_3)$$

$$\bar{C}_{21} = \zeta_8 \dot{\theta} + \left(\zeta_5 (l_2 C_1 C_{\theta} \cos(2q_1 + q_2) + 2l_2 S_{\theta_1} C_2 S_{\theta}) + \zeta_6 (l_2 C_2 C_{\theta} \cos(q_1 - q_2) + l_3 C_{23} C_{\theta} \cos(q_1 - q_2) + l_3 C_{23} S_{\theta_1} S_{\theta}) \right) \dot{\theta}$$

$$\bar{C}_{22} = \zeta_{12} + \zeta_5 \begin{pmatrix} al_2 C_2 S_1 (\dot{\theta} + \dot{q}_1) \\ + (l_2^2 C_2 S_2 + al_2 C_1 S_2) \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \zeta_6 \begin{pmatrix} (al_2 C_2 S_1 + al_3 C_{23} S_1) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) + \begin{pmatrix} al_2 C_1 S_2 + l_2^2 C_2 S_2 \\ + l_2 l_3 C_{23} S_2 \end{pmatrix} \dot{q}_2 \\ + (l_2 l_3 S_{23} C_2 + l_3^2 C_{23} S_{23} + al_3 S_{23} C_1) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_{23} = -\zeta_5 \begin{pmatrix} al_2 C_2 S_1 (\dot{\theta} + \dot{q}_1) \\ + (l_2^2 C_2 S_2 + al_2 C_1 S_2) \dot{q}_2 \end{pmatrix} - \zeta_6 \begin{pmatrix} (al_2 C_2 S_1 + al_3 C_{23} S_1) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) \dots \\ + (al_2 C_1 S_2 + l_2^2 C_2 S_2 + l_2 l_3 C_{23} S_2) \dot{q}_2 \\ + (l_2 l_3 S_{23} C_2 + l_3^2 C_{23} S_{23} + al_3 S_{23} C_1) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{24} &= \varsigma_5 \left(-(l_2^2 C_2 S_2 + a l_2 C_1 S_2) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) - l_2 a S_1 C_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right) \\
&+ \varsigma_6 \left(-(l_2^2 C_2 S_2 + l_3^2 C_{23} S_{23} + a l_3 S_{23} C_1 + l_2 l_3 C_{23} S_2 + l_2 l_3 S_{23} C_2 + a l_2 C_1 S_2) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) \dots \right) \\
&\quad \left(-(a l_2 S_1 C_2 + l_3 a S_1 C_{23}) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right) \\
\bar{C}_{25} &= \varsigma_6 \left(-(l_3 l_3 S_{23} C_{23} + a l_3 S_{23} C_1 + l_2 l_3 S_{23} C_2) (\dot{q}_1 + \dot{\theta}) - a l_3 C_{23} S_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right) \\
\bar{C}_{31} &= \varsigma_9 l_2 C_2 C_1 \dot{\theta} + \varsigma_{10} (l_2 C_2 C_1 + l_3 C_{23} C_1) \dot{\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{32} &= -\varsigma_9 \frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) \dot{q}_2 + \varsigma_9 (a l_2 S_{12} + a l_2 \sin(q_1 - q_2)) \dot{\theta} \\
&+ \varsigma_{10} \left(\left(a l_2 S_{12} + a l_2 \sin(q_1 - q_2) - \frac{a l_3}{4} \sin(q_2 - q_1 + q_3) + \frac{3a l_3}{4} \sin(q_1 - q_2 - q_3) + a l_3 S_{123} \right) \dot{\theta} + \right. \\
&\quad \left(-\frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) - \frac{l_3^2}{2} \sin(2q_2 + 2q_3) - l_2 l_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) \dot{q}_2 \\
&\quad \left. + \left(-\frac{l_3^2}{2} \sin(2q_2 + 2q_3) - \frac{l_2 l_3}{2} S_3 - \frac{l_2 l_3}{2} \sin(2q_2 + q_3) \right) \dot{q}_3 \right) \\
\bar{C}_{33} &= \varsigma_{14} - \varsigma_9 \frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) \dot{q}_2 - \varsigma_{10} \left(\left(\frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) + \frac{l_3^2}{2} \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2 l_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) \dot{q}_2 \right. \\
&\quad \left. + (l_2 l_3 S_{23} C_2 + l_3^2 S_{23} C_{23}) \dot{q}_3 \right) \\
\bar{C}_{34} &= \varsigma_9 \frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) + \varsigma_{10} \left(\frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) + \frac{l_3^2}{2} \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2 l_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) \\
\bar{C}_{35} &= -\varsigma_{10} (l_3 S_{23} C_{23} + l_2 S_{23} C_2) (\dot{q}_1 + \dot{\theta})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{42} &= \varsigma_9 \left(\frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) + (-a l_2 \sin(q_1 - q_2) + a l_2 \sin(q_1 + q_2)) \dot{\theta} \right) \\
&+ \varsigma_{10} \left(\left(\frac{a l_3}{4} \sin(q_2 - q_1 + q_3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a l_2 \sin(q_1 - q_2) + a l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \right) \dot{\theta} \right. \\
&\quad \left. + \left(a l_2 \sin(q_1 + q_2) - \frac{3}{4} a l_3 \sin(q_1 - q_2 - q_3) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{l_3^2}{2} \sin(2q_2 + 2q_3) + \frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) + l_2 l_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) \right)
\end{aligned}$$

$$\bar{C}_{43} = \varsigma_9 \frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) (\dot{\theta} + \dot{q}_1) + \varsigma_{10} \left(\frac{l_2^2}{2} \sin(2q_2) + \frac{l_3^2}{2} \sin(2q_2 + 2q_3) + l_2 l_3 \sin(2q_2 + q_3) \right) (\dot{\theta} + \dot{q}_1)$$

$$\bar{C}_{41} = -\varsigma_9 l_2 S_1 S_2 \dot{\theta} - \varsigma_{10} (l_2 S_1 S_2 + l_3 S_1 S_{23}) \dot{\theta}, \quad \bar{C}_{44} = \varsigma_{14} - \varsigma_{10} l_2 l_3 S_3 \dot{q}_3, \quad \bar{C}_{45} = -\varsigma_{10} l_2 l_3 \sin(q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\bar{C}_{51} = -\varsigma_{10} l_3 S_{23} S_1 \dot{\theta}, \quad \bar{C}_{52} = \varsigma_{10} l_3 S_{23} \left((2aC_1 + l_2 C_2 + l_3 C_{23}) \dot{\theta} + (aC_1 + l_3 C_{23}) \dot{q}_1 \right)$$

$$\bar{C}_{53} = \varsigma_{10} l_3 S_{23} (l_3 C_{23} + l_2 C_2) (\dot{q}_1 + \dot{\theta}), \quad \bar{C}_{54} = \varsigma_{10} l_2 l_3 S_3 \dot{q}_2, \quad \bar{C}_{55} = \varsigma_{14}$$

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \varsigma_{15} l_2 C_2 + \varsigma_{16} (l_3 C_{23} + l_2 C_2) \quad \varsigma_{16} l_3 C_{23} \right]^T$$

CAPÍTULO IV

4 TELE-OPERACIÓN BILATERAL

4.1 Esquema de Tele-operación Bilateral

El esquema de tele-operación bilateral propuesto en la Figura 1-4 se compone del sitio remoto, sitio local y el canal de comunicación.

El sitio remoto está formado por el robot manipulador móvil que puede ser controlado de forma independientemente como una plataforma móvil o un manipulador ubicado en un posición fija, o también puede ser controlado todo el robot como un solo conjunto, según seleccione el operador humano desde el sitio local; posee un sistema de control en cascada, partiendo del control cinemático que determina los movimientos a realizar para ejecutar la tarea y un control dinámico compensa los errores de velocidad producidos en el robot; además, los obstáculos que se presenten frente al robot son escaneados por un sensor laser y se calculan fuerzas ficticias que influyen en el control de redundancia evitando colisiones con los obstáculos detectados.

El sitio local consta de una interfaz gráfica que muestra el video en tiempo real del ambiente en sitio remoto y los estado del robot manipulador móvil; por otra parte, un dispositivo háptico (Falcon Novint) permite al operador humano interactuar con el robot mediante órdenes directas de movimiento y retroalimentación de fuerzas que indican el riesgo de colisión del robot con algún obstáculo.

El canal de comunicación se realiza mediante una red local inalámbrica, los datos numéricos de los estados del robot y datos de control se envían usando el protocolo de comunicación TCP/IP para garantiza el envío y recepción de información con retardos despreciables; y el video se trasmite mediante el protocolo UDP que permite transmitir gran cantidad de datos con baja latencia.

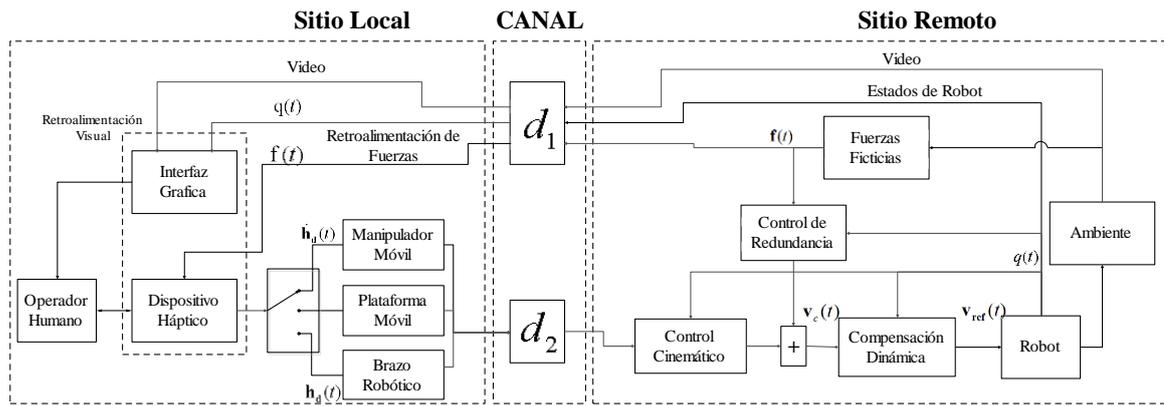


Figura 1-4. Esquema de Tele-operación

Realizado por: José Luis Varela Aldás

A continuación, se describen los elementos que conforman el esquema de tele-operación bilateral propuesto.

4.2 Control del Robot Móvil

El control a desarrollar en la plataforma móvil, propone el seguimiento de trayectoria mediante dos etapas de control: 1. Un control cinemático cuyo objetivo es que el punto de interés del robot móvil realice el seguimiento de una trayectoria especificada en posiciones y velocidades lineales, mediante las entradas de velocidad lineal y angular, y 2. Un compensador dinámico para reducir los errores de velocidad del robot móvil, mediante una modificación en las velocidades calculadas en el control cinemático, generando las velocidades de referencia a ser ingresadas al sistema.

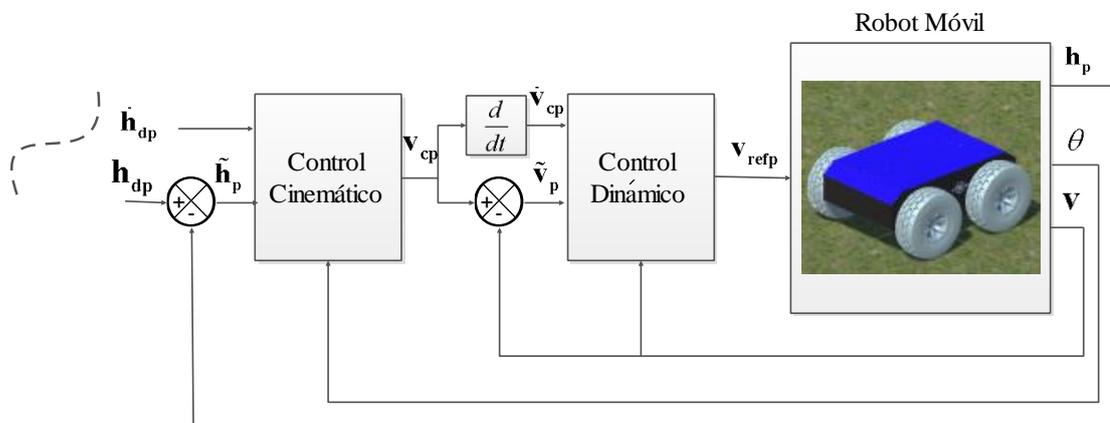


Figura 2-4. Esquema de control para el robot móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

4.2.1 Control Cinemático

El objetivo del control cinemático en el robot móvil es el seguimiento de trayectorias, esta implica que el robot alcance la trayectoria y la siga logrando un error con respecto las posiciones y velocidades deseadas que son variantes en el tiempo.

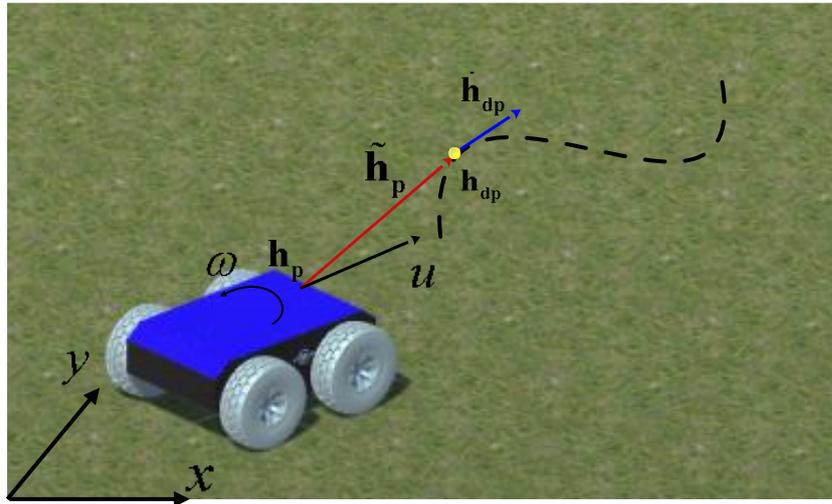


Figura 3-4. Parámetros del seguimiento de trayectoria del robot móvil

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Partiendo del modelo cinemático del robot móvil (3.6) se aplica el método de la cinemática diferencial inversa (4.1), donde $\mathbf{v}_{cp}(t) = [u \ \omega]$ son las velocidades de control, $\mathbf{h}_{dp}(t) = [x_{dp} \ y_{dp}]$ son las posiciones deseadas y $\dot{\mathbf{h}}_{dp}(t) = [\dot{x}_{dp} \ \dot{y}_{dp}]$ son las velocidades lineales deseadas para el robot móvil, estas velocidades deseadas pueden ser las generadas para el seguimiento de la trayectoria o según los movimientos deseados por el operador.

$$\mathbf{v}_{cp}(t) = \mathbf{S}_p^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\mathbf{h}}_{dp}(t) \quad (4.1)$$

De la misma manera el control debe considerar los errores de posición del robot dados cuando el robot se encuentra fuera del camino a seguir. Para ello se utiliza (4.2), donde la función $\tanh(\cdot)$ satura los errores de posición producidos, $\mathbf{h}_p(t) = [\tilde{x}_{dp} \ \tilde{y}_{dp}]$ son los errores de posición se obtienen mediante $\mathbf{h}_p(t) = \mathbf{h}_{dp}(t) - \mathbf{h}_p(t)$, \mathbf{K}_{p1} es la matriz diagonal constante que permite corregir error pequeños de posición y \mathbf{K}_{p2} es la matriz diagonal constante que limita las velocidades del robot a las máximas permitidas.

$$\mathbf{v}_{cp}(t) = \mathbf{S}_p^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\dot{\mathbf{h}}_{dp}(t) + \mathbf{K}_{p2} \tanh(\mathbf{K}_{p2}^{-1} \mathbf{K}_{p1} \mathbf{h}_p(t)) \right) \quad (4.2)$$

Para demostrar estabilidad de la ley de control propuesta se asume que las velocidades del robot son iguales a las velocidades de control obtenidas $\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{v}_{cp}(t)$, por lo cual se puede reemplazar en (4.2) el modelo cinemático del robot móvil.

$$\mathbf{S}_p^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\mathbf{h}}_p(t) = \mathbf{S}_p^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\dot{\mathbf{h}}_{dp}(t) + \mathbf{K}_{p2} \tanh(\mathbf{K}_{p2}^{-1} \mathbf{K}_{p1} \mathbf{h}_p(t)) \right)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_{dp}(t) - \dot{\mathbf{h}}_p(t) + \mathbf{K}_{p2} \tanh(\mathbf{K}_{p2}^{-1} \mathbf{K}_{p1} \mathbf{h}_p(t)) = 0$$

Reduciendo y ordenando se tiene (4.3) y recordando que los errores de velocidad se definen como $\tilde{\mathbf{h}}_p(t) = \dot{\mathbf{h}}_{dp}(t) - \dot{\mathbf{h}}_p(t)$.

$$\tilde{\mathbf{h}}_p(t) = -\mathbf{K}_{p2} \tanh(\mathbf{K}_{p2}^{-1} \mathbf{K}_{p1} \mathbf{h}_p(t)) \quad (4.3)$$

Para garantizar la estabilidad del algoritmo propuesto se aplica el método de Lyapunov, usando como candidata el modelo de los errores cuadráticos.

$$\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{h}}_p) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}_p^T(t) \tilde{\mathbf{h}}_p(t) \quad (4.4)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov (4.4), se tiene $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{h}}_p) = \tilde{\mathbf{h}}_p^T(t) \dot{\tilde{\mathbf{h}}}_p(t)$ y reemplazando (4.3),

$$\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{h}}_p) = -\tilde{\mathbf{h}}_p^T(t) \mathbf{K}_{p2} \tanh(\mathbf{K}_{p2}^{-1} \mathbf{K}_{p1} \mathbf{h}_p(t))$$

Según el criterio de Lyapunov, $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{h}}_p)$ deber ser una función definida negativa para garantizar la estabilidad del sistema, para lo cual debe cumplirse las condiciones:

$\mathbf{K}_{p1} > 0$ y $\mathbf{K}_{p2} > 0$, asegurando que $\tilde{\mathbf{h}}_p \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

4.2.2 Control Dinámico

Los efectos de la dinámica del robot móvil generan un error de velocidad $\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_{cp} - \mathbf{v}_p$, que es la diferencia entre las velocidades del control cinemático y las velocidades reales, para reducir este efecto se propone un compensador a partir del modelo dinámico.

La ley de control propuesta es:

$$\mathbf{v}_{refp}(t) = \bar{\mathbf{M}}_p \boldsymbol{\sigma}_p + \bar{\mathbf{C}}_p(\mathbf{v}_p) \mathbf{v}_p(t) \quad (4.5)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_p = \dot{\mathbf{v}}_{cp}(t) + \mathbf{K}_{p4} \tanh(\mathbf{K}_{p4}^{-1} \mathbf{K}_{p3} \tilde{\mathbf{v}}_p(t))$, con $\tilde{\mathbf{v}}_p(t)$ son los errores de velocidad, $\dot{\mathbf{v}}_{cp}(t)$ son las aceleración de control, \mathbf{K}_{p3} es la matriz diagonal constante que permite corregir error pequeños de velocidad y \mathbf{K}_{p4} es la matriz diagonal constante que limita las velocidades del robot móvil. Así, las aceleraciones producidas reducirán los errores de velocidad generados por la dinámica del sistema.

Para garantizar la estabilidad del compensador dinámico propuesto se resuelve la siguiente igualdad:

$$\bar{\mathbf{M}}_p \dot{\mathbf{v}}_p(t) + \bar{\mathbf{C}}_p(\mathbf{v}_p) \mathbf{v}_p(t) = \bar{\mathbf{M}}_p \boldsymbol{\sigma}_p + \bar{\mathbf{C}}_p(\mathbf{v}_p) \mathbf{v}_p(t)$$

Aquí se observa que las aceleraciones del robot móvil se producen según:

$$\dot{\mathbf{v}}_p(t) = \boldsymbol{\sigma}_p = \dot{\mathbf{v}}_{cp}(t) + \mathbf{K}_{p4} \tanh(\mathbf{K}_{p4}^{-1} \mathbf{K}_{p3} \tilde{\mathbf{v}}_p(t))$$

Lo que nos indica que los errores de aceleración $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_p(t) = \dot{\mathbf{v}}_{cp}(t) - \dot{\mathbf{v}}_p(t)$ se obtienen de:

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_p(t) = -\mathbf{K}_{p4} \tanh(\mathbf{K}_{p4}^{-1} \mathbf{K}_{p3} \tilde{\mathbf{v}}_p(t)) \quad (4.6)$$

Partiendo de los errores cuadráticos de la velocidad como la candidata de Lyapunov $\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{v}}_p) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_p^T(t) \tilde{\mathbf{v}}_p(t)$, aplicando su derivada $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{v}}_p) = \tilde{\mathbf{v}}_p^T(t) \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_p(t)$ y reemplazando (4.6),

$$\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{v}}_p) = -\tilde{\mathbf{v}}_p^T(t) \mathbf{K}_{p4} \tanh(\mathbf{K}_{p4}^{-1} \mathbf{K}_{p3} \tilde{\mathbf{v}}_p(t))$$

Según el criterio de Lyapunov, $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{v}}_p)$ deber ser una función definida negativa para garantizar la estabilidad del sistema, para lo cual debe cumplirse las condiciones:

$\mathbf{K}_{p3} > 0$ y $\mathbf{K}_{p4} > 0$, asegurando que $\tilde{\mathbf{v}}_p \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

4.3 Control del Robot Manipulador

El control a desarrollar para el manipulador, propone el posicionamiento del extremo operativo mediante dos etapas de control: 1. Un control cinemático cuyo objetivo es que el extremo del manipulador alcance una posición deseada, con las entradas de velocidad angular en las articulaciones, y 2. Un compensador dinámico para reducir los errores de velocidad en el manipulador, mediante una modificación en las velocidades calculadas en el control cinemático, generando las velocidades de referencia a ser ingresadas al sistema.

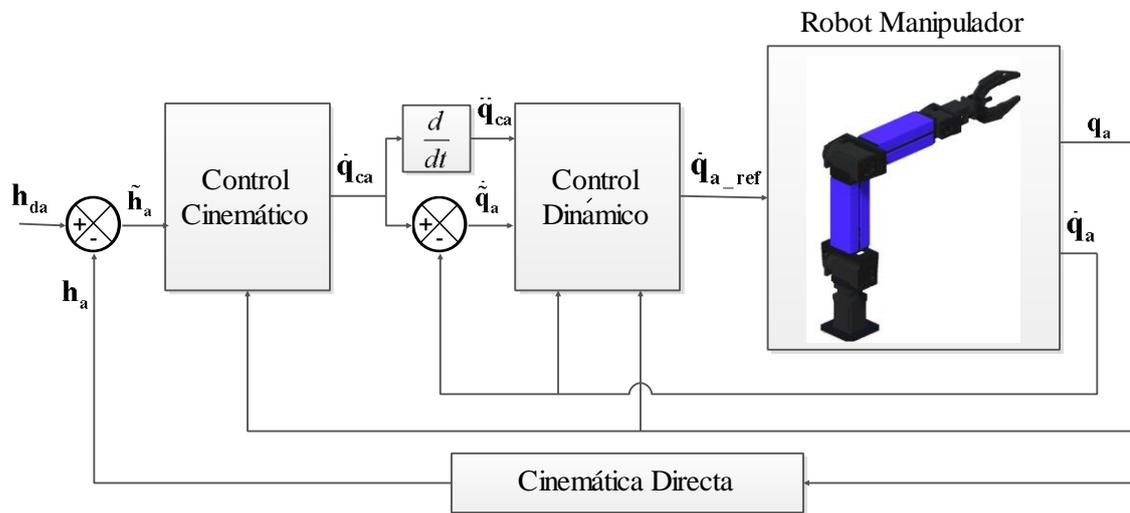


Figura 4-1. Esquema de control para el manipulador

Realizado por: José Luis Varela Aldás

4.3.1 Control Cinemático

El objetivo del control cinemático en el robot manipulador es el posicionamiento sobre un punto que el robot debe alcanzar logrando un error cero con respecto a la posición deseada.

Partiendo del modelo cinemático del robot manipulador (3.9) se aplica el método de la cinemática diferencial inversa (4.7), donde $\dot{\mathbf{q}}_{ca}(t) = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]$ son las velocidades angulares de control y $\mathbf{h}_{da} = [x_{da} \quad y_{da} \quad z_{da}]$ son las posiciones deseadas y $\mathbf{h}_a(t) = [\tilde{x}_{da} \quad \tilde{y}_{da} \quad \tilde{z}_{da}]$ son los errores de posición que se obtienen mediante

$\mathbf{h}_a(t) = \mathbf{h}_{da} - \mathbf{h}_a(t)$, la función $f(\tilde{\mathbf{h}}_a(t))$ permitirá al manipulador acercarse al objetivo y detenerse según el error calculado.

$$\dot{\mathbf{q}}_{ca}(t) = \mathbf{S}_a^{-1}(\mathbf{q}_a) f(\tilde{\mathbf{h}}_a(t)) \quad (4.7)$$

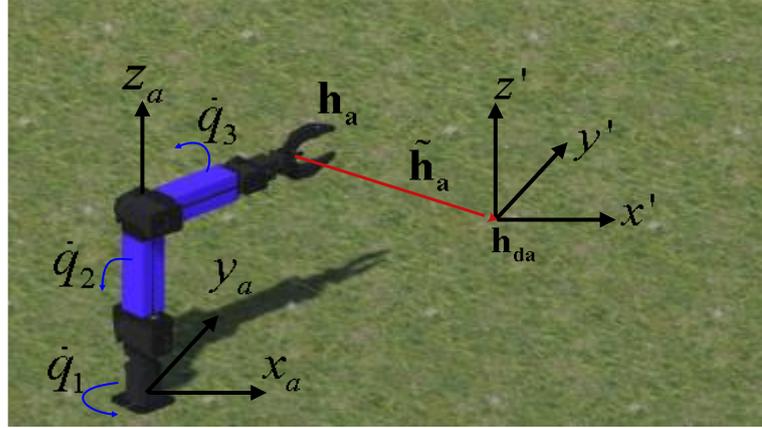


Figura 5-4. Parámetros del control de posición del robot manipulador

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Se propone $f(\tilde{\mathbf{h}}_a(t)) = \mathbf{K}_{a2} \tanh(\mathbf{K}_{a2}^{-1} \mathbf{K}_{a1} \mathbf{h}_a(t))$, obteniendo (4.8), donde la función $\tanh(\cdot)$ satura los errores de posición producidos, \mathbf{K}_{a1} es la matriz diagonal constante que permite corregir error pequeños de posición y \mathbf{K}_{a2} es la matriz diagonal constante que limita las velocidades del robot a las máximas permitidas.

$$\dot{\mathbf{q}}_{ca}(t) = \mathbf{S}_a^{-1}(\mathbf{q}_a) \left(\mathbf{K}_{a2} \tanh(\mathbf{K}_{a2}^{-1} \mathbf{K}_{a1} \mathbf{h}_a(t)) \right) \quad (4.8)$$

Para demostrar estabilidad de la ley de control propuesta se asume que las velocidades del manipulador son exactamente iguales a las velocidades de control obtenidas $\dot{\mathbf{q}}_a(t) = \dot{\mathbf{q}}_{ca}(t)$, por lo cual se puede reemplazar en (4.8) el modelo cinemático del robot manipulador.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_a^{-1}(\mathbf{q}_a) \dot{\mathbf{h}}_a(t) &= \mathbf{S}_a^{-1}(\mathbf{q}_a) \left(\mathbf{K}_{a2} \tanh(\mathbf{K}_{a2}^{-1} \mathbf{K}_{a1} \mathbf{h}_a(t)) \right) \\ \dot{\mathbf{h}}_a(t) &= \mathbf{K}_{a2} \tanh(\mathbf{K}_{a2}^{-1} \mathbf{K}_{a1} \mathbf{h}_a(t)) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora, derivando los errores de posición $\mathbf{h}_a(t) = \mathbf{h}_{da} - \mathbf{h}_a(t)$ se tiene $\dot{\tilde{\mathbf{h}}}_a(t) = \mathbf{0} - \dot{\mathbf{h}}_a(t)$, y reemplazando (4.9)

$$\dot{\tilde{\mathbf{h}}}_a(t) = -\mathbf{K}_{a2} \tanh(\mathbf{K}_{a2}^{-1} \mathbf{K}_{a1} \tilde{\mathbf{h}}_a(t)) \quad (4.10)$$

Para garantizar la estabilidad del algoritmo propuesto se aplica el método de Lyapunov, usando como candidata el modelo de los errores cuadráticos.

$$\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{h}}_a) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}_a^T(t) \tilde{\mathbf{h}}_a(t) \quad (4.11)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov (4.11), se tiene $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{h}}_a) = \tilde{\mathbf{h}}_a^T(t) \dot{\tilde{\mathbf{h}}}_a(t)$ y reemplazando (4.10),

$$\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{h}}_a) = -\tilde{\mathbf{h}}_a^T(t) \mathbf{K}_{a2} \tanh(\mathbf{K}_{a2}^{-1} \mathbf{K}_{a1} \tilde{\mathbf{h}}_a(t))$$

Según el criterio de Lyapunov, $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{h}}_a)$ deber ser una función definida negativa para garantizar la estabilidad del sistema, para lo cual debe cumplirse las condiciones:

$$\mathbf{K}_{a1} > 0 \text{ y } \mathbf{K}_{a2} > 0, \text{ asegurando que } \tilde{\mathbf{h}}_a \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow \infty.$$

4.3.2 Control Dinámico

Los efectos de la dinámica del robot manipulador generan un error de velocidad $\tilde{\dot{\mathbf{q}}}_a(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{q}}_{ca}(\mathbf{t}) - \dot{\mathbf{q}}_a(\mathbf{t})$, que es la diferencia entre las velocidades del control cinemático y las velocidades reales del manipulador, para reducir este efecto se propone un compensador a partir del modelo dinámico.

La ley de control propuesta es:

$$\dot{\mathbf{q}}_{a_ref}(t) = \bar{\mathbf{M}}_a(\mathbf{q}_a) \boldsymbol{\sigma}_a + \bar{\mathbf{C}}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a) \dot{\mathbf{q}}_a(t) + \bar{\mathbf{g}}_a(\mathbf{q}_a) \quad (4.12)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_a = \ddot{\mathbf{q}}_{ca}(t) + \mathbf{K}_{a4} \tanh(\mathbf{K}_{a4}^{-1} \mathbf{K}_{a3} \tilde{\dot{\mathbf{q}}}_a(t))$, con $\tilde{\dot{\mathbf{q}}}_a(t)$ son los errores de velocidad angular, $\ddot{\mathbf{q}}_{ca}(t)$ son las aceleración de control, \mathbf{K}_{a3} es la matriz diagonal constante que permite corregir error pequeños de velocidad y \mathbf{K}_{a4} es la matriz diagonal constante que limita las

velocidades del manipulador. Así, las aceleraciones producidas reducirán los errores de velocidad generados por la dinámica del sistema.

Para garantizar la estabilidad del compensador dinámico propuesto se resuelve la siguiente igualdad:

$$\bar{M}_a(\mathbf{q}_a)\ddot{\mathbf{q}}_a(t) + \bar{C}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a)\dot{\mathbf{q}}_a(t) + \bar{\mathbf{g}}_a(\mathbf{q}_a) = \bar{M}_a(\mathbf{q}_a)\boldsymbol{\sigma}_a + \bar{C}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a)\dot{\mathbf{q}}_a(t) + \bar{\mathbf{g}}_a(\mathbf{q}_a)$$

Aquí se observa que las aceleraciones del robot móvil se producen según:

$$\ddot{\mathbf{q}}_a(t) = \boldsymbol{\sigma}_a = \ddot{\mathbf{q}}_{ca}(t) + \mathbf{K}_{a4} \tanh(\mathbf{K}_{a4}^{-1} \mathbf{K}_{a3} \tilde{\mathbf{q}}_a(t))$$

Lo que nos indica que los errores de aceleración $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_a(t) = \ddot{\mathbf{q}}_{ca}(t) - \ddot{\mathbf{q}}_a(t)$ se obtienen de:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_a(t) = -\mathbf{K}_{a4} \tanh(\mathbf{K}_{a4}^{-1} \mathbf{K}_{a3} \tilde{\mathbf{q}}_a(t)) \quad (4.13)$$

Partiendo de los errores cuadráticos de la velocidad como la candidata de Lyapunov $\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{q}}_a) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_a^T(t) \tilde{\mathbf{q}}_a(t)$, aplicando su derivada $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{q}}_a) = \tilde{\mathbf{q}}_a^T(t) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_a(t)$ y reemplazando (4.13),

$$\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{q}}_a) = -\tilde{\mathbf{q}}_a^T(t) \mathbf{K}_{a4} \tanh(\mathbf{K}_{a4}^{-1} \mathbf{K}_{a3} \tilde{\mathbf{q}}_a(t))$$

Según el criterio de Lyapunov, $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{q}}_a)$ deber ser una función definida negativa para garantizar la estabilidad del sistema, para lo cual debe cumplirse las condiciones:

$\mathbf{K}_{a3} > 0$ y $\mathbf{K}_{a4} > 0$, asegurando que $\tilde{\mathbf{q}}_a \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

4.4 Control del Robot Manipulador Móvil

Para el manipulador móvil se propone el seguimiento de trayectoria mediante dos etapas de control: 1. Un control cinemático cuyo objetivo es que el extremo operativo del robot manipulador móvil realice el seguimiento de una trayectoria especificada en posiciones y

velocidades lineales, mediante las entradas de velocidad lineal y angular de la plataforma móvil, y las velocidades angulares de las articulaciones del manipulador, y 2. Un compensador dinámico para reducir los errores de velocidad del manipulador móvil, mediante una modificación en las velocidades calculadas en el control cinemático, generando las velocidades de referencia a ser ingresadas al sistema.

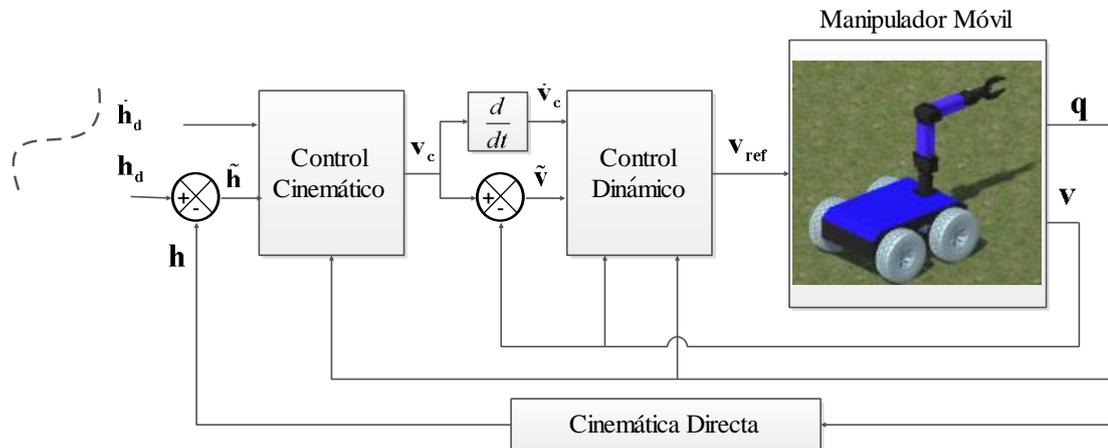


Figura 6-4. Esquema de control para manipulador móvil

Realizado por: José Luis Varela Aldás

4.4.1 Control Cinemático

El objetivo del control cinemático en el robot manipulador móvil es el seguimiento de trayectoria, que el robot lo alcance y lo siga manteniendo un error cero con respecto a los estados (posiciones y velocidades) deseados variantes en el tiempo.

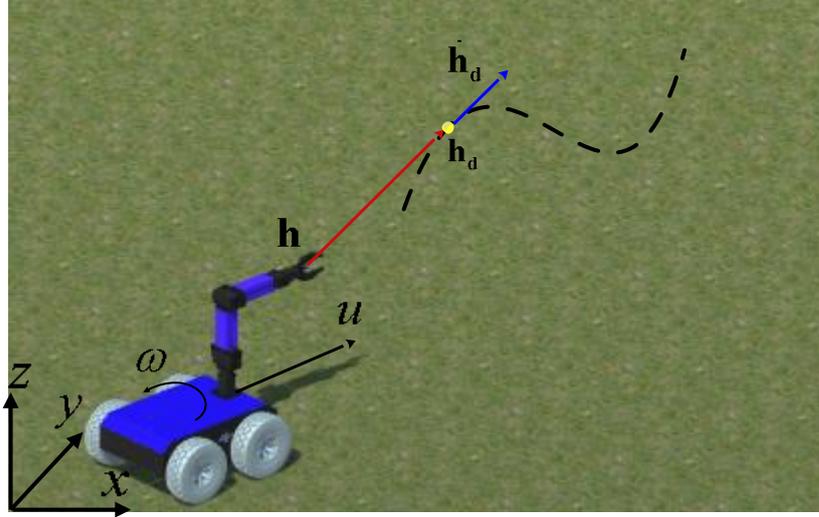


Figura 7-4. Parámetros de seguimiento de trayectoria para el manipulador móvil

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Partiendo del modelo cinemático del robot manipulador móvil (3.14) se aplica el método de la cinemática diferencial inversa (4.14), donde $\mathbf{v}_c(t) = [u \ \omega \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$ son las velocidades de control, $\mathbf{h}_d(t) = [h_{xd} \ h_{yd} \ h_{zd}]$ son las posiciones deseadas y $\dot{\mathbf{h}}_d(t) = [\dot{h}_{xd} \ \dot{h}_{yd} \ \dot{h}_{zd}]$ son las velocidades lineales deseadas para el extremo operativo del robot, estas velocidades deseadas pueden ser las generadas para el seguimiento de la trayectoria o según los movimientos deseados por el operador. Además, la \mathbf{S} es una matriz de 3x5, por lo cual no se puede determinar su inversa como en los casos anteriores, por lo cual se usa la pseudoinversa de Moore Penrose ($\mathbf{S}^\# = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$), conocida por su minimización en el costo de la función en sistemas redundantes.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{S}^\#(\mathbf{q})\dot{\mathbf{h}}_d(t) \quad (4.14)$$

De la misma manera el control debe considerar los errores de posición del extremo operativo dados cuando se encuentra fuera del camino a seguir. Para ello se utiliza (4.15), donde la función $\tanh(\cdot)$ satura los errores de posición producidos, $\tilde{\mathbf{h}}(t) = [\tilde{h}_x \ \tilde{h}_y \ \tilde{h}_z]$ son los errores de posición se obtienen mediante $\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_p(t) - \mathbf{h}(t)$, \mathbf{K}_1 es la matriz diagonal constante que permite corregir error pequeños de posición y \mathbf{K}_2 es la matriz diagonal constante que limita las velocidades del robot a las máximas permitidas.

$$\mathbf{v}_c(t) = \mathbf{S}^\#(\mathbf{q})\left(\dot{\mathbf{h}}_d(t) + \mathbf{K}_2 \tanh\left(\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{h}(t)\right)\right) \quad (4.15)$$

Para demostrar estabilidad de la ley de control propuesta se asume que las velocidades en los actuadores del robot son iguales a las velocidades de control obtenidas $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_c(t)$, por lo cual se puede remplazar en (4.15) en el modelo cinemático del robot manipulador móvil.

$$\mathbf{S}^\#(\mathbf{q})\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{S}^\#(\mathbf{q})\left(\dot{\mathbf{h}}_d(t) + \mathbf{K}_2 \tanh(\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{h}(t))\right)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_d(t) - \dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}_2 \tanh(\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{h}(t)) = 0 \quad (4.16)$$

Reduciendo y ordenando se tiene (4.16) y recordando que los errores de velocidad se definen como $\tilde{\dot{\mathbf{h}}}(t) = \dot{\mathbf{h}}_d(t) - \dot{\mathbf{h}}(t)$, se tiene (4.17).

$$\tilde{\dot{\mathbf{h}}}(t) = -\mathbf{K}_2 \tanh(\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{h}(t)) \quad (4.17)$$

Para garantizar la estabilidad del algoritmo propuesto se aplica el método de Lyapunov, usando como candidata el modelo de los errores cuadráticos.

$$\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{h}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}^T(t) \tilde{\mathbf{h}}(t) \quad (4.18)$$

Derivando la función candidata de Lyapunov (4.18), se tiene $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{h}}) = \tilde{\mathbf{h}}^T(t) \tilde{\dot{\mathbf{h}}}(t)$ y remplazando (4.17),

$$\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{h}}) = -\tilde{\mathbf{h}}^T(t) \mathbf{K}_2 \tanh(\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{h}(t))$$

Según el criterio de Lyapunov, $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{h}})$ deber ser una función definida negativa para garantizar la estabilidad del sistema, para lo cual debe cumplirse las condiciones:

$\mathbf{K}_1 > 0$ y $\mathbf{K}_2 > 0$, asegurando que $\tilde{\mathbf{h}} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

4.4.2 Control de Redundancia

Un manipulador móvil se caracteriza por tener un alto grado de redundancia, es decir, es posible realizar una misma tarea de varias maneras, así esta característica puede ser

aprovecha para imponer parámetros deseado en la configuración interna del robot manipulador móvil sin cambiar el resultado en el efector final, utilizando el método de (Sciavicco y Siciliano, 2000).

El modelo (3.14) describe el comportamiento cinemático del robot, siendo $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ una matriz de $r \times n$. Debido a que el sistema tiene múltiples soluciones el espacio nulo de $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ es diferente de cero, es decir, es posible sustituir $\mathbf{v}(t)$ por (4.19), donde \mathbf{P} es una matriz de $n \times n$ que proyecta sobre el espacio nulo de la matriz $\mathbf{S}(\mathbf{q})$, $\mathbf{v}_0(t)$ es el vector que contiene las condiciones deseadas para la configuración interna del robot manipulador móvil, $\mathbf{v}^*(t)$ es una solución para la cinemática inversa y $\mathbf{v}^*(t) + \mathbf{P}\mathbf{v}_0(t)$ también es una solución debido a que $\mathbf{P}\mathbf{v}_0(t) = 0$ para todo valor de $\mathbf{v}_0(t)$.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^*(t) + \mathbf{P}\mathbf{v}_0(t) \quad (4.19)$$

Se propone $\mathbf{P} = \mathbf{S}(\mathbf{q})^\# \mathbf{S}(\mathbf{q}) - \mathbf{I}$ según propone (Sciavicco y Siciliano, 2000), reemplazando \mathbf{P} en (4.19),

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^*(t) + (\mathbf{S}(\mathbf{q})^\# \mathbf{S}(\mathbf{q}) - \mathbf{I})\mathbf{v}_0(t) \quad (4.20)$$

Reemplazando en (4.20) la cinemática inversa del manipulador móvil se obtiene (4.21),

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{q})^\# \dot{\mathbf{h}}(t) + (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{q})^\# \mathbf{S}(\mathbf{q}))\mathbf{v}_0(t) \quad (4.21)$$

Aplicando este concepto a la ley de control (4.15), se determina la nueva ley de control con \mathbf{K}_r como la matriz diagonal de ganancia que pesa los valores de $\mathbf{v}_0(t)$, que incluye el control de redundancia permitiendo fijar la configuración interna del robot manipulador móvil sin modificar los estados del extremo operativo.

$$\mathbf{v}_c(t) = \mathbf{S}^\#(\mathbf{q}) \left(\dot{\mathbf{h}}_d(t) + \mathbf{K}_2 \tanh(\mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{h}(t)) \right) + (\mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{q})^\# \mathbf{S}(\mathbf{q})) \mathbf{K}_r \mathbf{v}_0(t) \quad (4.22)$$

4.4.3 Control Dinámico

Los efectos de la dinámica del robot manipulador móvil generan un error de velocidad $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_c - \mathbf{v}$, que es la diferencia entre las velocidades del control cinemático y las velocidades reales, para reducir este efecto se propone un compensador a partir del modelo dinámico.

La ley de control propuesta es:

$$\mathbf{v}_{\text{ref}}(t) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{v}(t) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \quad (4.23)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = \dot{\mathbf{v}}_c(t) + \mathbf{K}_4 \tanh(\mathbf{K}_4^{-1}\mathbf{K}_3\tilde{\mathbf{v}}(t))$, con $\tilde{\mathbf{v}}(t)$ son los errores de velocidad, $\dot{\mathbf{v}}_c(t)$ son las aceleración de control, \mathbf{K}_3 es la matriz diagonal constante que permite corregir error pequeños de velocidad y \mathbf{K}_4 es la matriz diagonal constante que limita las velocidades del robot manipulador móvil. Así, las aceleraciones producidas reducirán los errores de velocidad generados por la dinámica del sistema.

Para garantizar la estabilidad del compensador dinámico propuesto se resuelve la siguiente igualdad:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{v}(t) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{v}(t) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$$

Aquí se observa que las aceleraciones del robot manipulador móvil se producen según:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \boldsymbol{\sigma} = \dot{\mathbf{v}}_c(t) + \mathbf{K}_4 \tanh(\mathbf{K}_4^{-1}\mathbf{K}_3\tilde{\mathbf{v}}(t))$$

Lo que nos indica que los errores de aceleración $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t) = \dot{\mathbf{v}}_c(t) - \dot{\mathbf{v}}(t)$ se obtienen de:

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t) = -\mathbf{K}_4 \tanh(\mathbf{K}_4^{-1}\mathbf{K}_3\tilde{\mathbf{v}}(t)) \quad (4.24)$$

Partiendo de los errores cuadráticos de la velocidad como la candidata de Lyapunov

$\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^T(t) \tilde{\mathbf{v}}(t)$, aplicando su derivada $\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{\mathbf{v}}^T(t) \dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t)$ y reemplazando (4.24),

$$\dot{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{v}}) = -\tilde{\mathbf{v}}^T(t) \mathbf{K}_4 \tanh(\mathbf{K}_4^{-1}\mathbf{K}_3\tilde{\mathbf{v}}(t))$$

Según el criterio de Lyapunov, $\dot{V}(\tilde{\mathbf{v}})$ deber ser una función definida negativa para garantizar la estabilidad del sistema, para lo cual debe cumplirse las condiciones:

$\mathbf{K}_3 > 0$ y $\mathbf{K}_4 > 0$, asegurando que $\tilde{\mathbf{v}} \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

4.5 Fuerzas Ficticias

Los sistema bilaterales de tele-operación permiten experimentar fuerzas en el sitio local equivalente a los estados presentes en el sitio remoto, es decir, replicar las sensaciones de forma háptica, para esto el sistema de tele-operación bilateral propuesto utiliza el dispositivo Falcon Novint mostrado en la Figura 8-4, que es un equipo de video juegos de bajo costo que permite apreciar una sensación realista al contacto, y ofrece un alto nivel de inmersión y el control del entorno remoto o virtual, consta de 3 motores servo controlables con encoders de posición que hacen posible la inserción hacia una experiencia háptica.



Figura 8-4. Dispositivo háptico: Falcon Novint

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Por otra parte el sitio remoto posee un sensor laser que permite medir las distancias del robot móvil a los obstáculos que se atraviesan; el sensor laser utilizado es el URG-04LX-UG01 de la marca HOKUYO AUTOMATIC presentado en la Figura 9-4, que tiene un alcance máximo de 4 metros y un rango de medición regulable de 0 a 240°, ver el ANEXO A.



Figura 9-4. Sensor laser: URG-04LX-UG01

Realizado por: José Luis Varela Aldás

4.5.1. Retroalimentación de Fuerzas

Este esquema de tele-operación propone generar fuerzas ficticias equivalentes al vector de distancias medidas por el sensor laser, para lo cual se propone (4.25) que cuantifica una fuerza resultante f de la incidencia del láser sobre los obstáculos (Ortiz J. et al, 2015), el ángulo α corresponde a la incidencia de robot sobre el obstáculo, la longitud d mide la distancia entre el sensor y el obstáculo, r es la distancia a partir de la cual se comienza a evitar el obstáculo, y k_F es una constante de ganancia positiva.

$$f = k_F (r - d)(\pi/2 - |\alpha|) \quad (4.25)$$

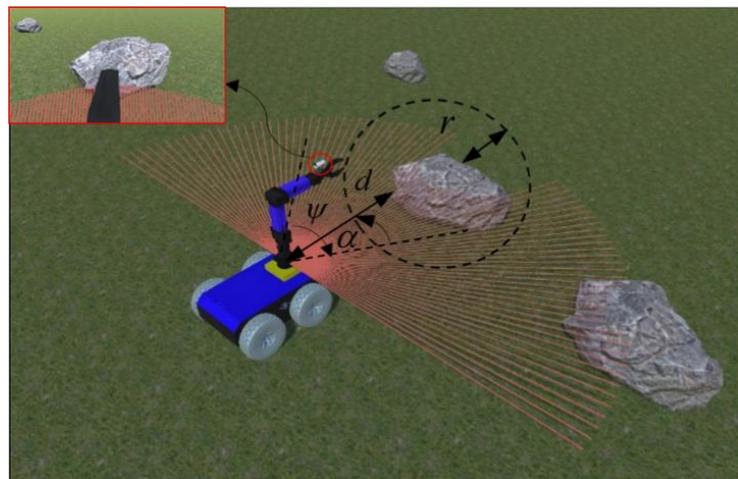


Figura 10-4. Parámetros para la retroalimentación de fuerzas y evasión de obstáculos.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La fuerza tangencial y la fuerza normal son calculadas como $f_t = f \cos(\alpha)$ y $f_n = f \sin(\alpha)$, respectivamente. La componente tangencial tiene la misma dirección que el movimiento del robot y la componente normal es perpendicular a la misma.

Las fuerzas calculadas son ingresadas en el dispositivo háptico tal como se muestra en la Figura 10-4, de manera que el operador estará obligado a detener su avance o girar con el objetivo de evitar que el robot manipulador colisiones con algún obstáculo.

4.5.2 Evasión de Obstáculos

Se plantea un método que aproveche la redundancia del robot, usando $\mathbf{v}_0(t)$ de la ley de control (4.22), así, los parámetros de velocidad angular y lineal de la plataforma móvil se verán afectadas por las fuerzas normal y tangencial de la fuerza ficticia, respectivamente. Por lo que se propone:

$$u_o = k_{uo} f_t \quad \text{y} \quad \omega_o = k_{\omega o} f_n \quad (4.26)$$

donde k_{uo} y $k_{\omega o}$ son ganancias positivas de ajustes y forma el vector de espacio nulo $\mathbf{v}_0(t)$ que inciden en la solución de la cinemática inversa del controlador cinemático.

$$\mathbf{v}_0(t) = [-u_o \quad \omega_o \quad q_{1o} - q_1 \quad q_{2o} - q_2 \quad q_{3o} - q_3]^T \quad (4.27)$$

Para (4.27), u_o y ω_o influyen en las acciones de velocidad del robot móvil; q_{1o} , q_{2o} y q_{3o} son los parámetros deseados para la configuración interna del manipulador, y $q_{io} - q_i$ representan los error de configuración interna del brazo robótico que tiende a cero cuando el manipulador alcance la disposición deseada.

4.6 Canal de Comunicación

El esquema de control propuesto requiere un mínimo retardo de comunicación tanto en el envío y recepción de datos, como en la transmisión de video en tiempo real, para cual

se ha considerado usar canales independientes de comunicación para Datos y Video, mediante los protocolos de comunicación Ethernet TCP/IP y UDP, respectivamente.

El protocolo TCP/IP es un modo de comunicación muy fiable debido a que posee detección de errores que garantiza la recepción de los datos correctos y ofrece altas velocidades de transmisión correspondientes al estándar de Ethernet. La Figura 11-4 presenta el flujo de datos utilizados para el intercambio de información entre el sitio local (Operador Humano) y el sitio remoto (Manipulador Móvil).

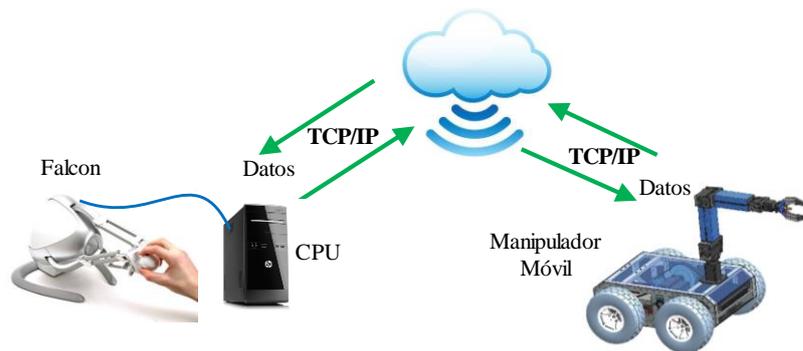


Figura 2-4. Esquema de comunicación para el intercambio de datos
Realizado por: José Luis Varela Aldás

El protocolo UDP realiza el transporte de información de manera no fiable debido a que no posee control de error, pero esto implica un aumento en las velocidades de transmisión y la capacidad de enviar grandes paquetes de datos, siendo ideal para la transmisión de video, la Figura 12-4 ilustra cómo se realiza la transmisión de video para la tele-operación del manipulador móvil.

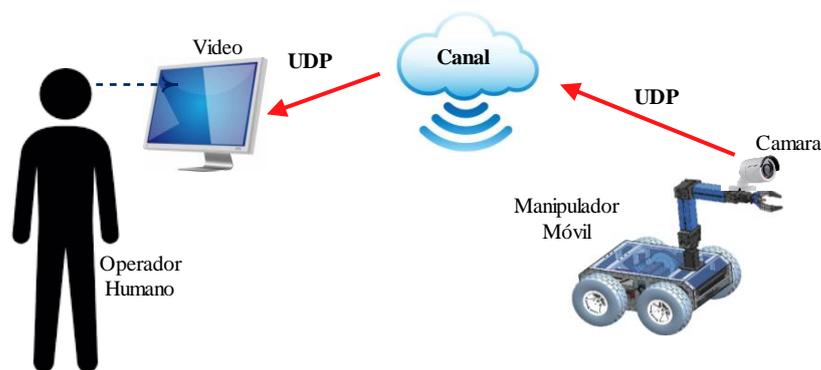


Figura 3-4. Esquema de comunicación para la transmisión de video.
Realizado por: José Luis Varela Aldás

4.7 Manipulador Móvil

Para las pruebas experimentales de tele-operación se utiliza un robot manipulador móvil tipo unicycle del proyecto de investigación “Tele-operación bilateral cooperativo de múltiples manipuladores móviles”, proyecto ganador de la novena convocatoria CEDIA-CEPRA 2015. El proyecto es ejecutado por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Universidad Técnica de Ambato, Escuela Politécnica Nacional y la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.

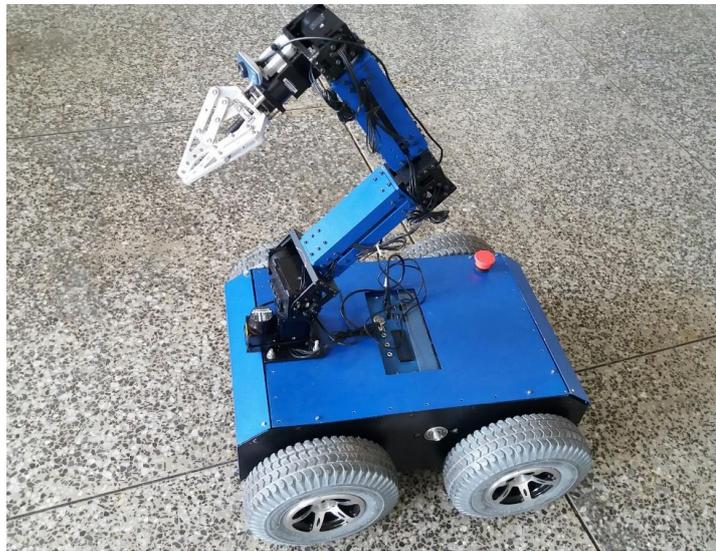


Figura 13-4. Robot manipulador móvil Akasha

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figura 13-4 presenta el robot manipulador utilizado en el desarrollo de este proyecto, se compone una plataforma móvil tipo unicycle de cuatro ruedas y dos motores dynamixel pro de 200 W; y un brazo robótico antropomórfico de tres grados de libertad principales que le proveen la manipulabilidad construido con tres motores dynamixel pro de 50 W.



Figura 14-4. Motor Inteligente Dynamixel Pro.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Los motores instalados en el robot se presentan en ver la Figura 14-4, estos son actuadores inteligentes (ver Anexo B) que se comunican con el computador mediante el protocolo RS-485, el CPU integrado en el manipulador móvil es un computador industrial de marca quatom con memoria RAM de 8 Gb, procesador 2.1 Ghz y 1 TB de Disco duro. Su extremo operativo esta formado por tres piezas que permite sujetar objetos de formas irregulares y soporta una carga de hasta 1 Kgr. Ademas, posee una cámara web que permite la tele-operación remota del manipulador movil.

4.8 Tele-operación Bilateral

La tele-operación del manipulador móvil dispone de un joystick en 3D, que permite desplazar la palanca en el espacio produciendo tres desplazamiento $\mathbf{a}=[d_x \ d_y \ d_z]^T$ como se observa en la Figura 15-4, estos desplazamientos son interpretados por el controlador como velocidades del extremo operativo $\dot{\mathbf{h}}'=[\dot{h}'_x \ \dot{h}'_y \ \dot{h}'_z]^T$ en el caso de operar el manipulador móvil, mientras que si se controla únicamente el manipulador estos datos son interpretados como posiciones $\mathbf{h}'=[h'_x \ h'_y \ h'_z]^T$.

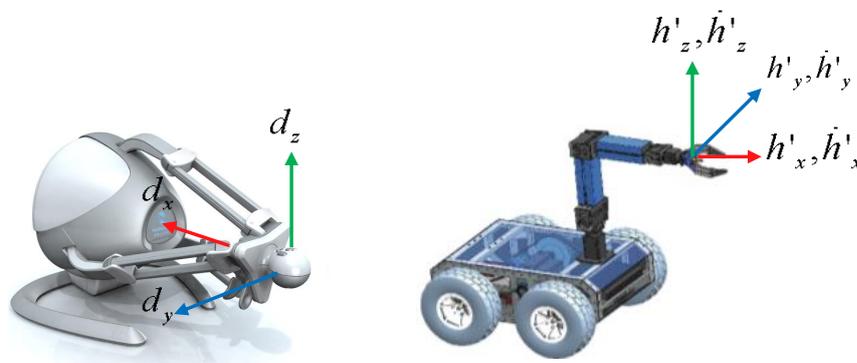


Figura 15-4. Relación de control Falcon Novint - manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Estos datos medidos en el Falcon Novint deben corresponder a la velocidad y posición de avance del extremo operativo coincidiendo la dirección de h'_x con el frente del manipulador, para esto se aplica una matriz de rotación sobre el eje Z de los ángulos $\theta(t)$ y $q_1(t)$, simultáneamente. (4.28) permite que las órdenes enviadas desde el dispositivo háptico sean las pertinentes al extremo operativo y no a las coordenadas del sistema de referencia $\{R\}$.

$$\begin{bmatrix} h'_x, \dot{h}'_x \\ h'_y, \dot{h}'_y \\ h'_z, \dot{h}'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + q_1) & \cos(\theta + q_1) & 0 \\ \cos(\theta + q_1) & \cos(\theta + q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

La selección del tipo de control se escoge mediante tres botones en el mando del dispositivo de control, ver la Figura 16-4, sin presionar botones el operador tiene el control de todo el manipulador móvil, al presionar el botón **1** únicamente se controla la plataforma móvil, el botón **2** acciona el control de posición del brazo y el botón **3** permite al usuario abrir y cerrar la garra del extremo operativo, además de mover un grado de libertad extra que posee el efector final, que acerca la garra a sus objetivos.

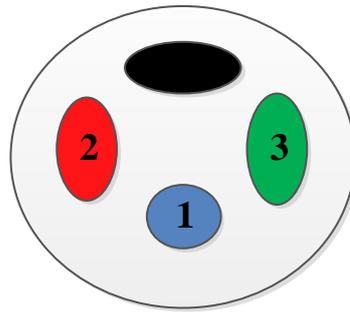


Figura 4-4. Disposición de botones del Falcon Novint.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Para la tele-operación bilateral del manipulador móvil se dispone de todos los elementos diseñados anteriormente, la Figura 17-4. ilustra todo los elementos del esquema de tele-operación bilateral del manipulador móvil.

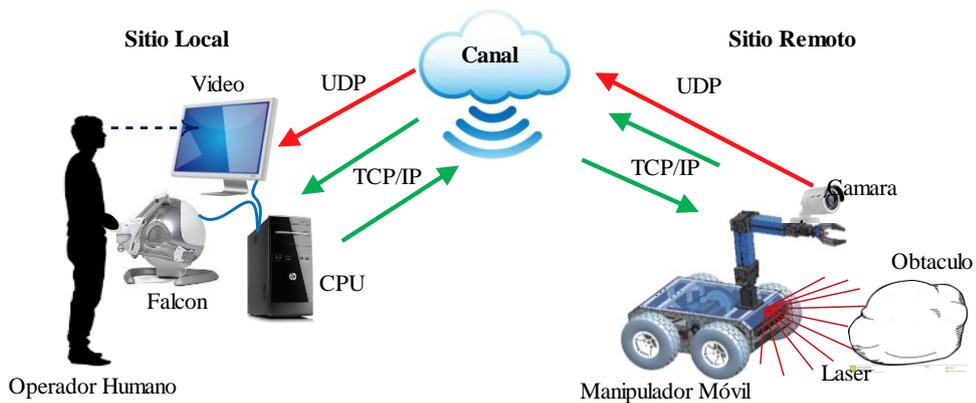


Figura 5-4. Diagrama de flujo del esquema de tele-operación bilateral

Realizado por: José Luis Varela Aldás

CAPÍTULO V

5 RESULTADOS

5.1 Resultados De Manipulabilidad

5.1.1 Manipulabilidad del Brazo Robótico

Para el análisis de manipulabilidad se usa (3.10) y las dimensiones del robot: $l_2 = 0.275[m]$ y $l_3 = 0.375[m]$, y se realizó un barrido de todos los ángulos posibles para cada una de las articulaciones obteniendo la Figura 1-5;

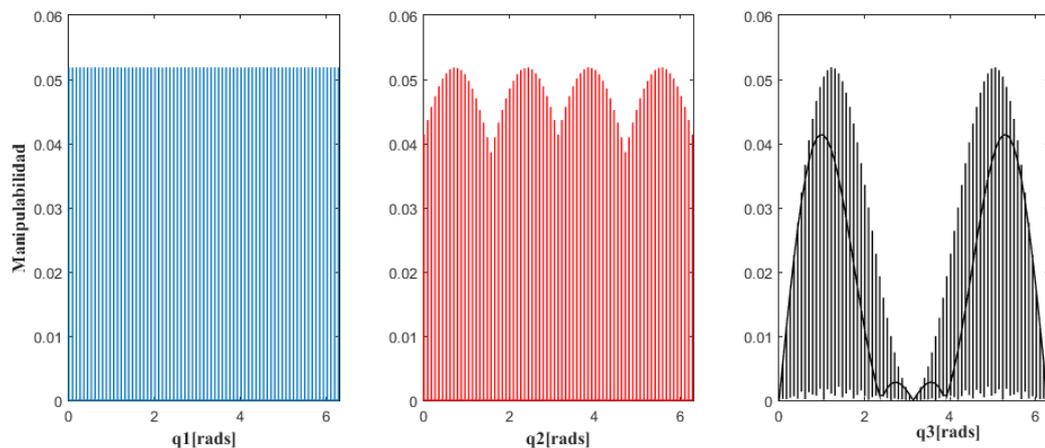


Figura 1-5. Manipulabilidad del brazo robótico.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figura 1-5 indica que la máxima manipulabilidad del brazo robótico es de 0.052, por otro lado, el ángulo q_1 no incide en la manipulabilidad, q_2 no tiene oscilaciones significantes de manipulabilidad y q_3 tiene $w=0$ para 0 y los valores múltiplos de π radianes.

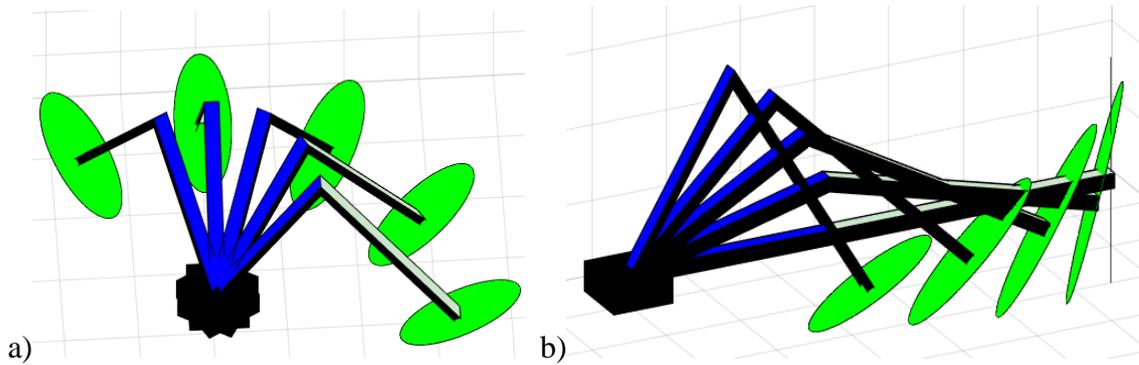


Figura 2-5. Elipsoides de manipulabilidad del brazo robótico

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Complementario a los resultados manipulabilidad, se obtuvo la gráfica de la elipsoides de manipulabilidad de la Figura 2-5, en a) se observa que la forma de la elipsoide no tiene cambios para diferentes valores de q_1 , y b) muestra un adelgazamiento de la elipse cuando q_3 se acerca al punto de singularidad, hasta forma una línea.

5.1.2 Manipulabilidad del Manipulador Móvil

Para el análisis de manipulabilidad del manipulador móvil se usa 3.15 y las dimensiones del robot: $a = 0.195[m]$, $h = 0.25[m]$, $l_2 = 0.275[m]$ y $l_3 = 0.375[m]$, y se realizó un barrido de todos los ángulos posibles para cada una de las articulaciones y la rotación de la plataforma, formando las curvas de la Figura 3-5;

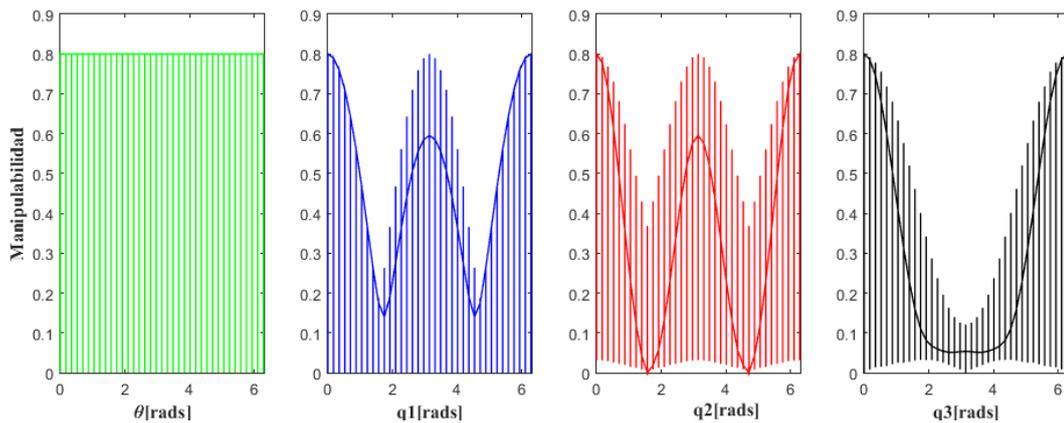


Figura 3-5. Manipulabilidad del manipulador móvil

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figura 3-5 muestra que la máxima manipulabilidad del robot tuvo un aumento a 0.8 al adicionar la plataforma móvil, además, la dirección de θ no incide en su manipulabilidad, los ángulos q_1 y q_2 tienen una caída de manipulabilidad cuando están cerca de los $\pi/2$ radianes y q_3 tiene una mejora de w , aunque aún es baja para π radianes.

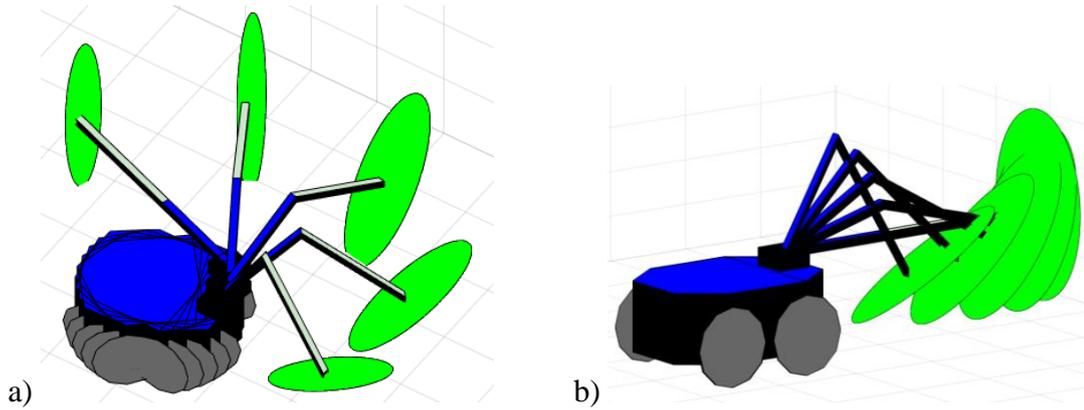


Figura 4-5. Elipsoides de manipulabilidad del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Complementario a los resultados manipulabilidad, se obtuvo la gráfica de la elipsoides de manipulabilidad de la Figura 4-5, en a) se observa que la forma de la elipsoide no tiene cambios para diferentes valores de θ y q_1 , y b) muestra un ensanchamiento de la elipse cuando q_3 se acerca a su máximo rendimiento, pero, recordando los resultados de manipulabilidad de únicamente del manipulador es necesario considerar los resultados que sean favorables para ambos sistemas.

5.2 Validación del Modelo Dinámico

5.2.1 Validación de la Plataforma Móvil

Para validar el modelo 3.52 se usó los siguientes parámetros $m = 31[\text{Kgrs}]$, $R = 0.25[m]$, $r = 0.15[m]$, $K_{PR} = 2$, $K_{PT} = 4$, $K_{DR} = 0.28$, $K_{DT} = 0.63$, $K_{pa} = 584$, $K_{pb} = 0.05$ y $R_{pa} = 4.6[\Omega]$.

Validación 1

Para la primera prueba de validación se usó señales de velocidad lineal y angular tipo sinusoidales, para la Figura 5-5 de la validación 1 u_m y ω_m son los resultados del modelo dinámico de la plataforma móvil. Los resultados presentados en esta gráfica muestran un buen desempeño del modelo dinámico encontrado para el robot móvil.

Validación 2

En esta segunda prueba se utilizó señales que poseen cambios bruscos en la velocidad lineal y angular debido a sus formas rectangulares, para la Figura 6-5 de la validación 2 u_m y ω_m son los resultados del modelo dinámico de la plataforma móvil.

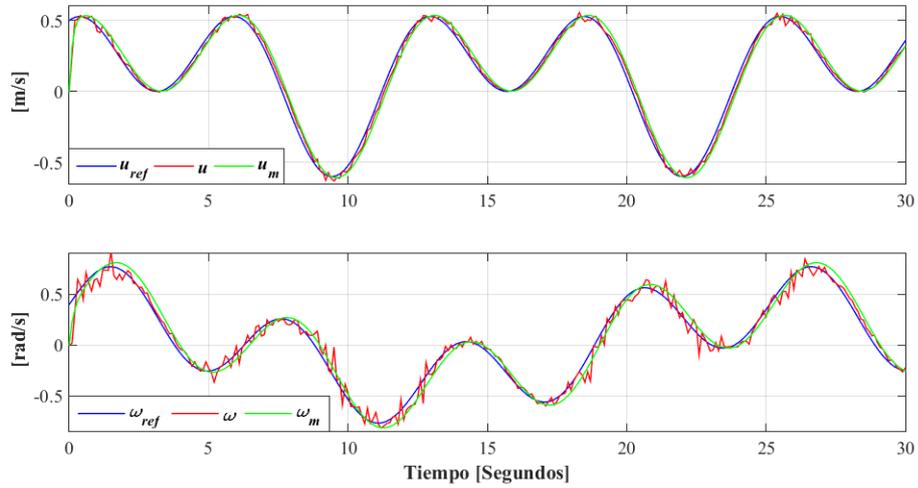


Figura 5-5. Validación 1 del modelo dinámico de la plataforma móvil

Realizado por: José Luis Varela Aldás

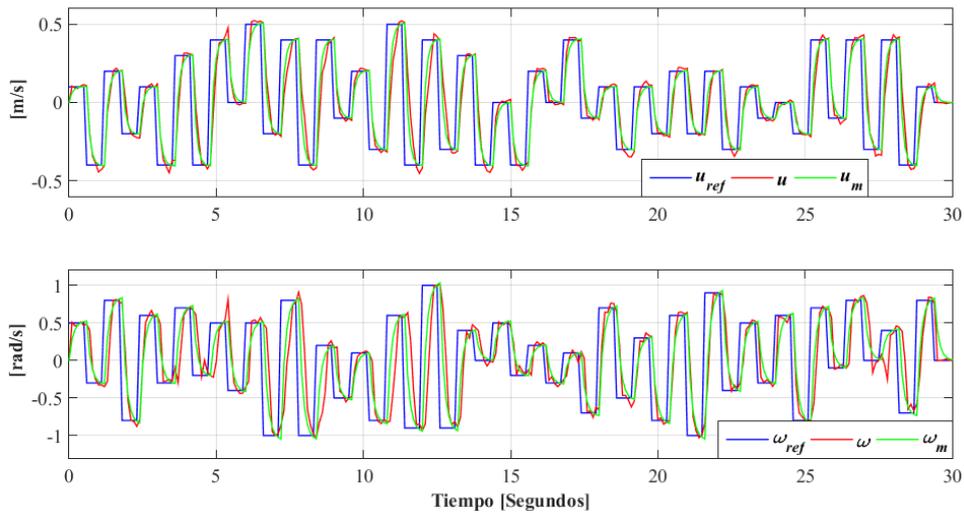


Figura 6-5. Validación 2 del modelo dinámico de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Los resultados presentados de la validación 2 muestran un buen desempeño del modelo dinámico encontrado para el robot móvil.

5.2.2 Validación del Manipulador

Para validar el modelo (3.85) se usó los siguientes parámetros: $m_2 = 5[\text{Kgrs}]$, $m_3 = 7[\text{Kgrs}]$, $K_p = 4$, $K_D = 0.63$, $K_a = 584$, $K_b = 0.05$ y $R_a = 4.6[\Omega]$.

Validación 1

Para la primera prueba de validación se usó señales de velocidad angular para las articulaciones del manipulador de tipo sinusoidales, para la Figura 7-5 \mathbf{q}_m son los resultados del modelo dinámico del manipulador.

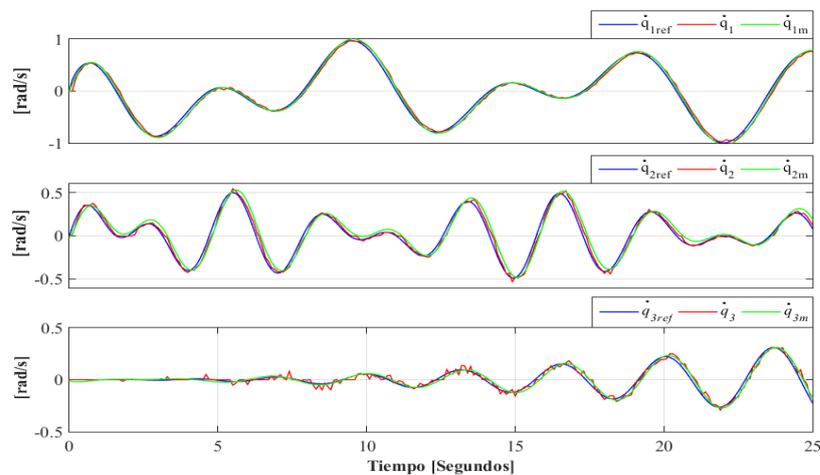


Figura 7-5. Validación 1 del modelo dinámico de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Los resultados visibles en la Figura 7-5 de la validación 1 muestran un buen desempeño del modelo dinámico encontrado para el manipulador.

Validación 2

En esta segunda prueba se usó señales que poseen cambios bruscos en la velocidad angular debido a sus formas rectangulares de amplitud randómica, \mathbf{q}_m son los resultados del modelo dinámico del manipulador.

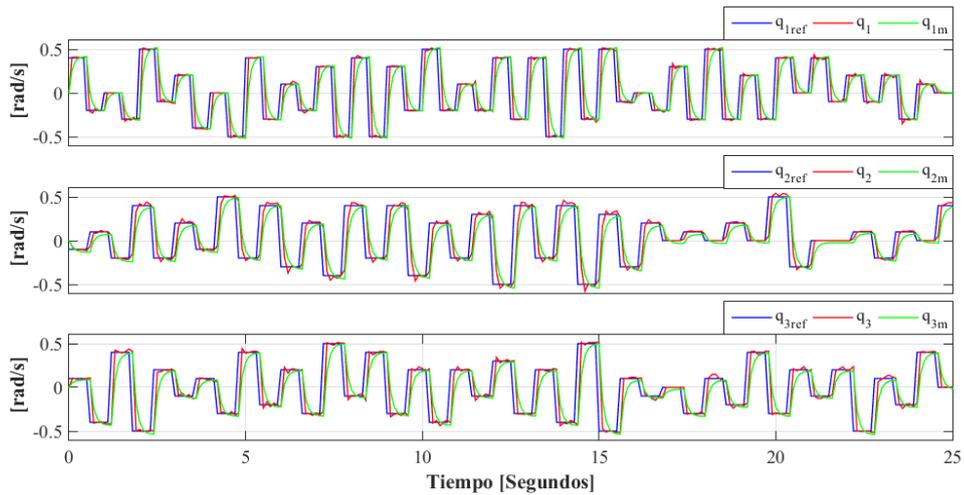


Figura 8-5. Validación 2 del modelo dinámico de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Los resultados visibles en las Figura 8-5 de la validación 2 muestran un buen desempeño del modelo dinámico encontrado para el manipulador móvil.

5.2.3 Validación del Manipulador Móvil

Para validar el modelo dinámico (3.126), se usan los parámetros constantes propuestos para la validación de los modelos independientes de la plataforma móvil y el manipulador, respectivamente.

Validación 1

Para la primera prueba de validación se usó diferentes señales sinusoidales para cada una de las velocidades del robot, los resultados de la Figura 9-5 indican el buen desempeño de modelo encontrado.

Validación 2

En esta segunda prueba se usó señales rectangulares de amplitud randómica que excitan bruscamente el robot manipulador permitiendo observa la respuesta dinámica del sistema, para la Figura 10-5 de la validación 2 los resultados visibles muestran un buen desempeño del modelo dinámico encontrado para el manipulador móvil.

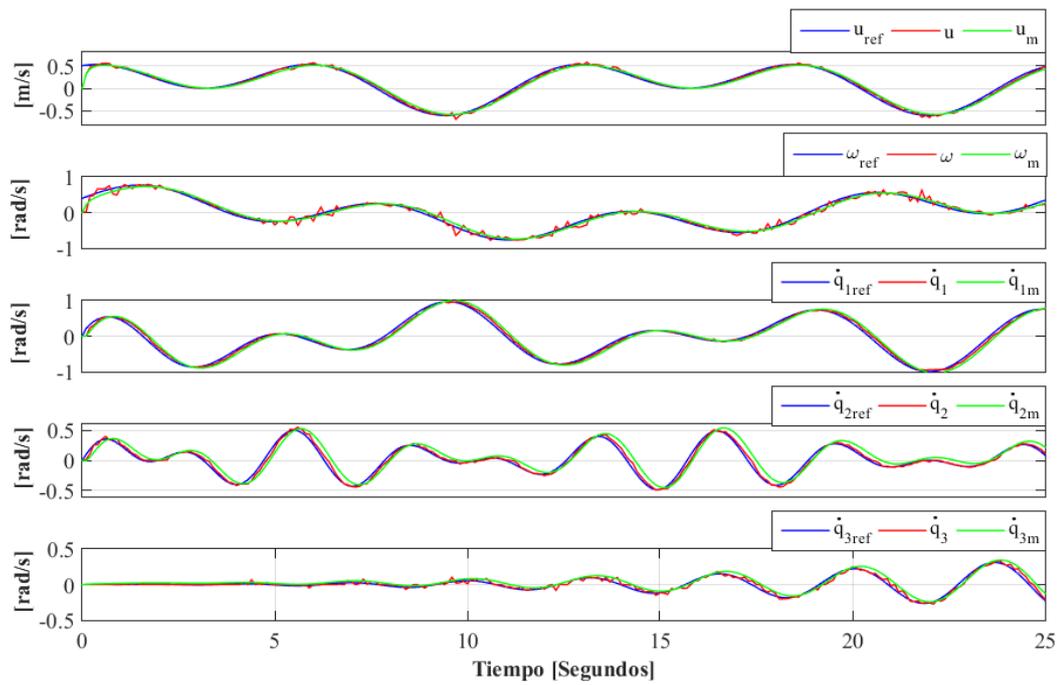


Figura 9-5. Validación 1 del modelo dinámico de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

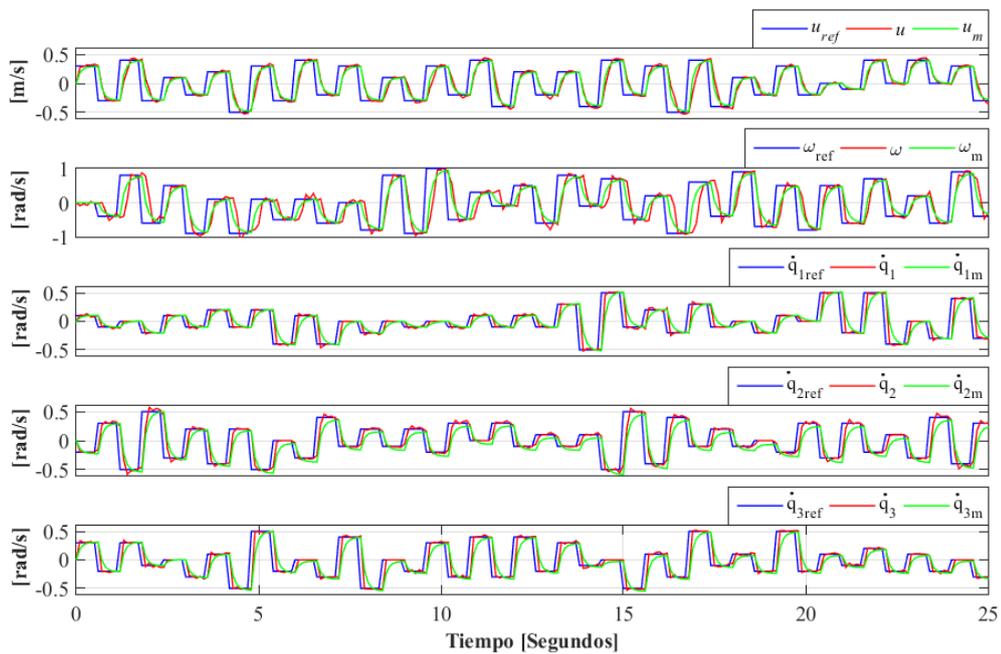


Figura 10-5. Validación 2 del modelo dinámico de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

5.3 Resultados del Control

5.3.1 Controlador del Robot Móvil

5.3.1.1 Resultados de Simulación

El control de seguimiento de trayectoria diseñado es evaluado en un entorno de simulación de Matlab y exportado a un gráfico de Unity desarrollado por el Ingeniero Washington Quevedo, quien es investigador del proyecto financiado por CEDIA, esto permite para observar de mejor manera los resultados del controlador. Para ello se realizan dos pruebas de simulación, la una para el seguimiento de una circunferencia y la otra para una trayectoria sinusoidal, los parámetros de control utilizados son:

$$K_{p2} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.35 \end{bmatrix}, K_{p1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$K_{p4} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix}, K_{p3} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Simulación 1

La trayectoria a seguir es una circunferencia de 3 metros de radio, la Figura 11-5 y 12-5 muestran, el movimiento estroboscópico del robot y la evolución del seguimiento de trayectoria en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

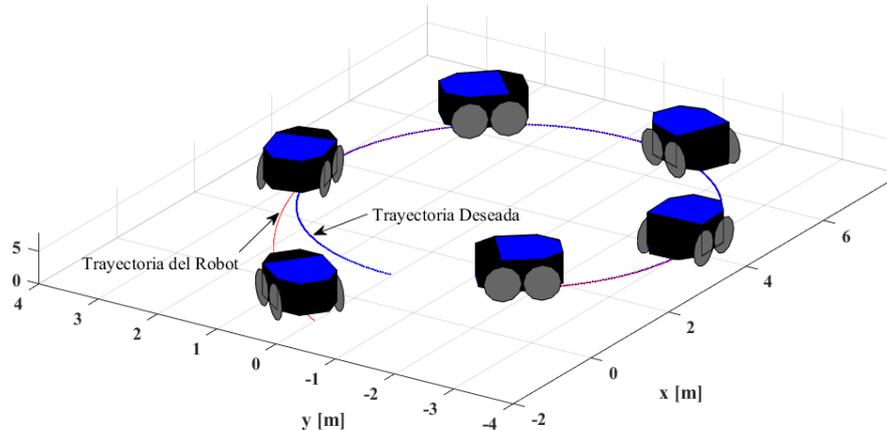


Figura 11-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

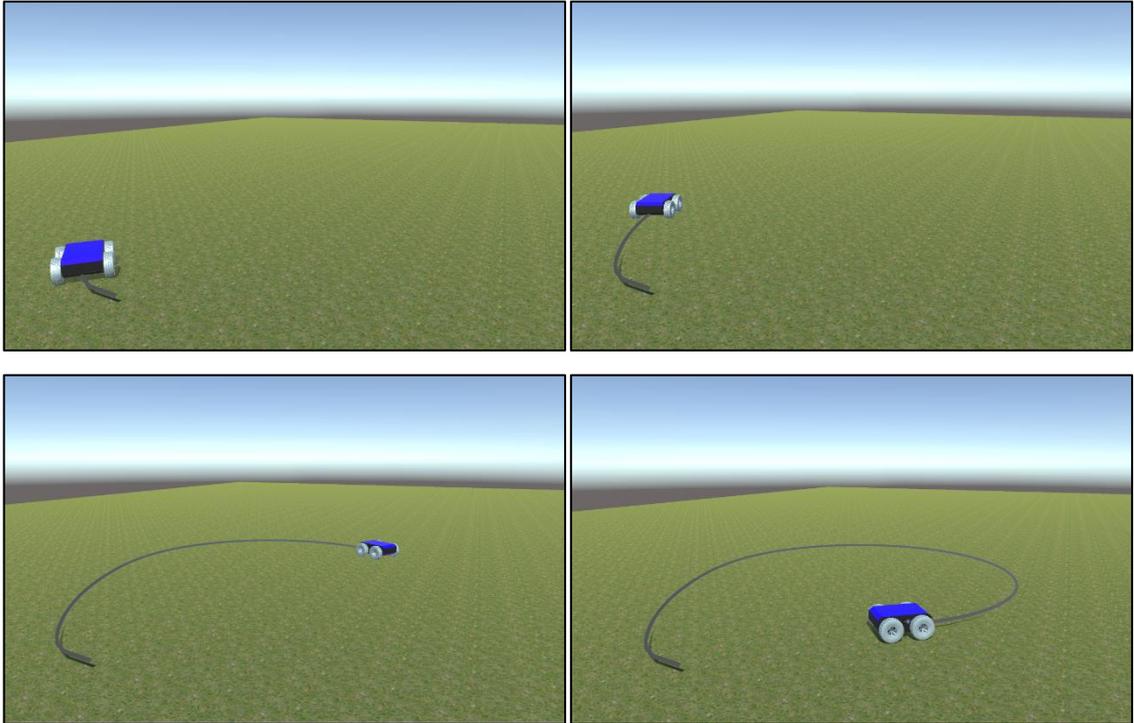


Figura 12-5. Reproducción virtual: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Las Figuras 13-5 y 14-5 corresponden a los errores de seguimiento y las velocidades de control, respectivamente, donde se observa un correcto acercamiento a cero y la estabilidad sobre el punto de equilibrio.

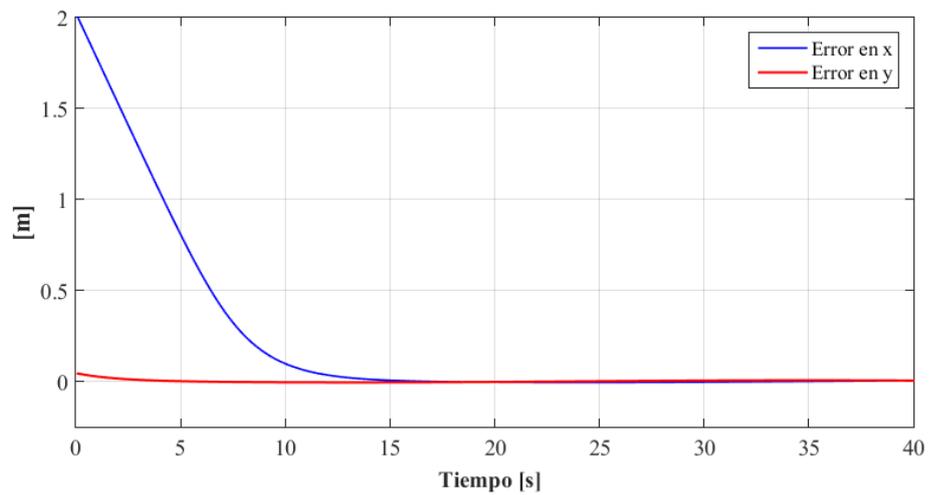


Figura 13-5. Errores de control: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

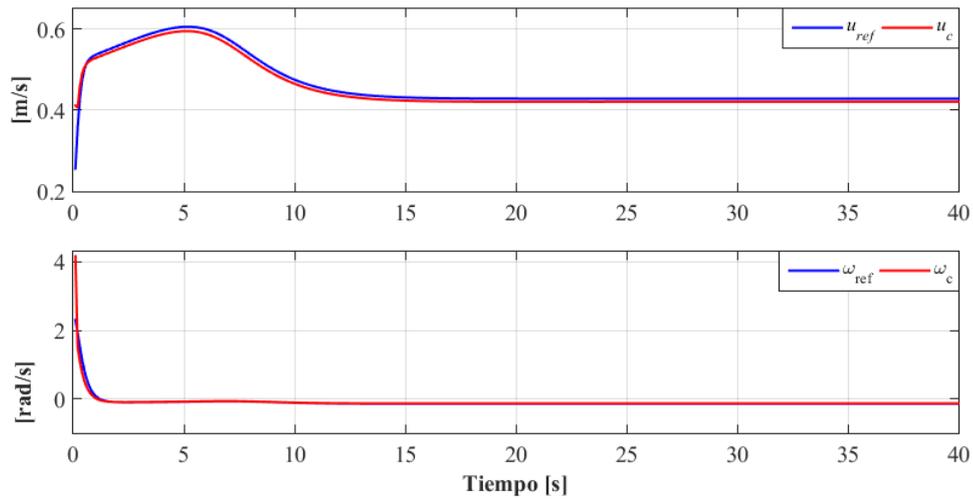


Figura 14-5. Velocidades de control: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Simulación 2

Esta segunda simulación corresponde al seguimiento de una función seno, en las Figuras 15-5 y 16-5 se presenta el movimiento estroboscópico del robot y la evolución del seguimiento de trayectoria en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

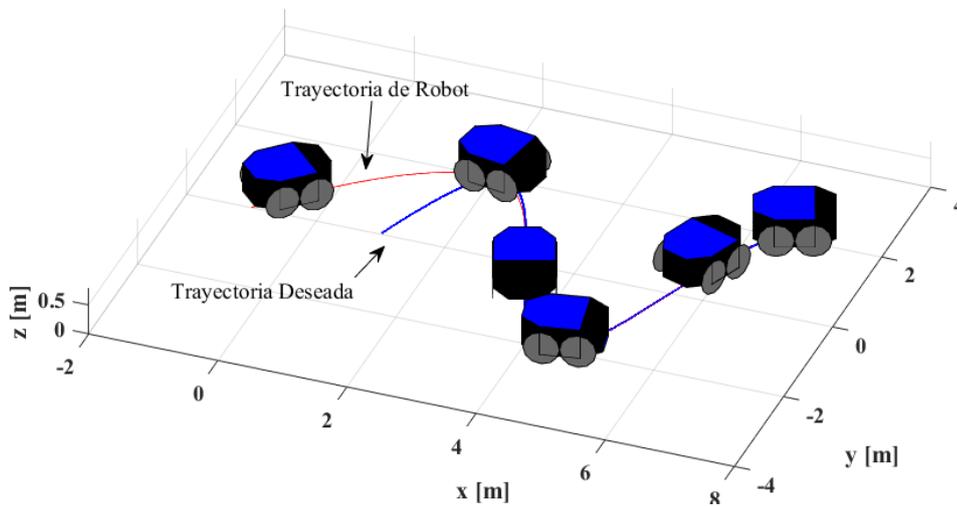


Figura 15-5. Movimiento Estroboscópico: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

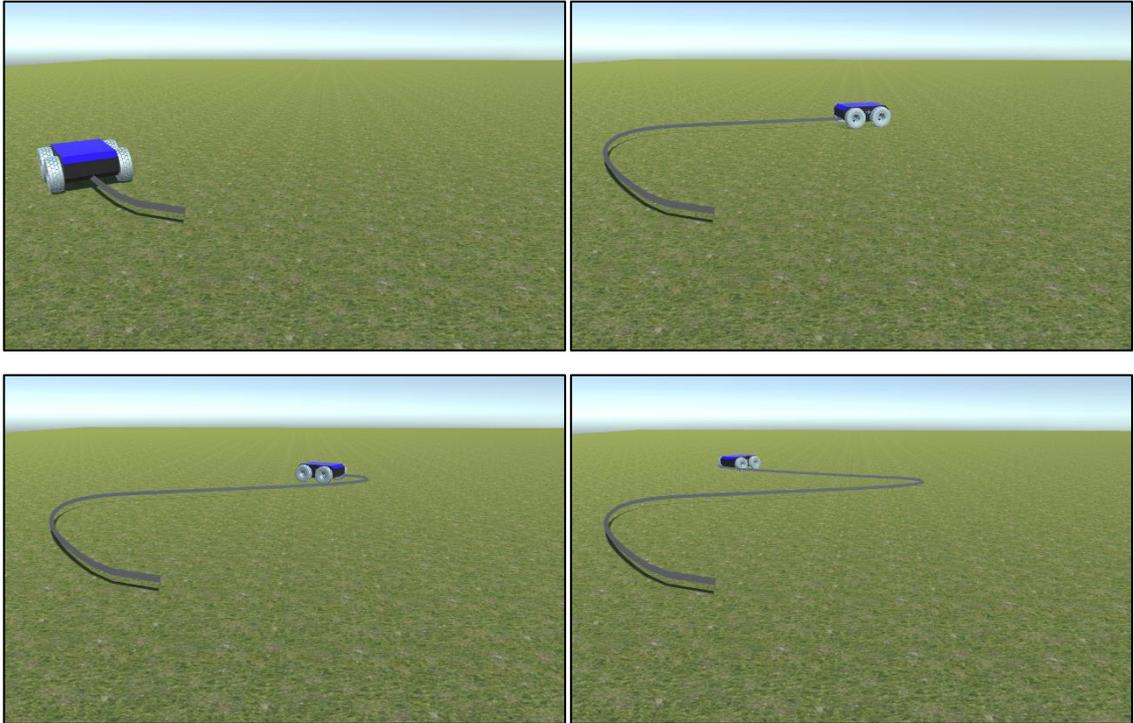


Figura 16-5. Reproducción virtual: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Las Figuras 17-5 y 18-5 corresponden a los errores de seguimiento y las velocidades de control, respectivamente, observando que los errores convergen a cero y las velocidades que permiten el seguimiento de la trayectoria.

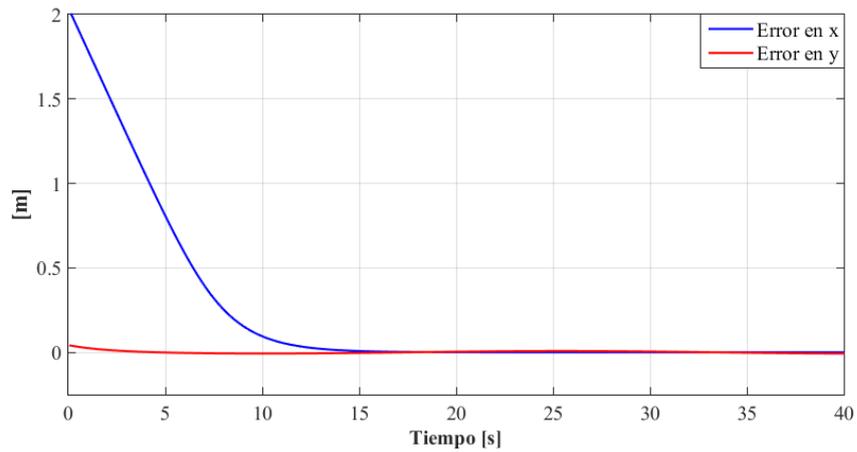


Figura 17.5. Errores de control: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

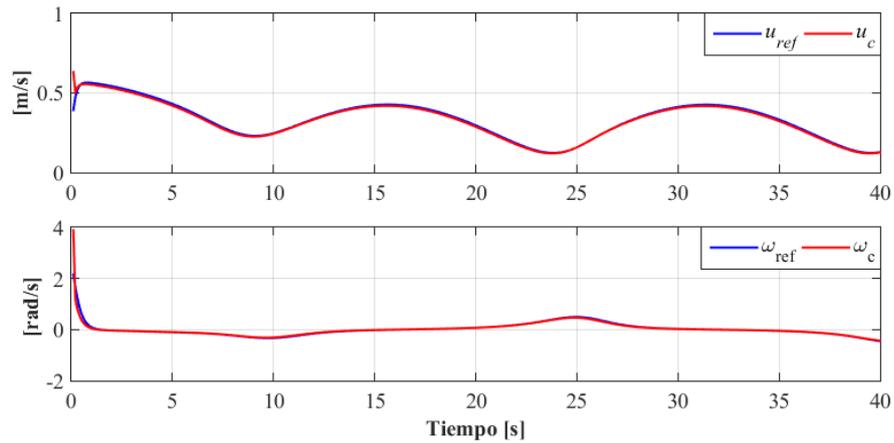


Figura 18-5. Velocidades de control: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

5.3.1.2 Resultados de Experimentación

El control de seguimiento de trayectoria diseñado es evaluado experimentalmente en el robot móvil y los datos son reproducidos en Matlab y al gráficator de Unity para observar de mejor manera los resultados del controlador. Para ello se realizan dos pruebas de experimentación con las mismas trayectorias simuladas para este controlador.

Experimentación 1

En la trayectoria circular, la Figura 19-5 y 20-5 muestran el movimiento estroboscópico del robot y la evolución del seguimiento de trayectoria en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

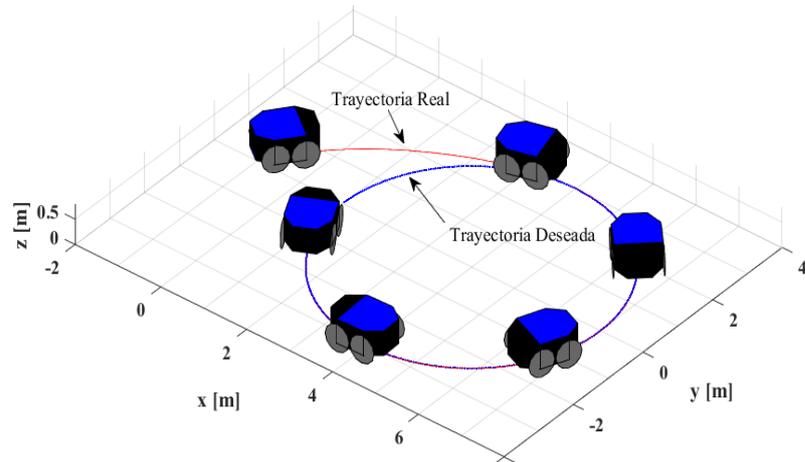


Figura 19-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

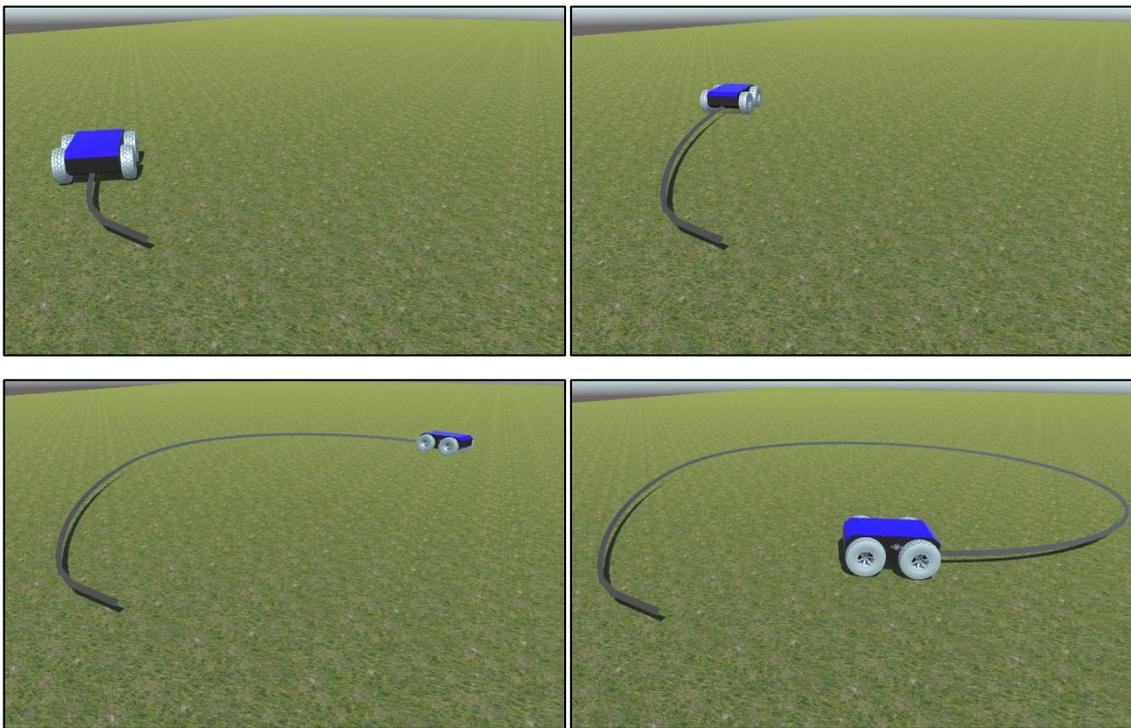


Figura 20-5. Reproducción virtual: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figuras 21-5 y 22-5 corresponden a los errores de seguimiento y las velocidades de control, respectivamente, observando que los errores convergen a cero y las velocidades de control tienden a las velocidades reales debido a la acción de las velocidades de referencia generadas por el compensador dinámico.

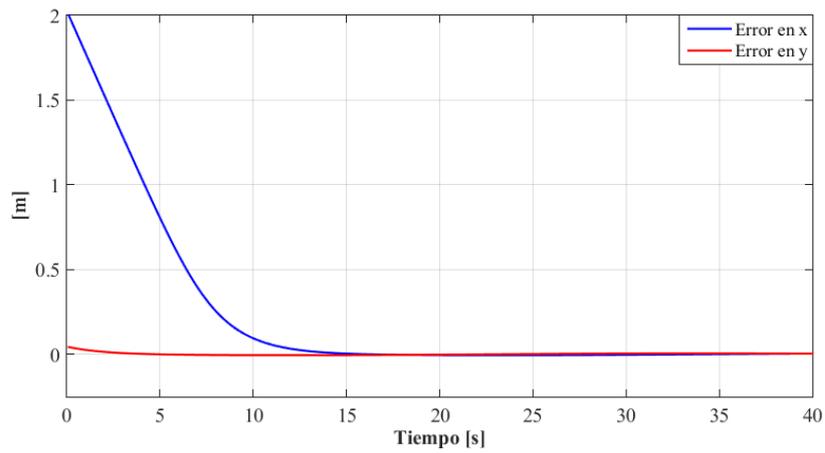


Figura 21-5. Errores de control: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

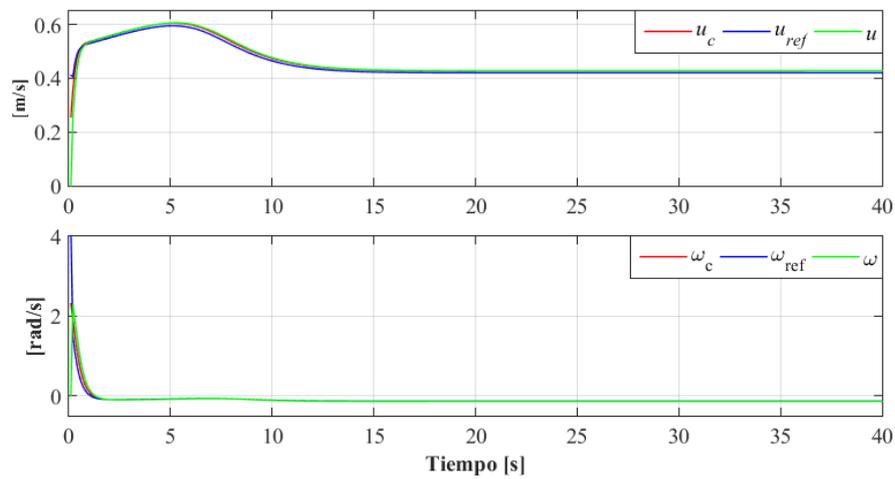


Figura 22-5. Velocidades: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Experimentación 2

En la segunda experimentación se observa el movimiento estroboscópico y la evolución del seguimiento en el graficador de unity, según las Figuras 23-5 y 24-5.

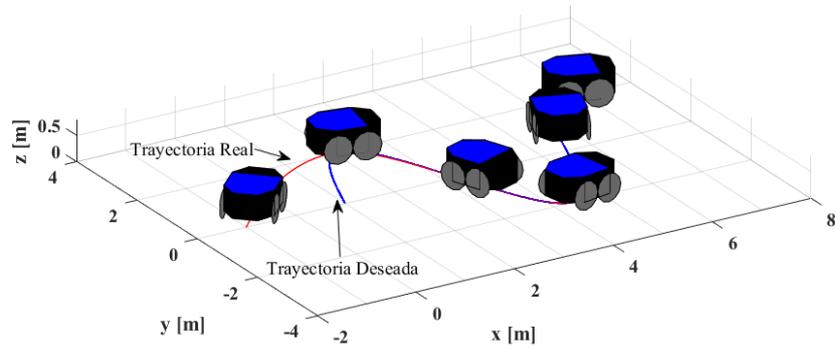


Figura 231-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

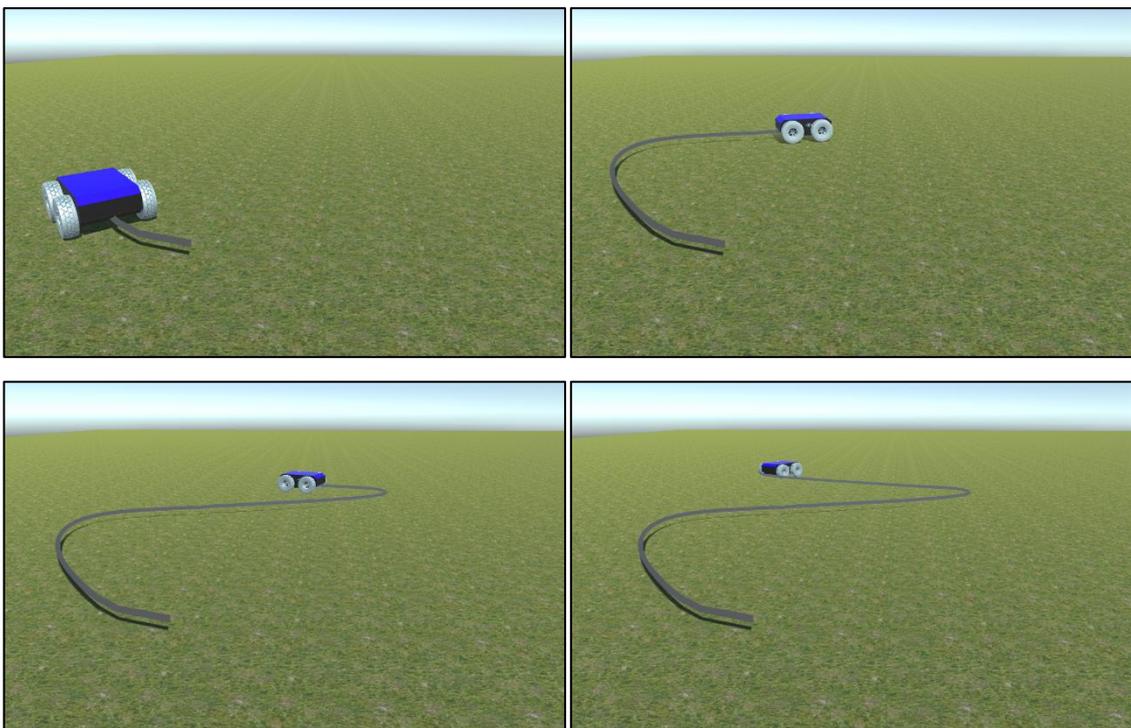


Figura 24-5. Reproducción virtual: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Las Figuras 25-5 y 26-5 corresponden a los errores de seguimiento y las velocidades de control, respectivamente, observando que los errores convergen a cero y las velocidades de control tienden a las velocidades reales debido a la acción de las velocidades de referencia generadas en el compensador dinámico.

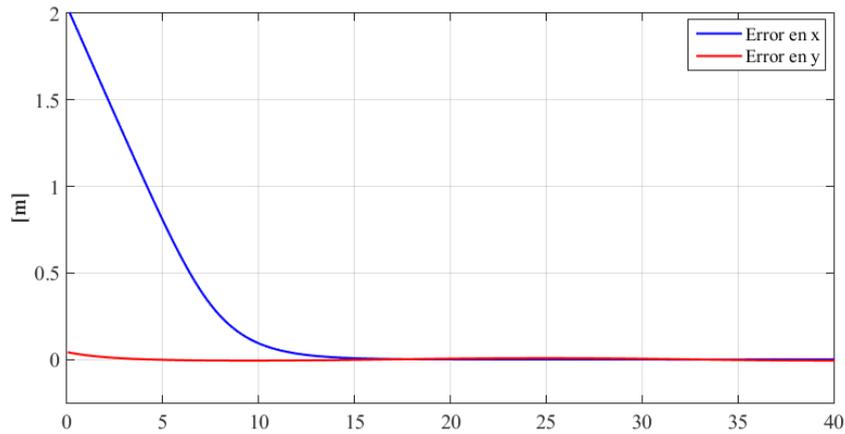


Figura 25-5. Errores de control: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

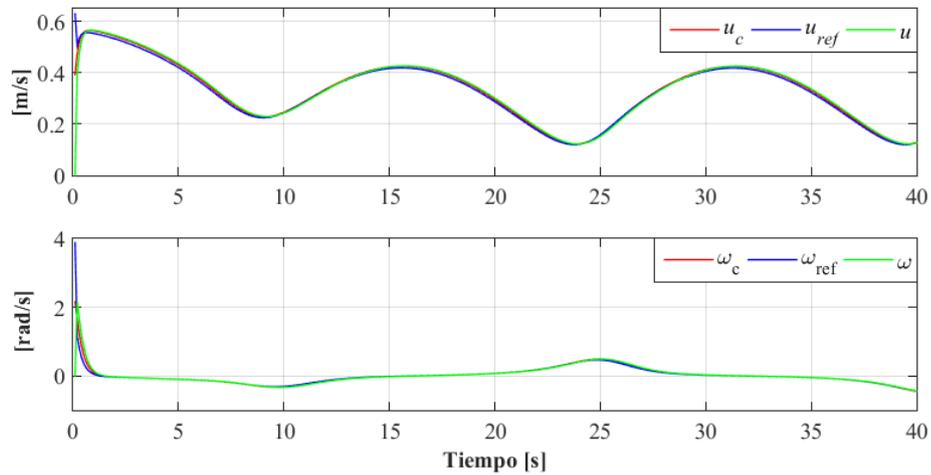


Figura 36-5. Velocidades: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de la plataforma móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

5.3.2 Controlador del Robot Manipulador

5.3.2.1 Resultados de Simulación

El control de posición diseñado es evaluado en un entorno de simulación de Matlab y se exporta a un gráfico en Unity para observar de mejor manera los resultados del controlador de posición. Para ello se realizan dos pruebas de simulación, los parámetros de control utilizados son:

$$K_{a2} = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}, K_{a1} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$K_{a4} = \begin{bmatrix} 0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}, K_{a3} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Simulación 1

Para la primera simulación se propone como objetivo de posición $h_{xda} = 0.6[m]$, $h_{yda} = 0[m]$, $h_{zda} = 0.5[m]$, partiendo de las condiciones de iniciales $h_{xa}(0) = 0[m]$, $h_{ya}(0) = 0.05[m]$, $h_{za}(0) = 0.81[m]$, la Figura 27-5 y 28-5 muestran, el movimiento estroboscópico del manipulador y la evolución del posicionamiento en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

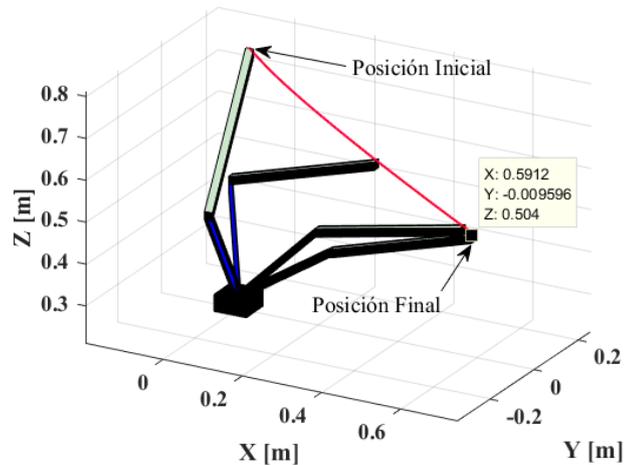


Figura 47-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 1 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figuras 29-5 y 30-5 corresponden a los errores de posición y las velocidades de control, respectivamente, observando que los errores convergen a cero y las velocidades que permiten el posicionamiento del manipulador.

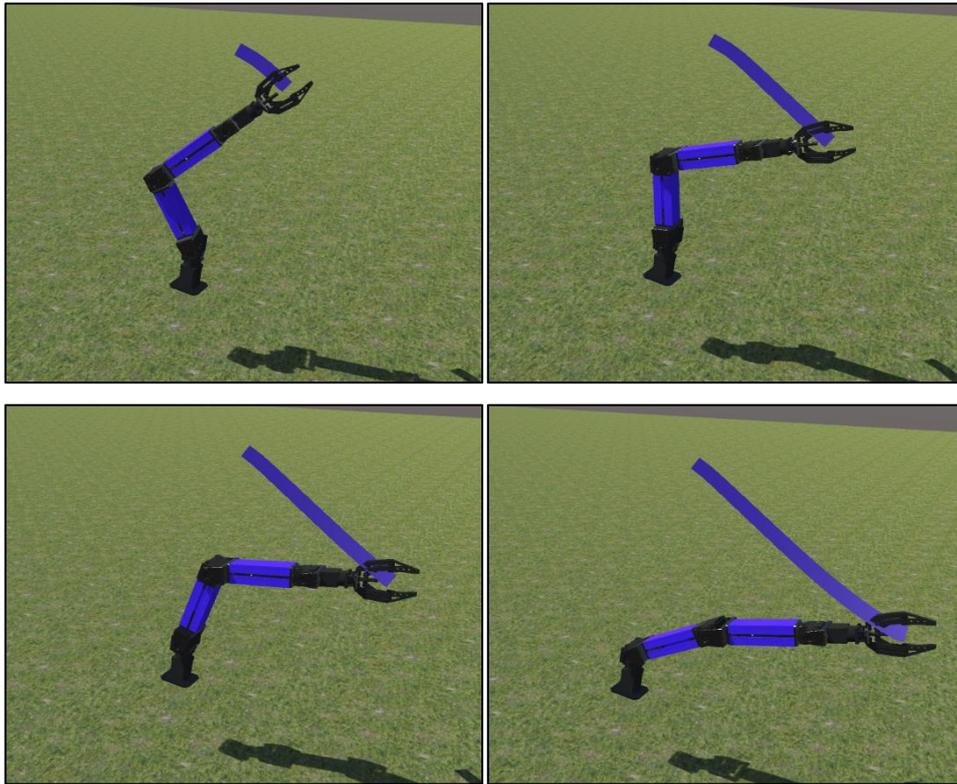


Figura 58-5. Reproducción virtual: Simulación 1 del posicionamiento de robot manipulador.
Realizado por: José Luis Varela Aldás

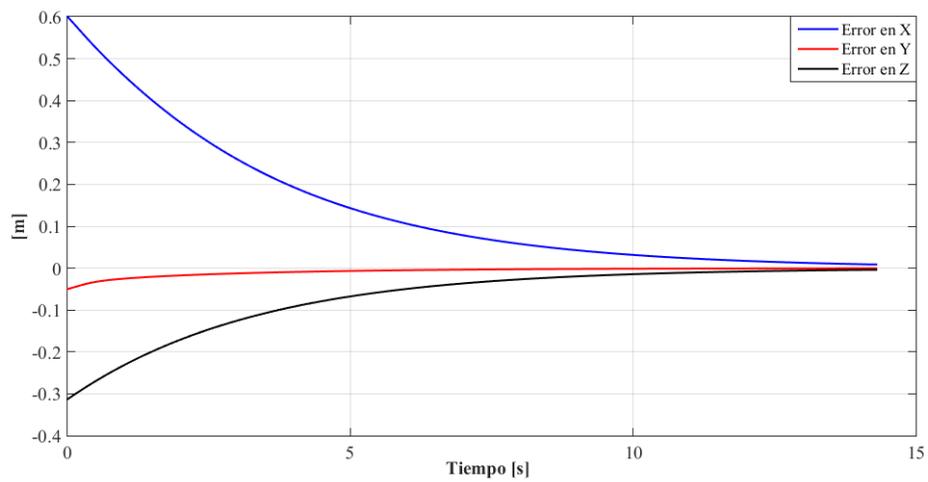


Figura 69-5. Errores de control: Simulación 1 del posicionamiento de robot manipulador.
Realizado por: José Luis Varela Aldás

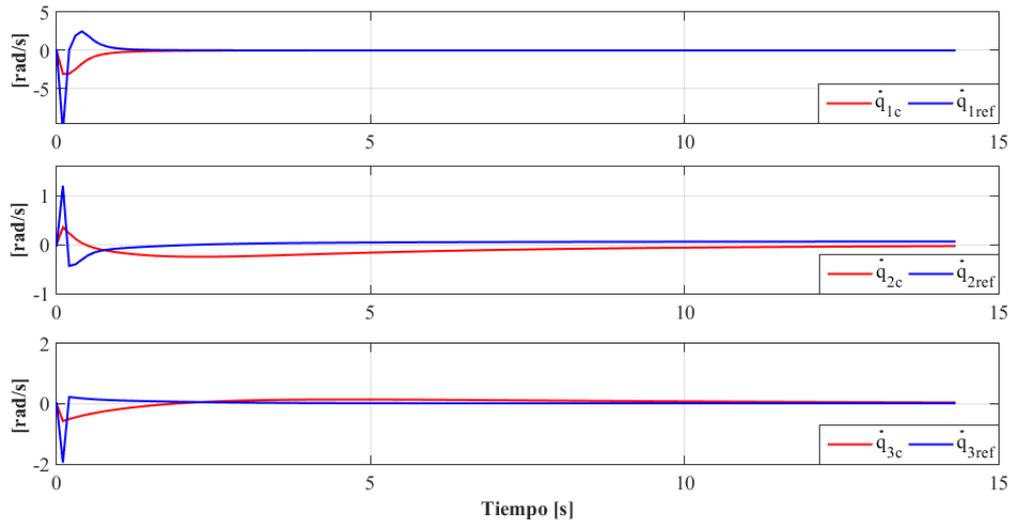


Figura 307-5. Velocidades de control: Simulación 1 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Simulación 2

Para la segunda simulación se propone como objetivo de posición $h_{xda} = 0.2[m]$, $h_{yda} = -0.5[m]$, $h_{zda} = 0.6[m]$, partiendo de las condiciones de iniciales $h_{xa}(0) = 0.6[m]$, $h_{ya}(0) = 0[m]$, $h_{za}(0) = 0.5[m]$, las Figuras 31-5 y 32-5 muestran el movimiento estroboscópico del manipulador y la evolución del posicionamiento en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

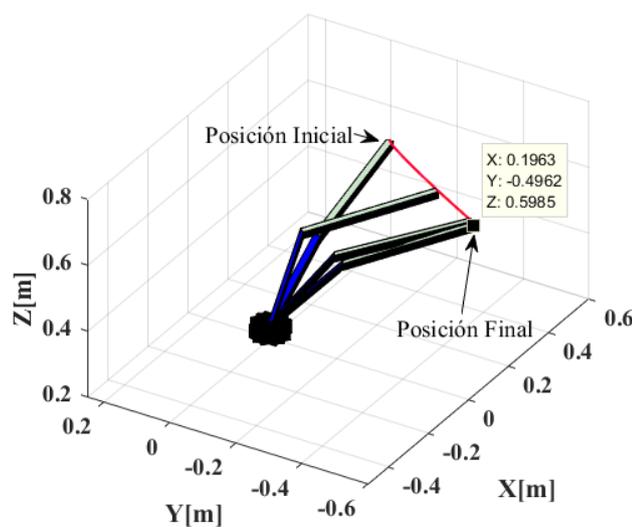


Figura 318-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 2 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

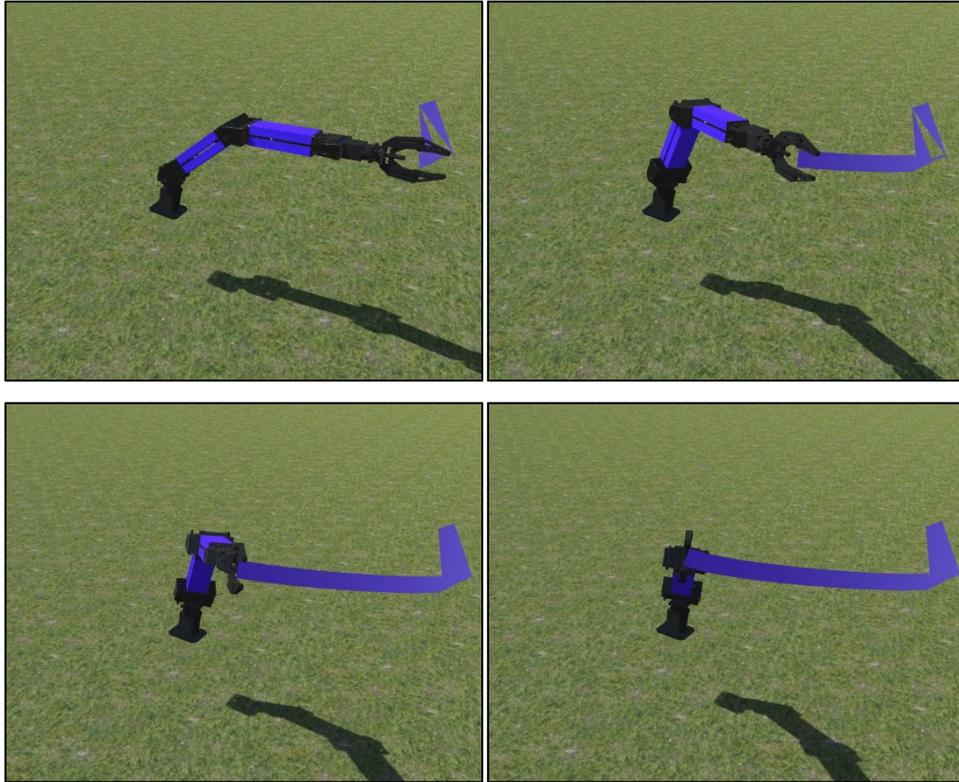


Figura 32-5. Reproducción virtual: Simulación 2 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Las Figuras 33-5 y 34-5 corresponden a los errores de posición y las velocidades de control, respectivamente, observando que los errores convergen a cero y las velocidades que permiten el posicionamiento del manipulador.

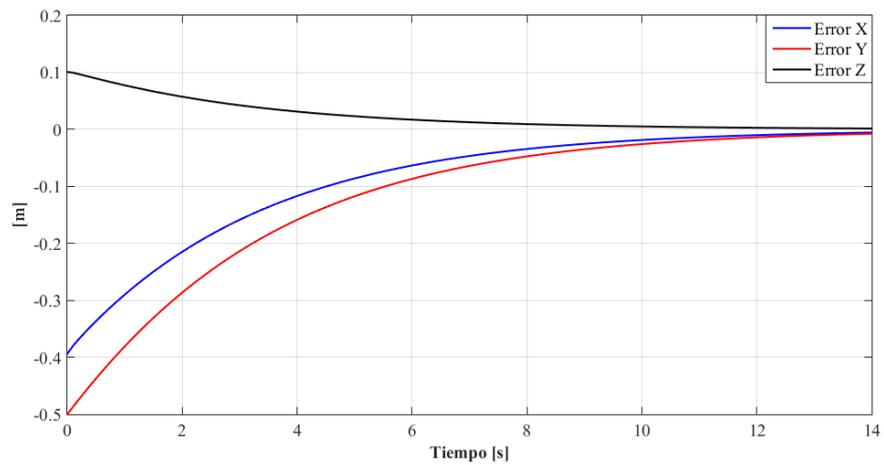


Figura 33-5. Errores de control: Simulación 2 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

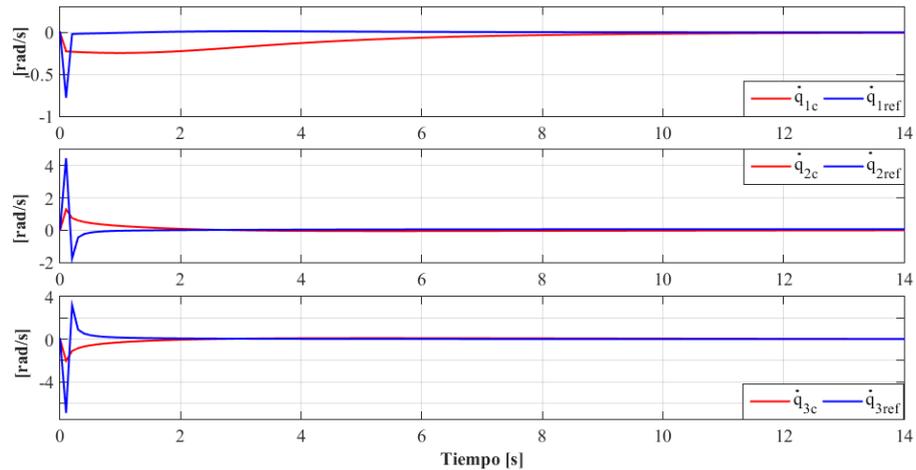


Figura 34-5. Velocidades de control: Simulación 2 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

5.3.2.2 Resultados de Experimentación

El control de posición diseñado es evaluado experimentalmente en el robot manipulador y los datos son reproducidos en Matlab y en el gráficator de Unity para observar de mejor manera los resultados del controlador. Para ello se realizan dos pruebas de experimentación con las mismas posiciones deseadas usadas en las simulaciones.

Experimentación 1

En la primera experimentación, la Figura 35-5 y 36-5 muestran el movimiento estroboscópico del robot y la evolución del seguimiento de trayectoria en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

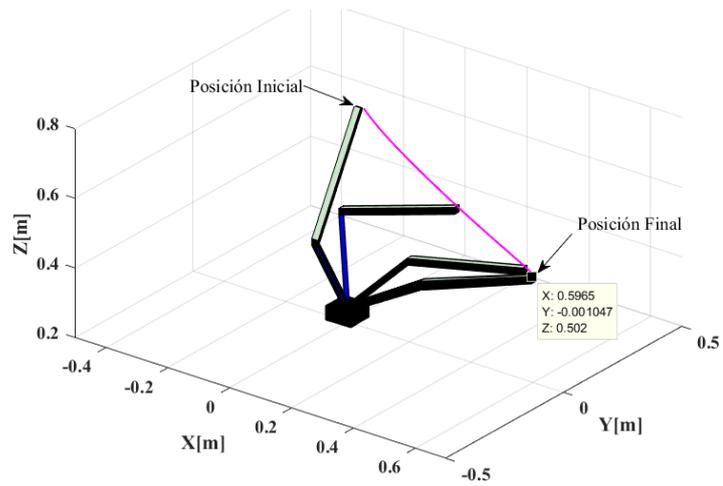


Figura 95-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 1 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

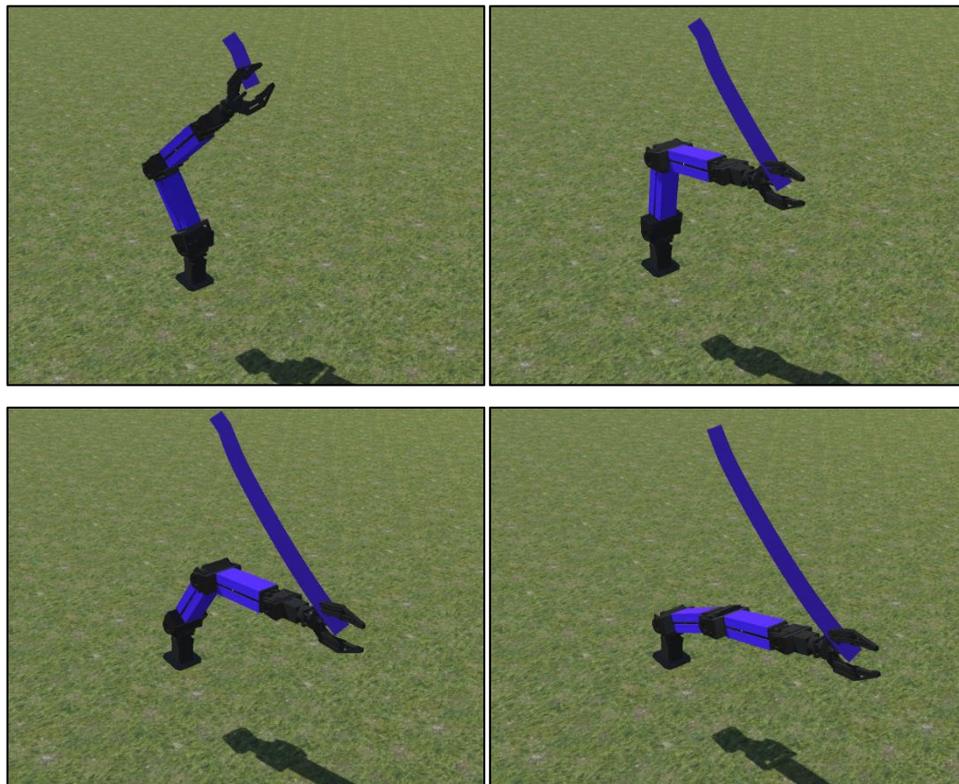


Figura 36-5. Reproducción virtual: Experimentación 1 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figuras 37-5 y 38-5 corresponden a los errores de posición y la velocidades de control, respectivamente, observando que los errores convergen a cero y las velocidades de control tienden a las velocidades reales debido a la acción de la velocidades de referencia generadas en el compensador dinámico.

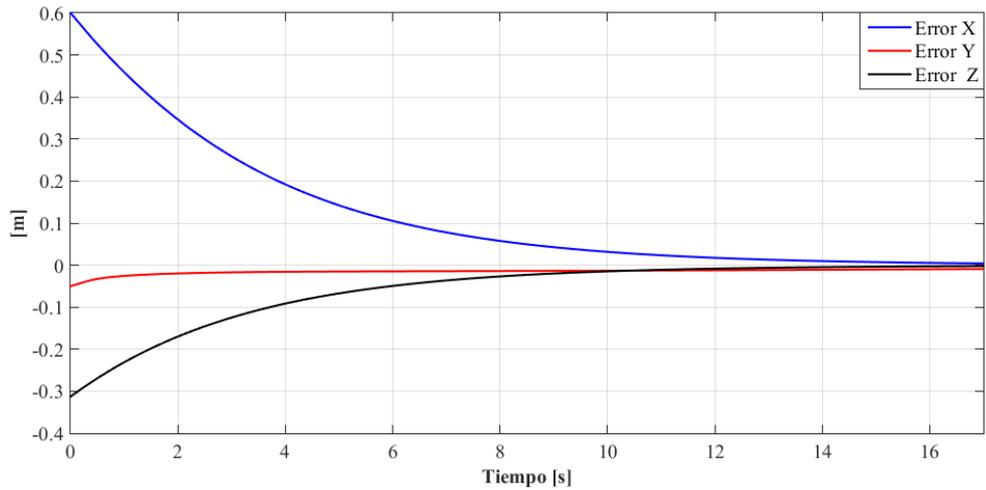


Figura 107-5. Errores de control: Experimentación 1 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

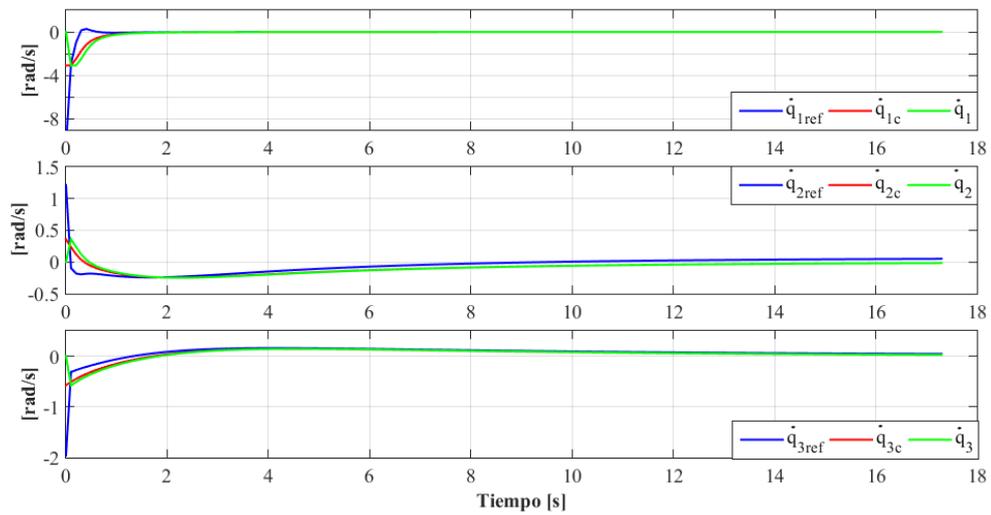


Figura 118-5. Velocidades: Experimentación 1 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Experimentación 2

En la segunda experimentación, la Figura 39-5 y 40-5 muestran el movimiento estroboscópico del robot y la evolución del seguimiento de trayectoria en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

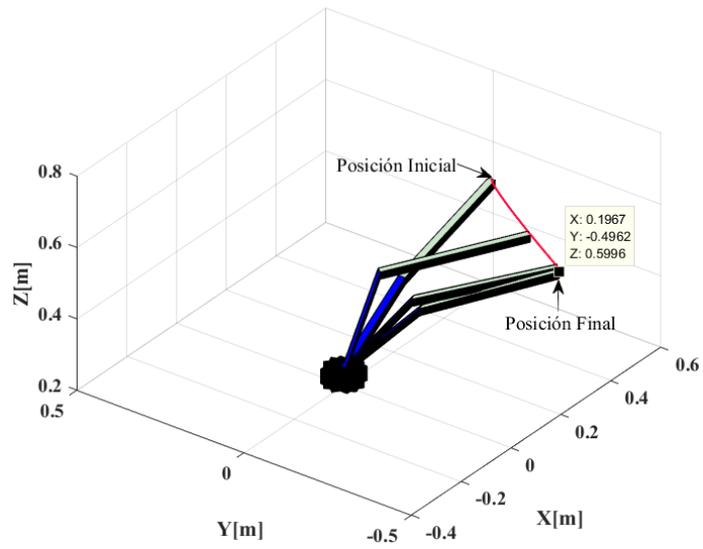


Figura 129-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 2 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

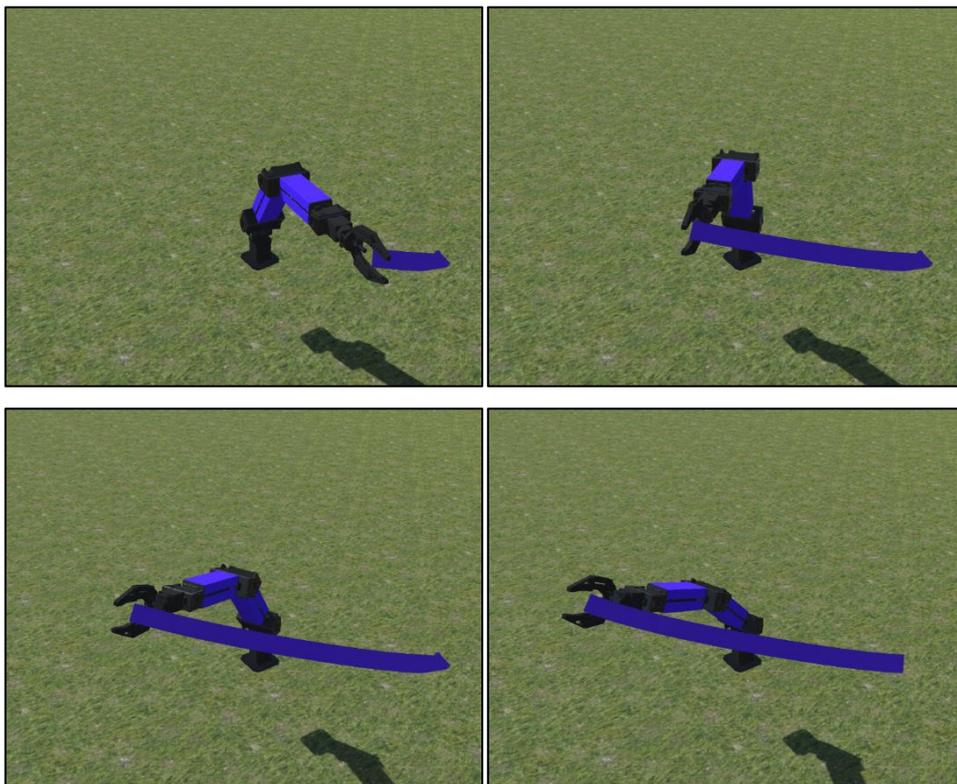


Figura 40-5. Reproducción virtual: Experimentación 2 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figuras 41-5 y 42-5 corresponden a los errores de posición y las velocidades de control, respectivamente, observando que los errores convergen a cero y las velocidades de control tienden a las velocidades reales debido a la acción de las velocidades de referencia generadas en el compensador dinámico.

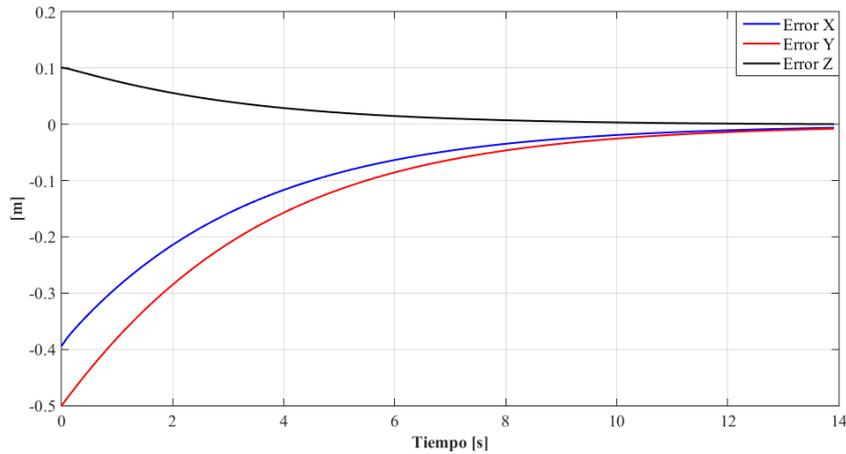


Figura 41-5. Errores de control: Experimentación 2 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

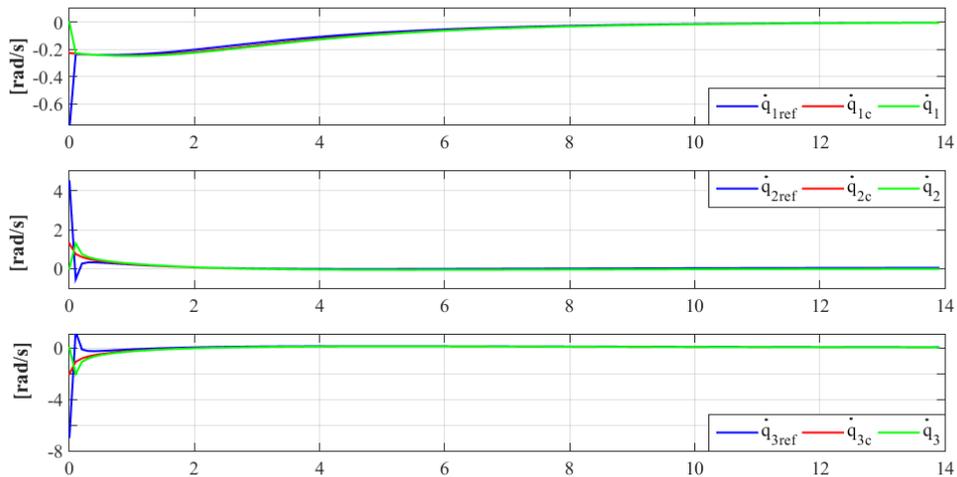


Figura 42-5. Velocidades: Experimentación 2 del posicionamiento de robot manipulador.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

5.3.3 Controlador del Robot Manipulador

5.3.3.1 Resultados de Simulación

El control de seguimiento de trayectoria diseñado es evaluado en un entorno de simulación de Matlab y exportado a un gráficator en Unity para observar de mejor manera los resultados del controlador. Para ello se realizan dos pruebas de simulación, los parámetros de control utilizados son:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.11 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.17 \end{bmatrix}$$

Los parámetros deseados para el control de redundancia son:

$$u_o = 0 \text{ [m/s]}, \omega_o = 0 \text{ [rads/s]}, q_{1o} = -0.698 \text{ [rads]}, q_{2o} = 2.27 \text{ [rads]}, q_{3o} = -1.92 \text{ [rads]}$$

Simulación 1

La trayectoria seguir es una circunferencia de 2 metros de radio con cambios de altura para promover el movimiento del extremo operativo, la Figura 43-5 y 44-5 muestran el movimiento estroboscópico del robot manipulador móvil y la evolución del seguimiento de trayectoria en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

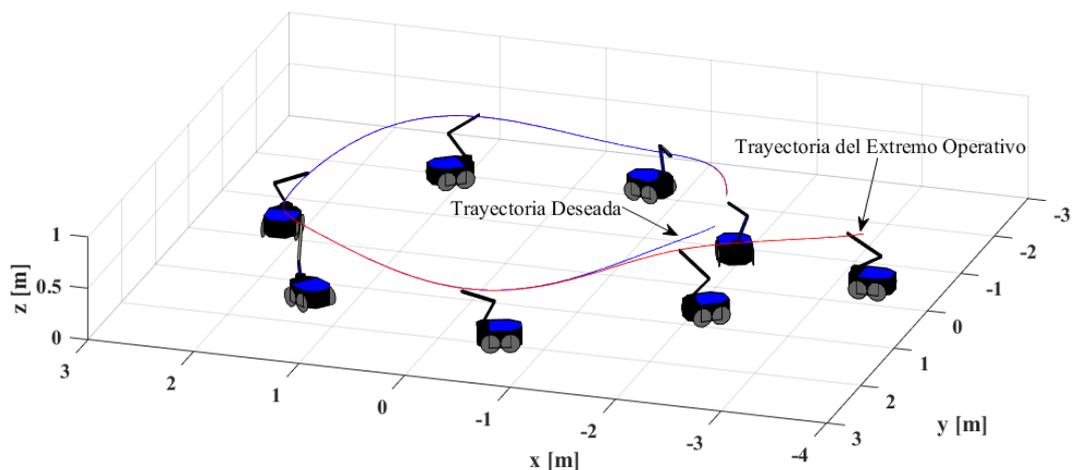


Figura 43-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

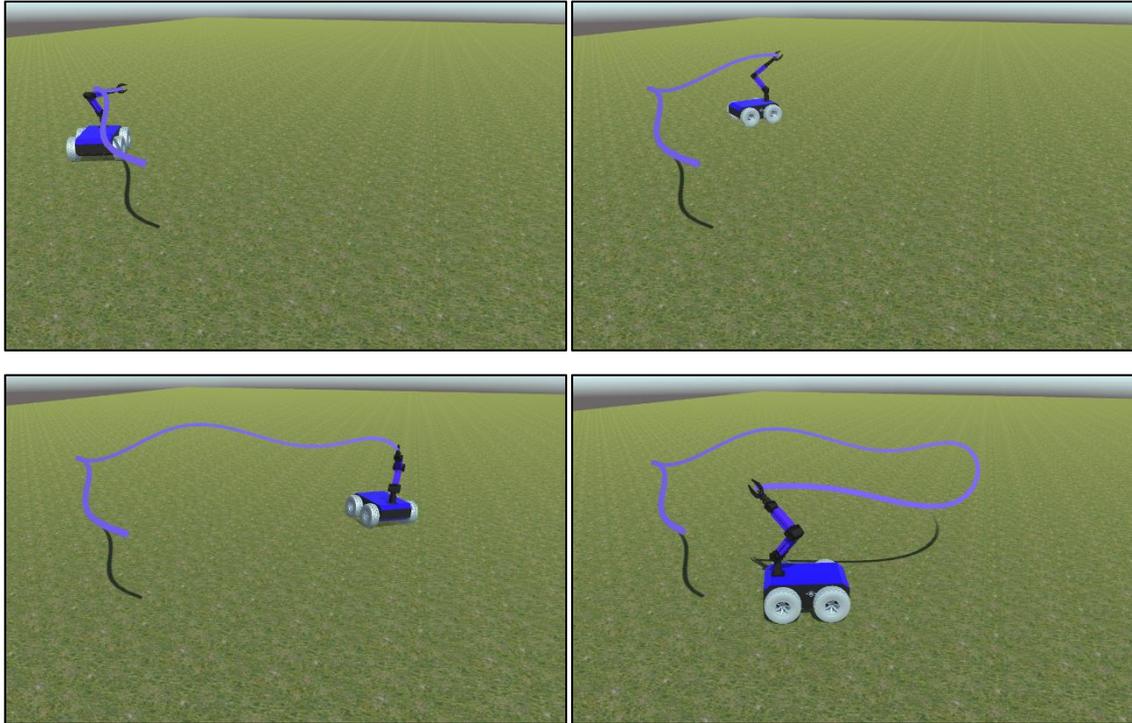


Figura 44-5. Reproducción virtual: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figuras 45-5 y 46-5 corresponden a los errores de seguimiento y las velocidades de control, respectivamente, donde se observa un correcto acercamiento a cero y las velocidades que permiten el seguimiento de la trayectoria.

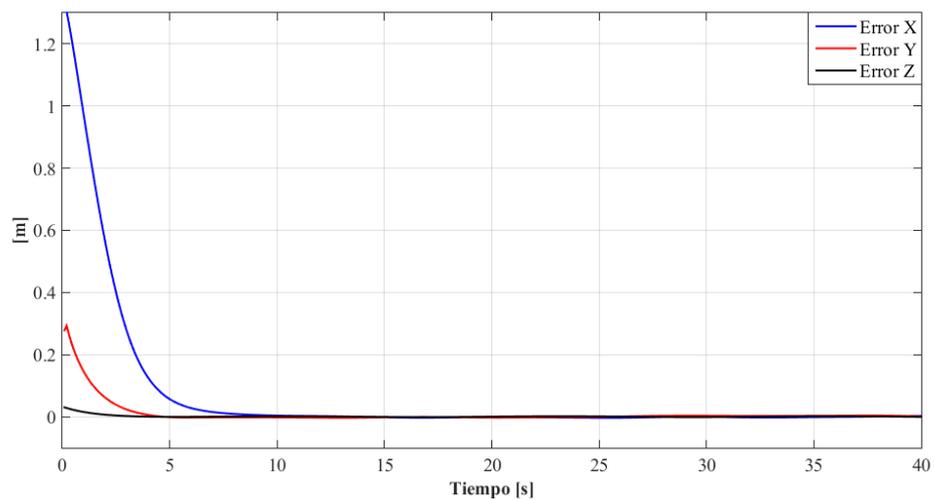


Figura 45-5. Errores de control: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

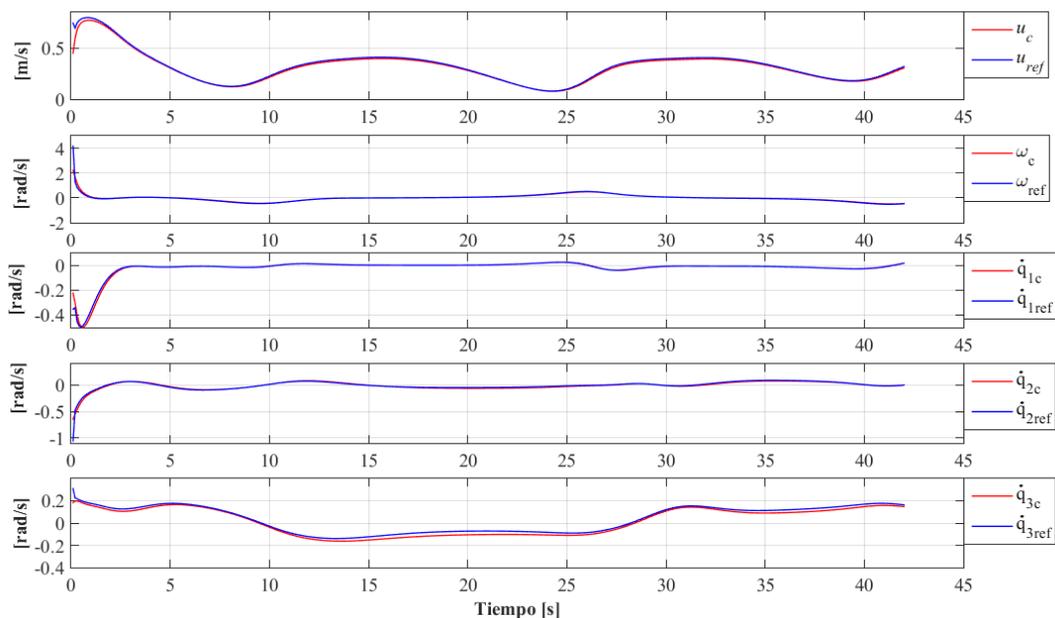


Figura 46-5. Velocidades de control: Simulación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Simulación 2

Esta segunda simulación corresponde al seguimiento de una función seno en el espacio, en las Figuras 47-5 y 48-5 se presenta el movimiento estroboscópico del robot y la evolución del seguimiento de trayectoria en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

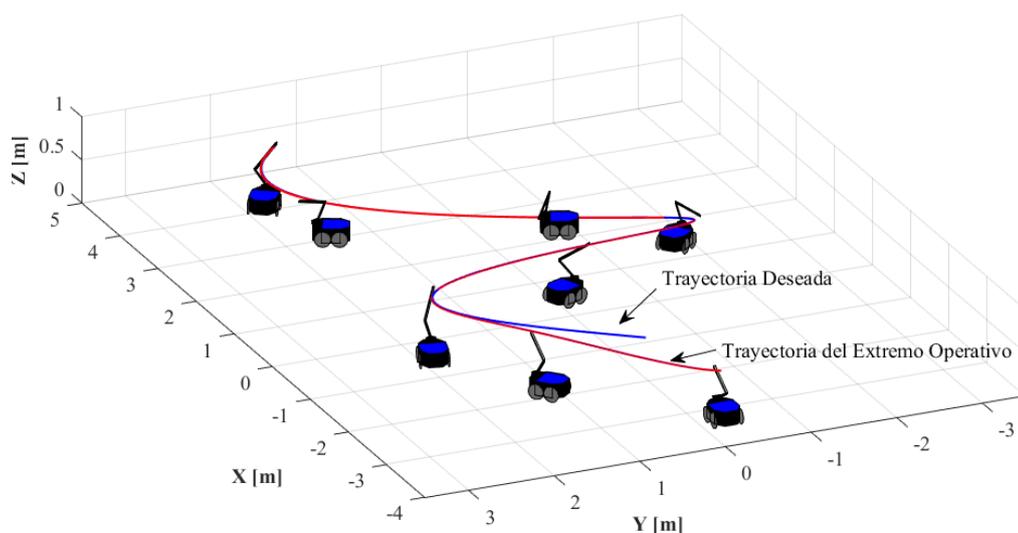


Figura 137-5. Movimiento estroboscópico: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

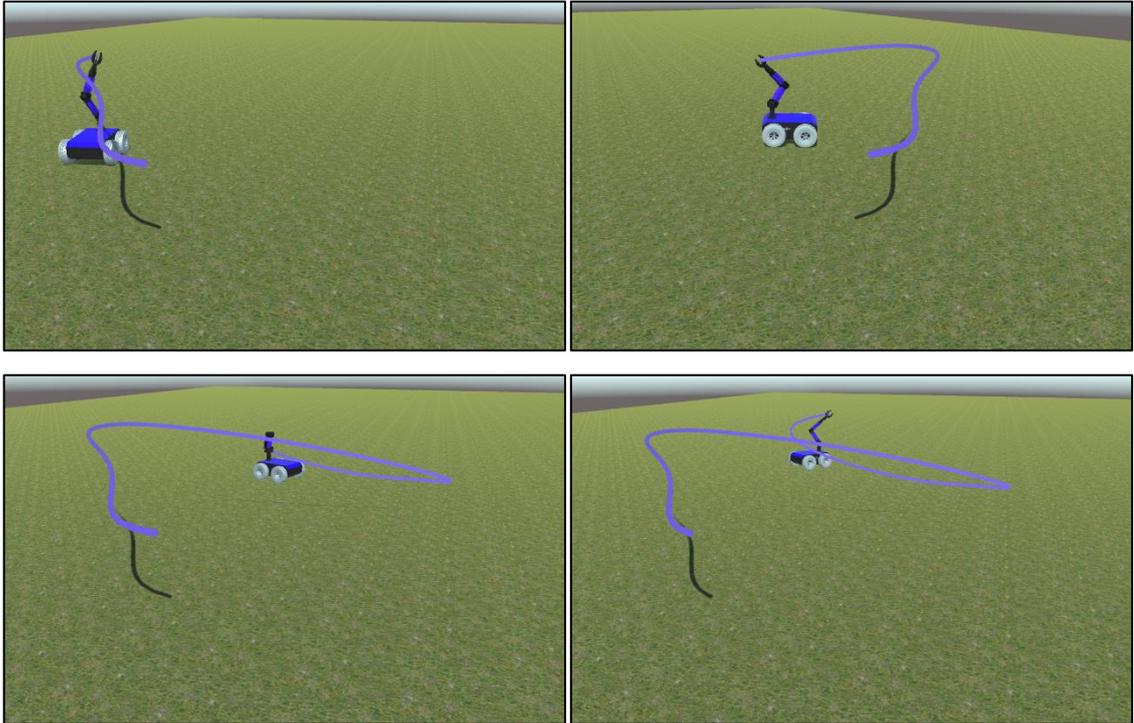


Figura 14-5. Reproducción virtual: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figuras 49-5 y 50-5 corresponden a los errores de seguimiento y las velocidades de control, respectivamente, observando que los errores convergen a cero y las velocidades que permiten el seguimiento de la trayectoria.

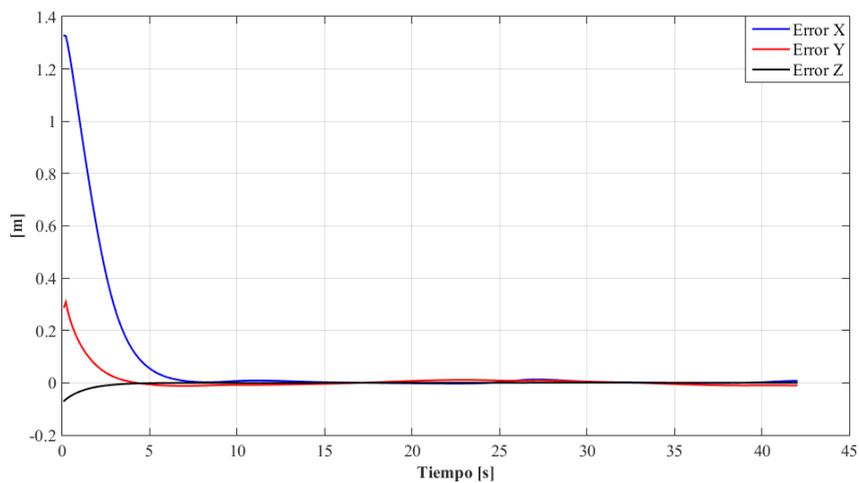


Figura 49-5. Errores de control: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

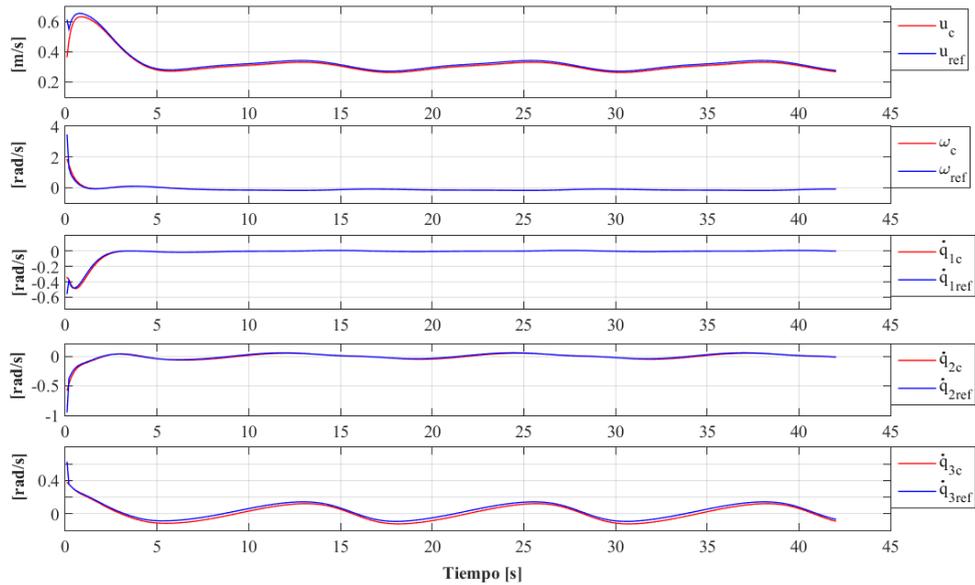


Figura 150-5. Velocidades de control: Simulación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

5.3.3.2 Resultados de Experimentación

El control de seguimiento de trayectoria diseñado para el extremo operativo es evaluado experimentalmente en el manipulador móvil y los datos son reproducidos en Matlab y el gráfico de Unity para observar de mejor manera los resultados del controlador. Para ello se realizan dos pruebas de experimentación con las mismas trayectorias simuladas para este controlador.

Experimentación 1

En la trayectoria circular en el espacio, la Figura 51-5 y 52-5 muestran el movimiento estroboscópico del robot y la evolución del seguimiento de trayectoria en el entorno virtual de Unity, respectivamente.

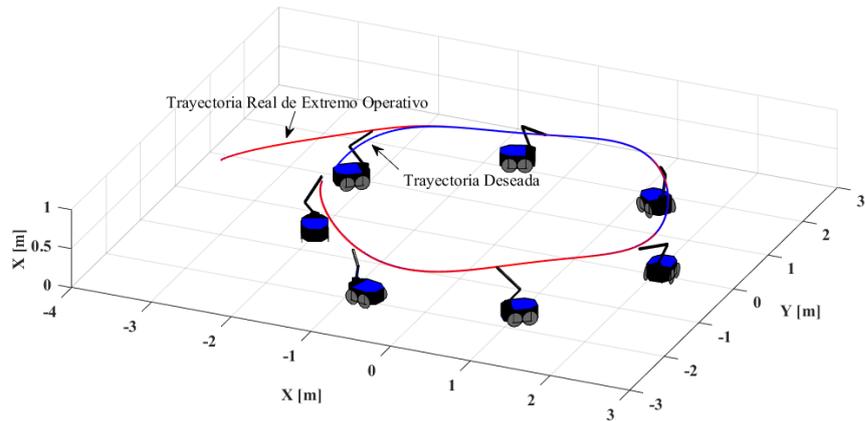


Figura 5116-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

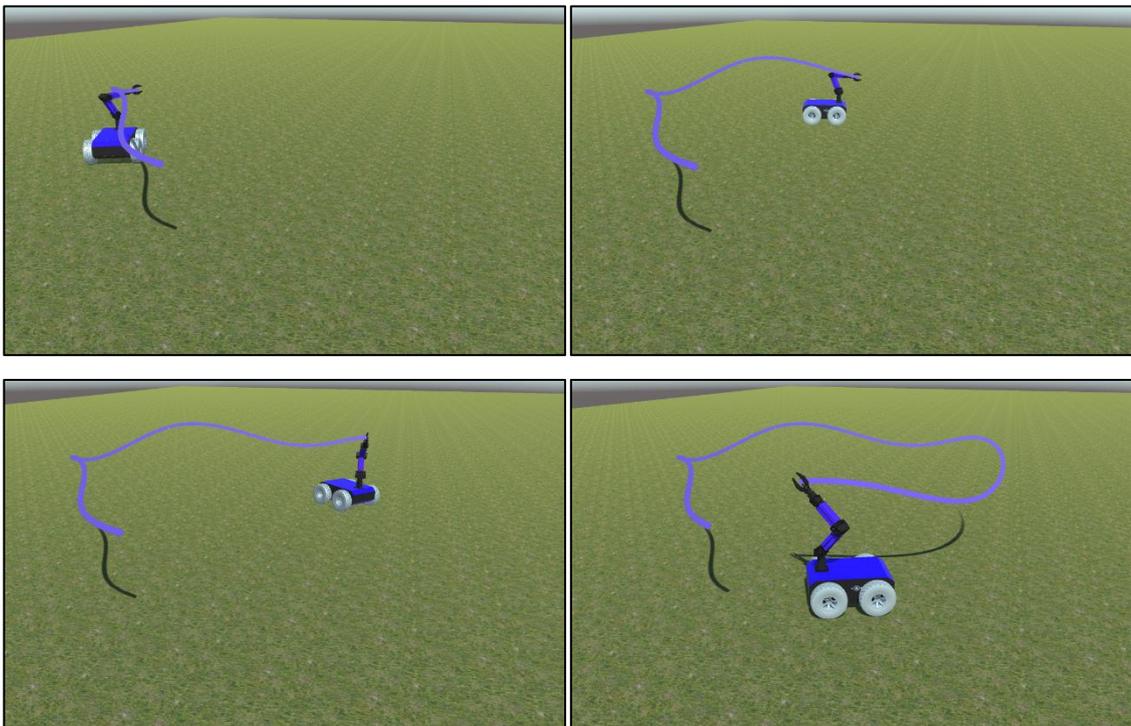


Figura 5217-5. Reproducción virtual: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Las Figuras 53-5 y 54-5 corresponden a los errores de seguimiento y las velocidades de control, respectivamente, observando que los errores en el espacio convergen a cero y las velocidades de control tienden a las velocidades reales debido a la acción de las velocidades de referencia generadas por el compensador dinámico.

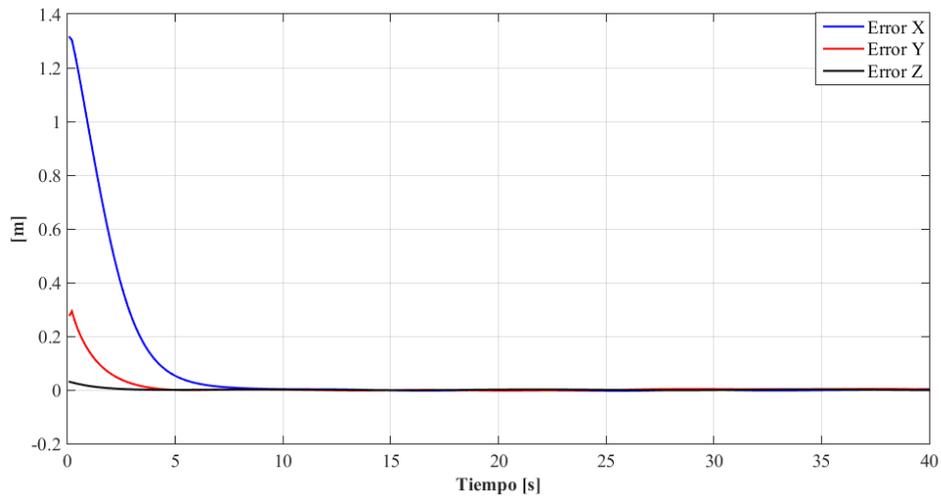


Figura 53-5. Errores de control: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

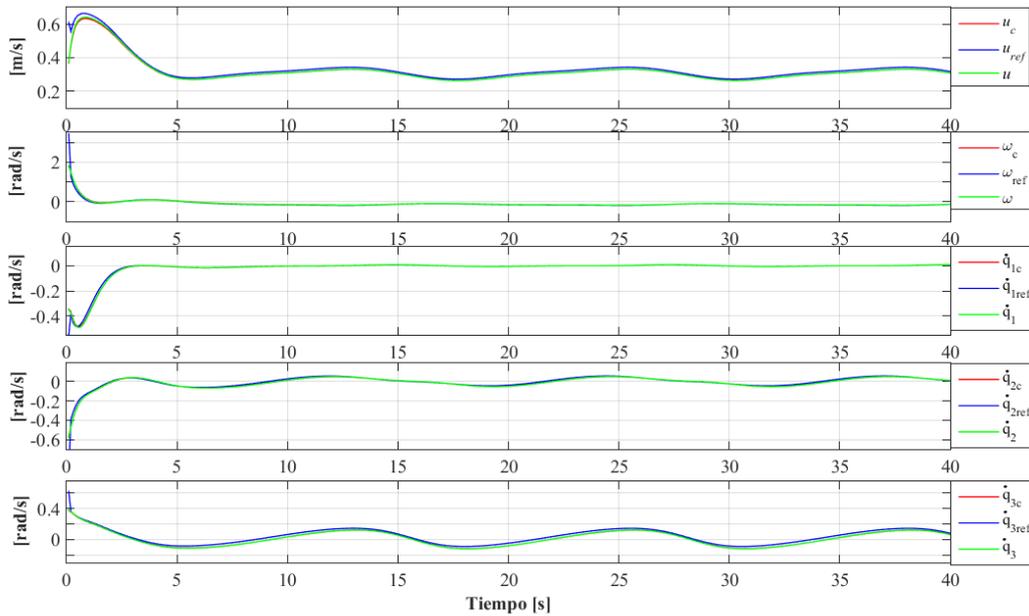


Figura 54-5. Velocidades: Experimentación 1 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Experimentación 2

En la segunda experimentación se observa el movimiento estroboscópico y la evolución del seguimiento en el graficador de unity, según las Figuras 55-5 y 56-5.

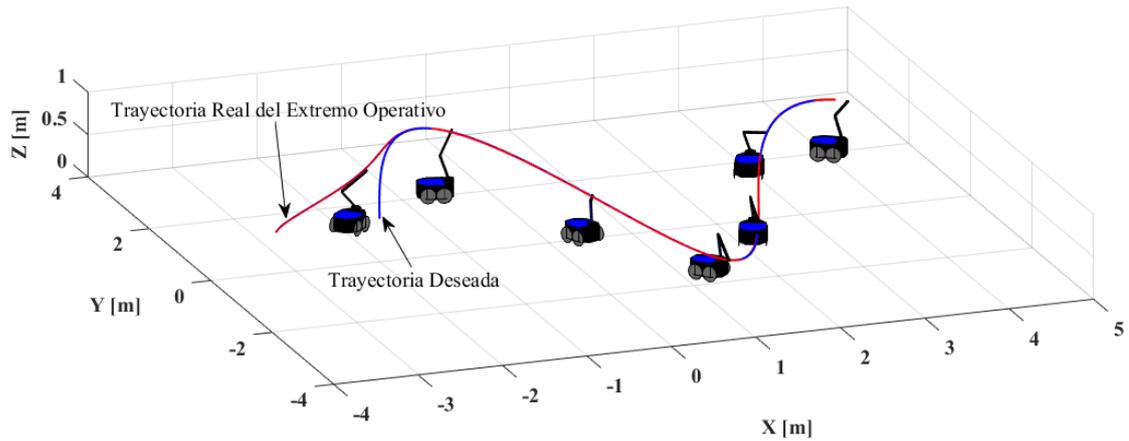


Figura 55-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

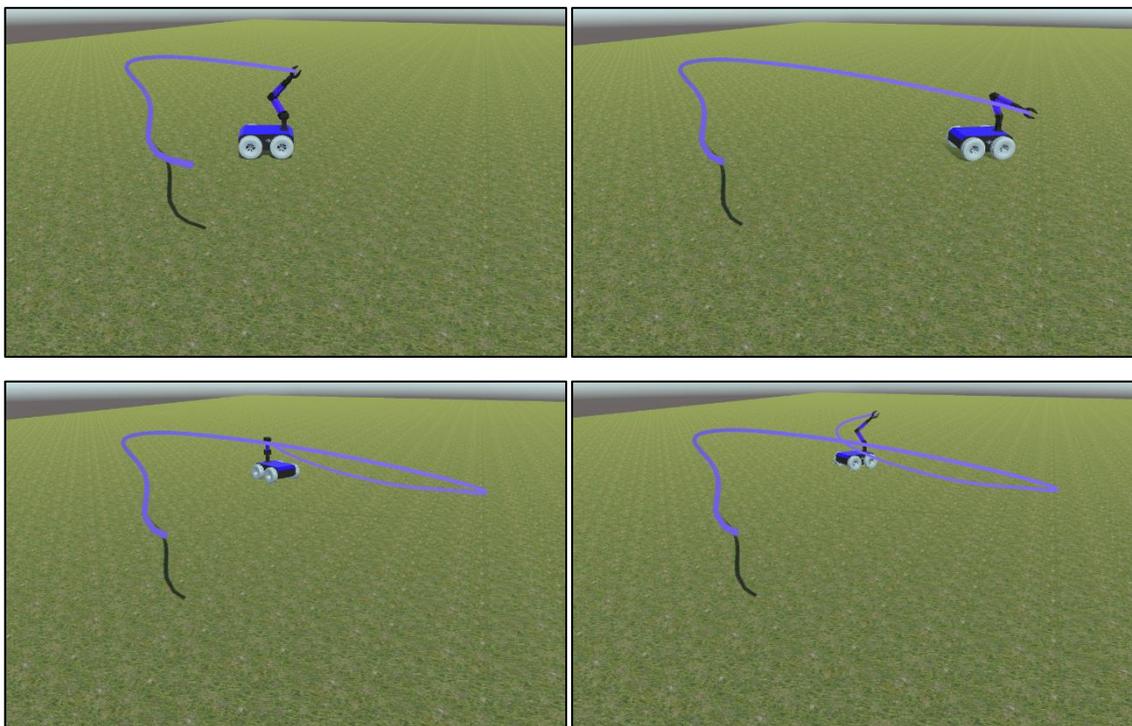


Figura 56-5. Reproducción virtual: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás.

Las Figuras 57-5 y 58-5 corresponden a los errores de seguimiento y las velocidades de control, respectivamente, observando que los errores convergen a cero y las velocidades de control tienden a las velocidades reales debido a la acción de las velocidades de referencia generadas en el compensador dinámico.

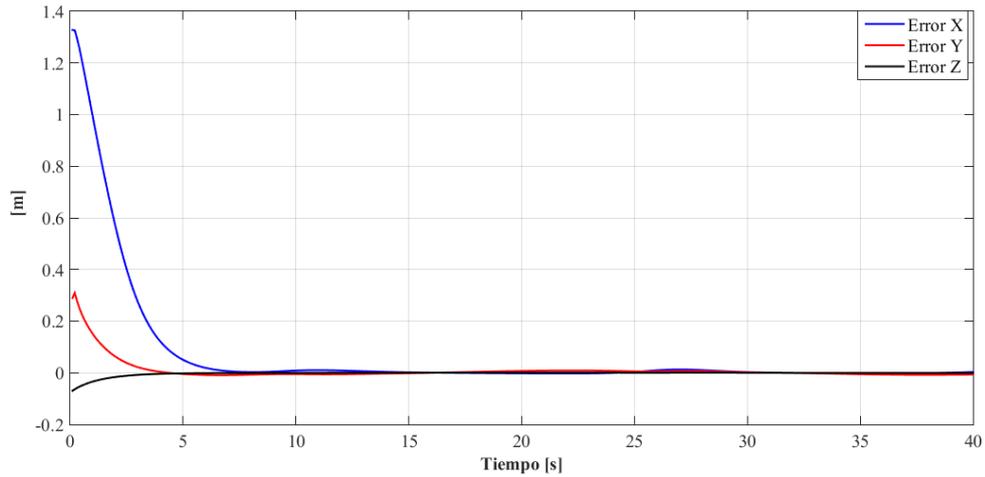


Figura 187-5. Errores de control: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria del robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

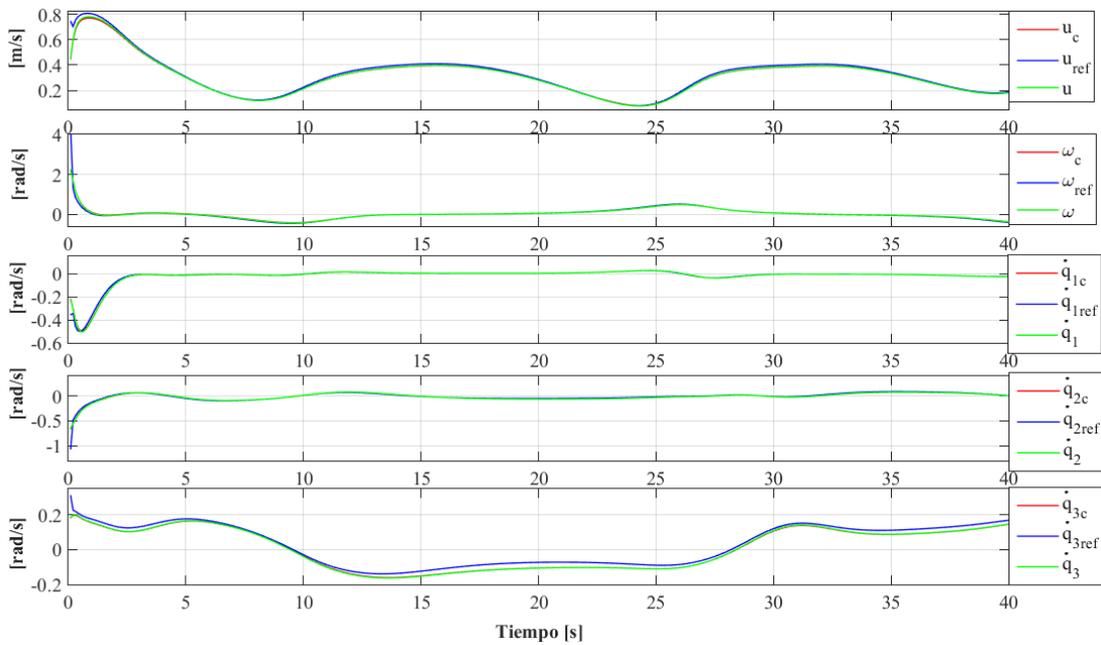


Figura 198-5. Velocidades: Experimentación 2 del seguimiento de trayectoria de robot manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

5.3.4 Resultados de Tele-operación

Para la tele-operación del robot manipulador móvil se realizan pruebas experimentales que indiquen el correcto funcionamiento de esquema de tele-operación bilateral del robot. Ver fotos en el Anexo C.

Experimentación 1

Para la primera prueba de tele-operación se realiza el a siguiente secuencia: Control del manipulador móvil por un periodo de 33 segundos, control del robot móvil hasta el ínstate 52, luego se controla la postura del manipulador hasta los 68 segundos y nuevamente el control del manipulador móvil. En las Figuras 59-5 y 60-5 se observa el movimiento estroboscópico y la evolución de la tele-operación en el gráficoador de unity.

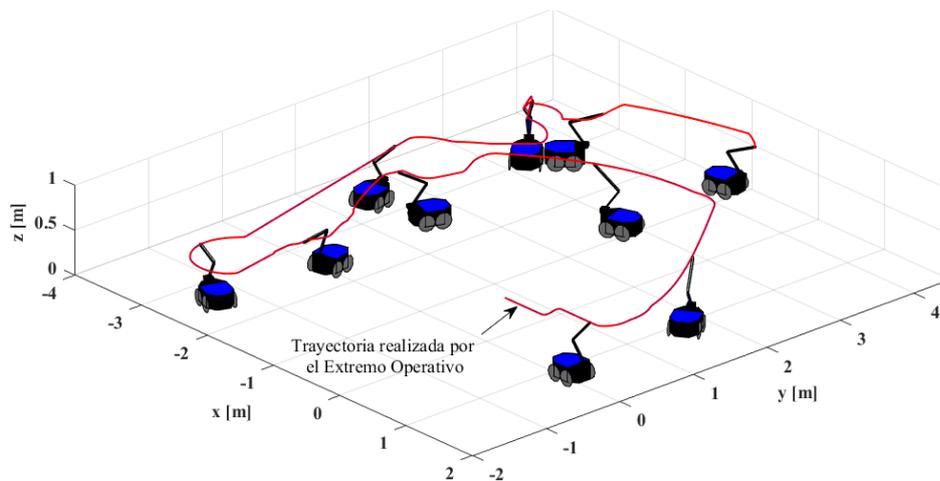


Figura 209-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figura 61-5 muestra el seguimiento de las velocidades en el extremo operativo cuando el operador lo requiere, aquí se observa un mínimo error en el seguimiento de velocidad del manipulador móvil.

La Figura 62-5 muestra el seguimiento de velocidades de robot móvil cuando únicamente se requiere movimiento en la plataforma móvil, se observa un correcto funcionamiento en controlador de seguimiento de velocidad del robot móvil.

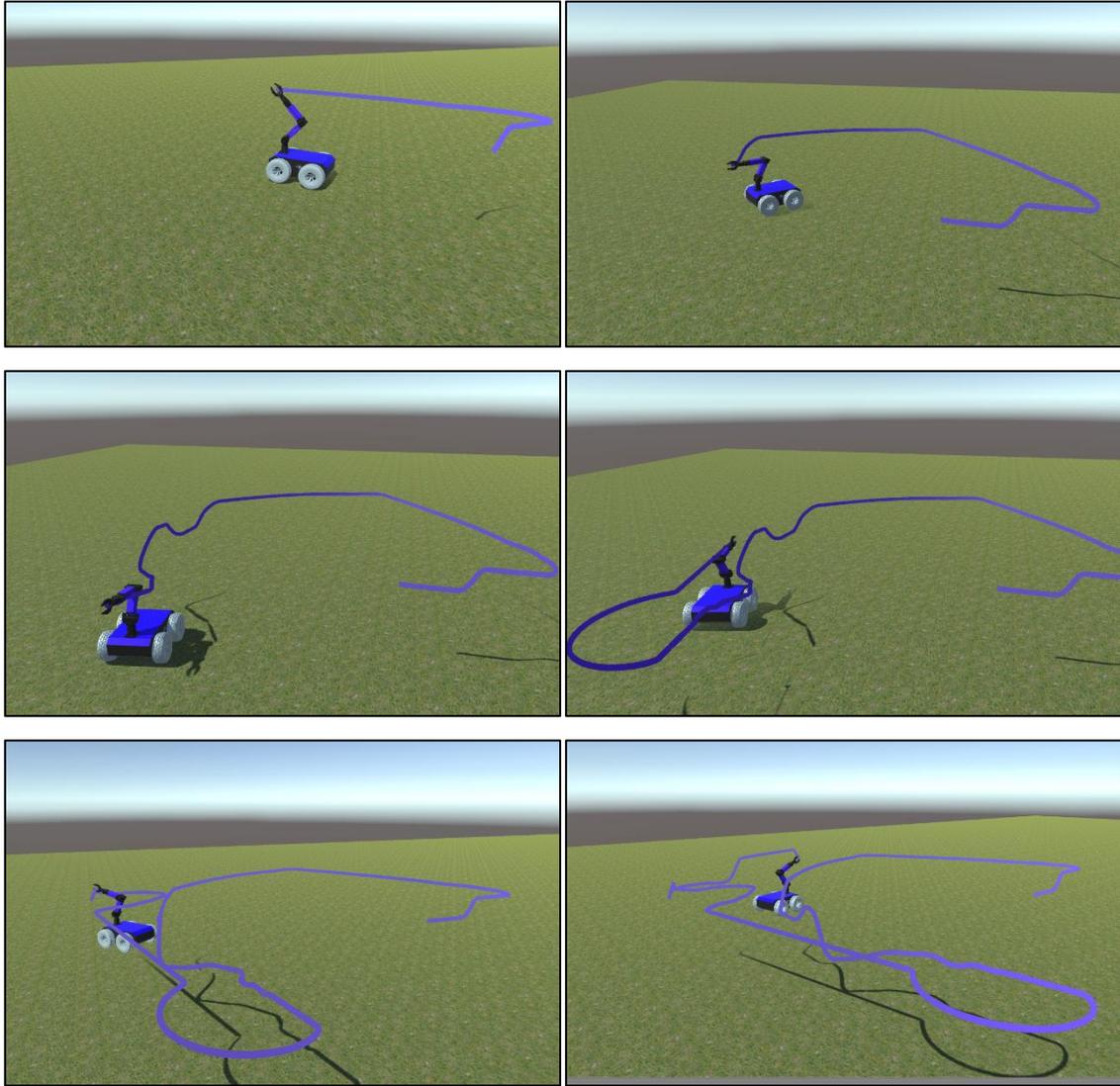


Figura 60-5. Reproducción virtual: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.
Realizado por: José Luis Varela Aldás.

La Figura 63-5 presenta la corrección de errores de posición en el manipulador cuando el operador requiere una posición específica, se puede determinar que los errores convergen a cero continuamente.

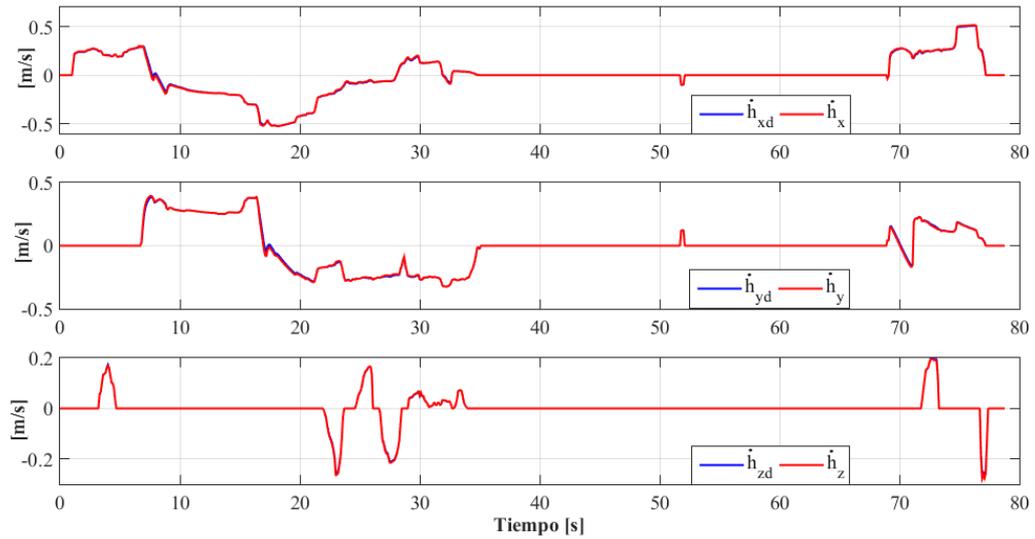


Figura 6121-5. Velocidades en el extremo operativo: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

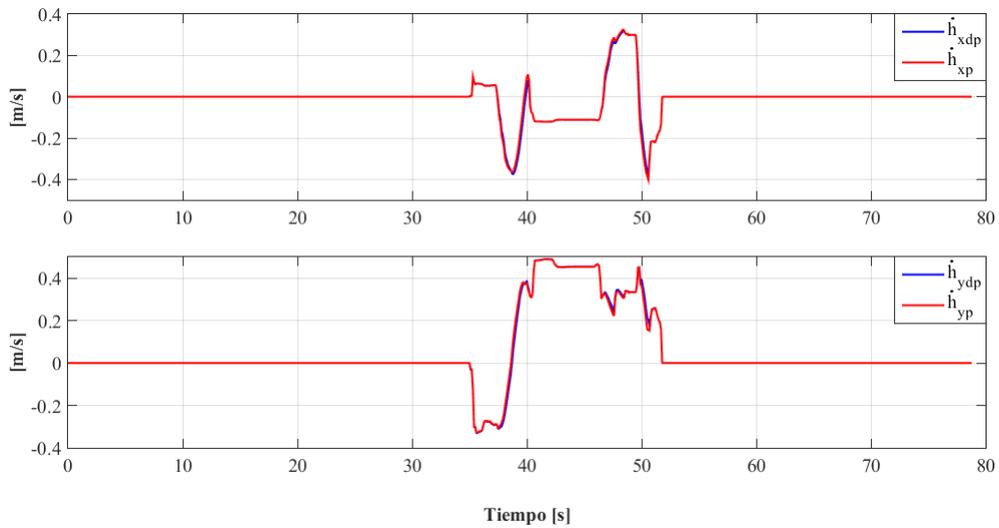


Figura 6222-5. Velocidades en el robot móvil: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás.

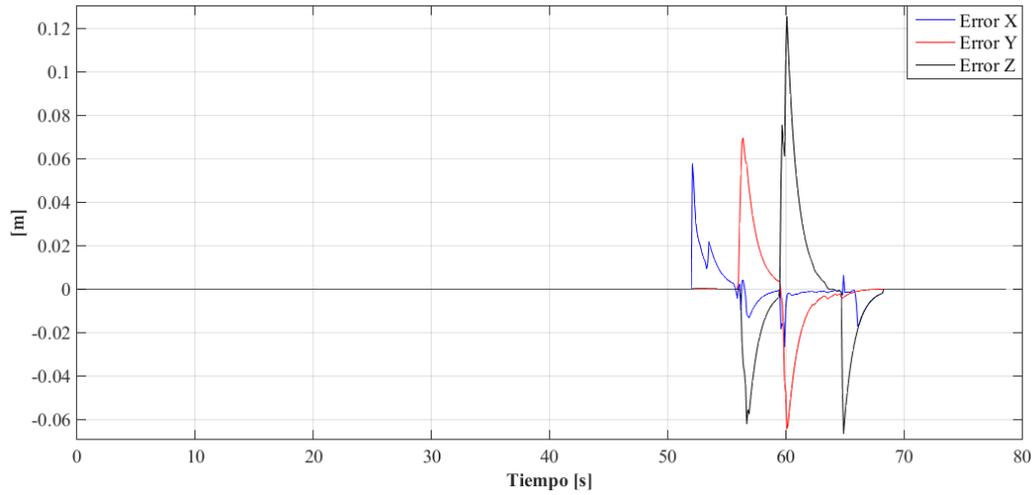


Figura 63-5. Errores del control de posición: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figura 64-5 muestra las velocidades del robot en el experimento de tele-operación, donde se observa que las velocidades de control están superpuestas sobre las velocidades reales garantizando un correcto funcionamiento del compensador dinámico.

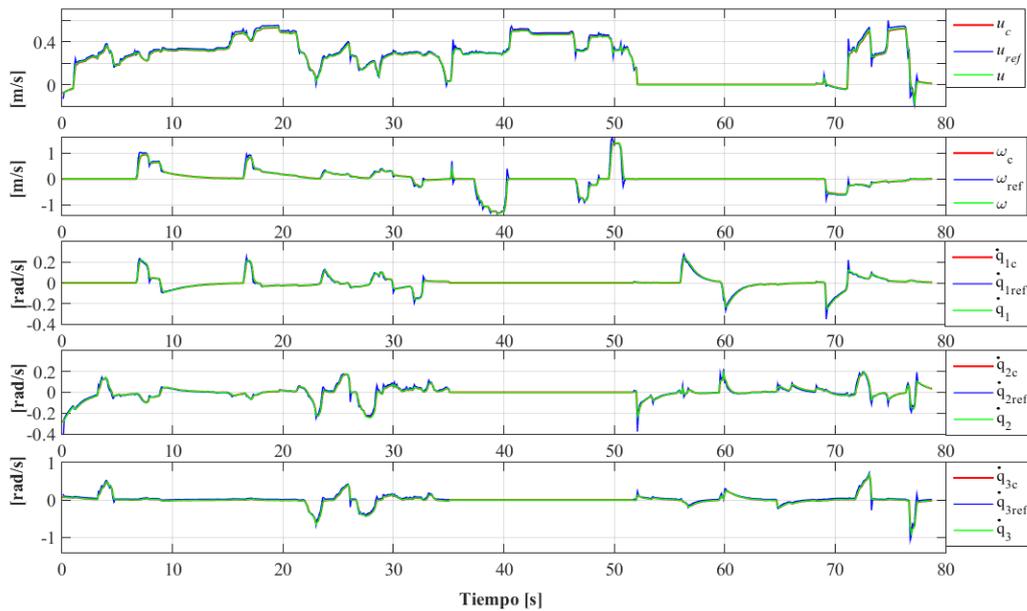


Figura 6423-5. Velocidades de reales y de control: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

Además, la Figura 65-5 presenta los retardos de tele-operación generados en el experimento 1, demostrando que se encuentran alrededor de 0.1 segundos, este valor garantiza un mínimo retardo en la respuesta de controlador.

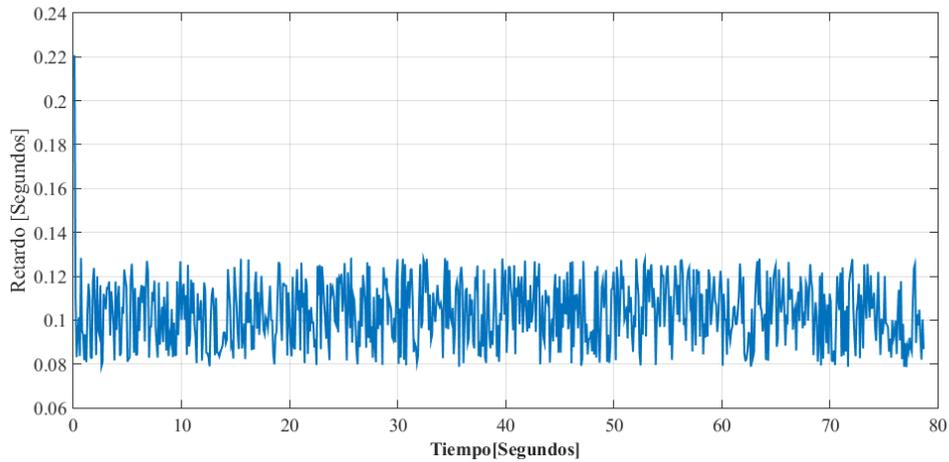


Figura 245-5. Retardos de comunicación y procesamiento: Experimentación 1 de la tele-operación del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás.

Experimento 2

En este experimento se presenta la evasión de obstáculos producida por fuerzas ficticias calculadas a partir de las medidas de distancia del sensor laser. La distancia a partir de la cual se empieza evitar el obstáculo es de 3 [m] y las constantes de ganancia $K_F = 1$, $K_{\omega} = 1.5$ y $K_{\omega\omega} = 2.5$. Las Figuras 5.66 y 5.67 muestran el movimiento estroboscópico del robot y la evolución de la tele-operación en el entorno virtual de Unity, respectivamente. Aquí se observa como el manipulador móvil evita los obstáculos correctamente respondiendo al control de redundancia y la retroalimentación de fuerzas en el sitio local.

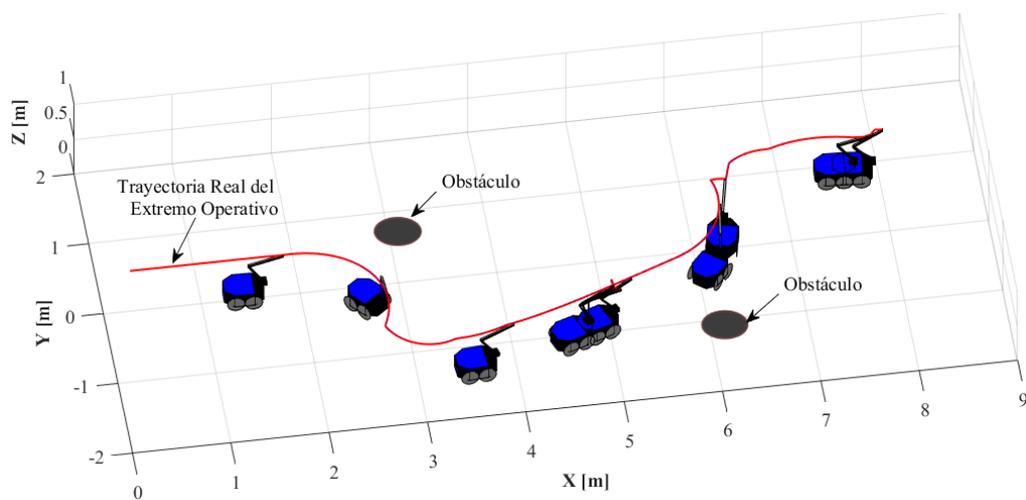


Figura 66-5. Movimiento estroboscópico: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil

Realizado por: José Luis Varela Aldás

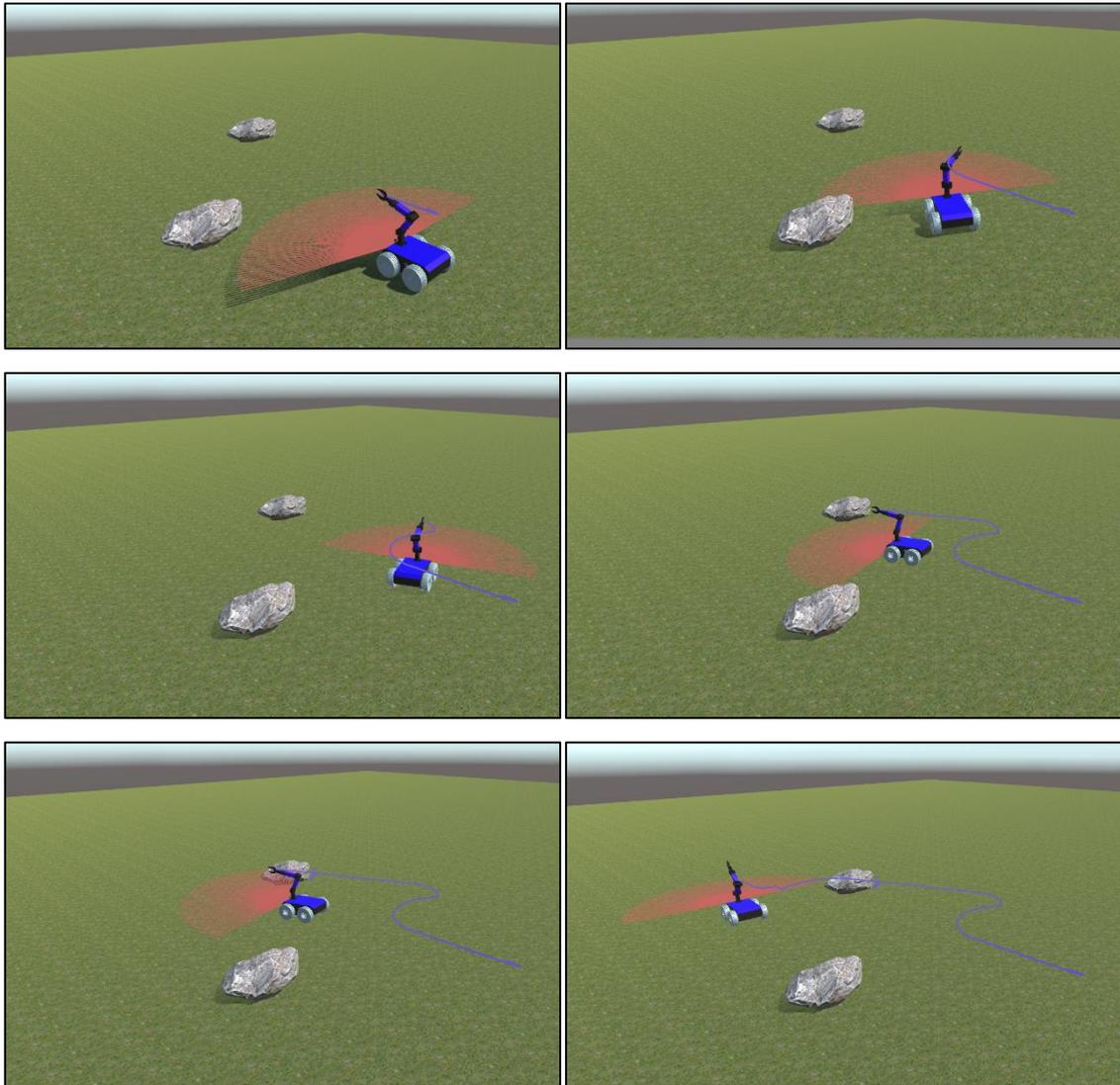


Figura 67-5. Reproducción virtual: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.
Realizado por: José Luis Varela Aldás.

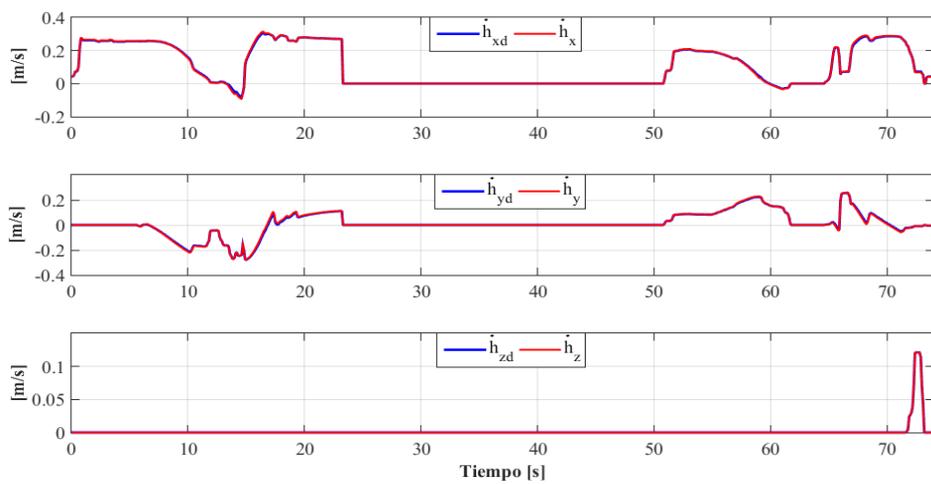


Figura 258-5. Velocidades en el extremo operativo: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.
Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figura 68-5 muestra el seguimiento de las velocidades en el extremo operativo cuando el operador lo requiere, indicando un correcto seguimiento ya que las velocidades reales tienden a las velocidades deseadas.

Así mismo, el operador realiza maniobras para posicionar únicamente el manipulador, en la Figura 69-5 se presenta la corrección de errores de posición en el manipulador cuando el operador requiere una posición específica.

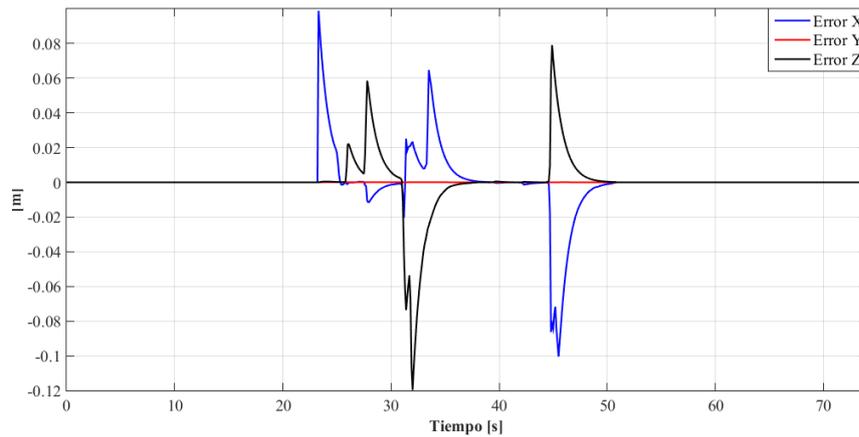


Figura 269-5. Errores del control de posición: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás.

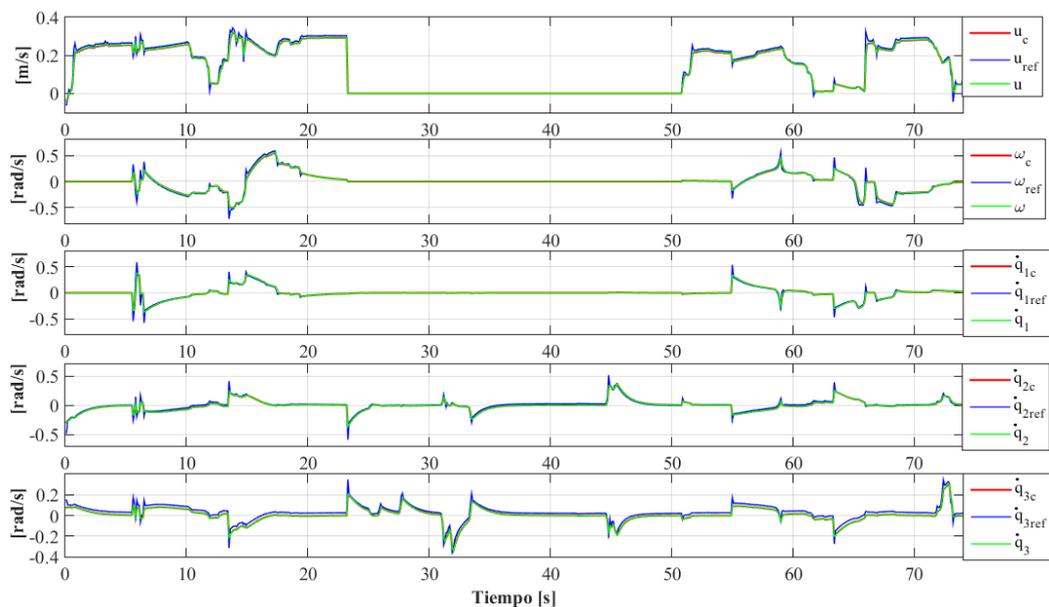


Figura 70-5. Velocidades reales y de control: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

La Figura 70-5 muestra las velocidades del robot en el experimento de tele-operación, donde se observa que las velocidades de control están superpuestas sobre las velocidades reales garantizando un correcto funcionamiento del compensador dinámico.

Finalmente, la Figura 71-5 muestra las fuerzas ficticias producidas para alterar el control de redundancia (evasión del obstáculo) y la retro-alimentación de fuerzas (bilateral) en el dispositivo háptico (Falcon Novint).

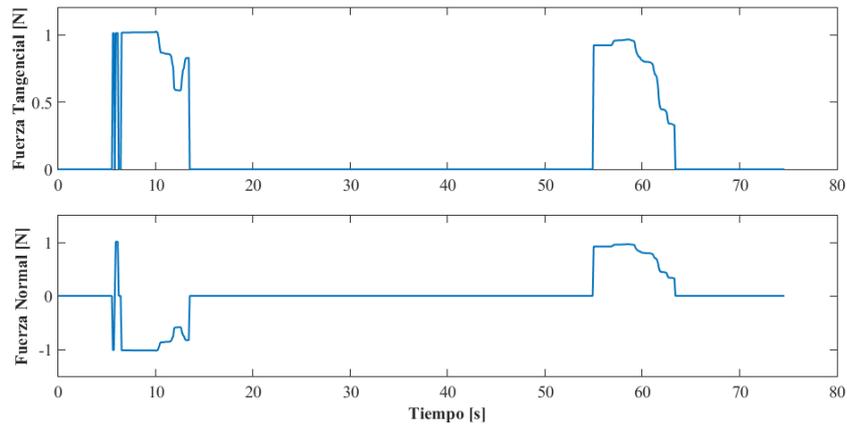


Figura 71-5. Fuerzas ficticias: Experimentación 2 de la tele-operación del manipulador móvil.

Realizado por: José Luis Varela Aldás

CAPÍTULO VI

6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones

- Los sistemas bilaterales de tele-operación comúnmente tienen algún tipo de retroalimentación de fuerzas, generadas por alguna perturbación o cambio importante que se ha producido en el sitio remoto, esto permite al operador percatarse de datos no proporcionado por el video en tiempo real y tomar decisiones para corregir el proceso de la tele-operación.
- El modelo cinemático describe los movimientos de robot en estudio, en el que se considera las velocidades y posición del sistema. Por lo que el modelo cinemático es útil para el diseño de algoritmos de control que permiten realizar tareas de seguimiento de trayectoria o control de posición.
- El modelo dinámico de un robot manipulador móvil permite describir los efectos de la gravedad, fuerzas y torques en las respuestas de velocidad del robot, es decir, los grados de libertad de un robot no siempre alcanzan las velocidades de entrada debido a los efectos de su dinámica. Por lo cual un modelo dinámico validado experimentalmente permite diseñar un compensador que corrige las velocidades de entrada del sistema de control.
- Los controladores diseñados para la tele-operación del manipulador móvil permiten al operador, comandar mediante velocidades el extremo operativo, todo el robot o de manera independiente la plataforma móvil y el brazo robótico, realizando las tareas de tele-operación con un único dispositivo de control.
- Los controladores propuestos para el esquema de tele-operación garantizan su estabilidad mediante el criterio de Lyapunov, demostrando que los errores de posición

(control cinemático) y velocidad (compensador dinámico) convergen a cero cuando el tiempo tiende al infinito.

- El control de redundancia implementado en el esquema de tele-operación aprovecha los grados de libertad extra permitiendo fijar la configuración interna del robot manipulador móvil cuando este realiza sus tareas de seguimiento de velocidad y modifica su ruta de movimiento al presentarse fuerzas ficticias, evitando la colisión del robot con obstáculos. Estas fuerzas ficticias son reproducidas por el dispositivo háptico (Falcon Novint) en el sitio local, ayudando al operado humano a reaccionar en la posibilidad de alguna colisión.
- Los resultados experimentales obtenidos indican un adecuado funcionamiento del esquema de tele-operación bilateral propuesto, debido a que las señales generadas por el operador humano son correctamente seguidas por el robot manipulador móvil, con un retardo en la comunicación despreciable y errores de control muy cercanos a cero.
-

6.2 Recomendaciones

- Para trabajos futuros, es recomendable analizar el material obtenido en este trabajo de titulación, para determinar el estado de nuestro país en relación a los avances tecnológicos del campo de la robótica de los países líderes del desarrollo industrial.
- Este trabajo puede ser utilizado como base para otros proyectos de investigación que incluya nuevos sensores de retroalimentación, como un sistema de posicionamiento global u otros.
- Las constantes usadas para validar los modelos dinámicos de este robot manipulador móvil pueden diferir cuando se realizan cambios significativos en su estructura física, por lo que es necesario un análisis dinámico previo a cualquier modificación importante.
- Revisar el nivel de las baterías del robot Akasha antes de realizar pruebas de funcionamiento debido a que podría ocasionar daños permanentes en el sistema eléctrico o arruinar las baterías.

BIBLIOGRAFÍA

- ANDALUZ, V., ORTIZ, J., PEREZ, M., ROBERTI, F., & CARELLI, R.** (2014). *Adaptive cooperative control of multi-mobile manipulators*. Industrial Electronics Society, 40th Annual Conference of the IEEE, 2669 - 2675.
- ANG, Q.-Z., HORAN, B., & NAHAVANDI, S.** (2013). *Multipoint Haptic Mediator Interface for Robotic Teleoperation*. Systems Journal, IEEE (Volume:9 , Issue: 1), 86 - 97.
- B. BAYLE, J. Y.** (2003). *Kinematic modelling of wheeled mobile manipulators*. Robotics and Automation, 69-74.
- BATURONE, A. O.** (2001). *ROBÓTICA, Manipuladores y robots móviles*. Barcelona: MARCOMBO S.A.
- FAREH, R., & RABIE, T.** (2015). *Tracking trajectory for nonholonomic mobile manipulator using distributed control strategy*. Mechatronics and its Applications (ISMA), 1-6.
- FROM, P. J., GRAVDAHL, J. T., & PETTERSEN, K. Y.** (2014). *Vehicle-Manipulator System*. Londres: Springer.
- HERDOCIA, A., SHADEMAN, A., & JAGERSAND, M.** (2012). *Unimodal asymmetric interface for teleoperation of mobile manipulators: A user study* . Intelligent Robots and Systems (IROS), 5214 - 5219.

- JAE-YOUNG LEE, S. P.** (2015). *Haptic Teleoperation Systems*. Suiza: Springer.
- KOT, T., KRYS, V., MOSTYN, V., & NOVAK, P.** (2014). *Control system of a mobile robot manipulator*. Control Conference (ICCC), 15th International Carpathian , 258 - 263 .
- L. SCIAVICCO, B. S.** (2000). *Modelling and Control of Robot Manipulators*. London: McSpringe-Verlag.
- LANINI, J., TSUJI, T., WOLF, P., RIENER, R., & NOVAK, D.** (2015). *Teleoperation of two six-degree-of-freedom arm rehabilitation exoskeletons*. Rehabilitation Robotics (ICORR), 514 - 519.
- LEE, D. G., CHO, G. R., LEE, M. S., KIM, B.-S., OH, S., & SON, H. I.** (2013). *Human-centered evaluation of multi-user teleoperation for mobile manipulator in unmanned offshore plants*. Intelligent Robots and Systems (IROS), 5431 - 5438.
- LEWIS, R. F.** (1998). Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. IEEE Transactions on Neural Networks, 415-421.
- LI, Z., SU, C.-Y., & XIA, Y.** (2015). *Intelligent Networked Teleoperation Control*. Berlin: Springer.
- MIHELJ, M., & PODOBNIK, J.** (2012). *Haptics for Virtual Reality and Teleoperation*. Londres : Springer.

NAHAVANDI, S., MULLINS, J., FIELDING, M., ABDI, H., & NAJDOVSKI, Z. (2015). *Countering Improvised Explosive Devices through a multi-point haptic teleoperation system*. *Systems Engineering (ISSE)*, 190-197.

ORTIZ, J., ANDALUZ, V. H., PEREZ, G., & MORALES, J. (2015). *Tele-Operación Bilateral de Manipuladores Móviles*. *Revista Politécnica*.

PORTALESO.COM. (01 de Abril de 2016). *Control y Robótica*. Obtenido de http://www.portaleso.com/usuarios/Toni/web_robot_3/robot_indice.html#tipos

ROBOTICS, K. (14 de Marzo de 2016). *KUKA*. Obtenido de <http://www.kuka-robotics.com>

SECCHI, H. A. (2008). *Una introducción a los robots móviles*. Buenos Aires: AADECA.

SEMPLADES. (2013). *Plan Nacional del Buen Vivir 2013-2017*. Quito.

XIANGHUA CHU, F. H., STOLL, N., KLOS, M., & THUROW, K. (2015). *Application of dual-arm robot in biomedical analysis: Sample preparation and transport*. *Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC)*, 500-504.

ZHAO, Y., WOO, C., & LEE, J. (2015). *Balancing control of mobile manipulator with sliding mode controller*. *Control, Automation and Systems (ICCAS)*, 802-805.

ANEXOS

ANEXO A: Especificaciones del sensor laser URG-04LX-UG01

1. General

URG-04LX-UG01 is a laser sensor for area scanning. The light source of the sensor is infrared laser of wavelength 785nm with laser class 1 safety. Scan area is 240° semicircle with maximum radius 4000mm. Pitch angle is 0.36° and sensor outputs the distance measured at every point (683 steps). Laser beam diameter is less than 20mm at 2000mm with maximum divergence 40mm at 4000mm.

Principle of distance measurement is based on calculation of the phase difference, due to which it is possible to obtain stable measurement with minimum influence from object's color and reflectance.

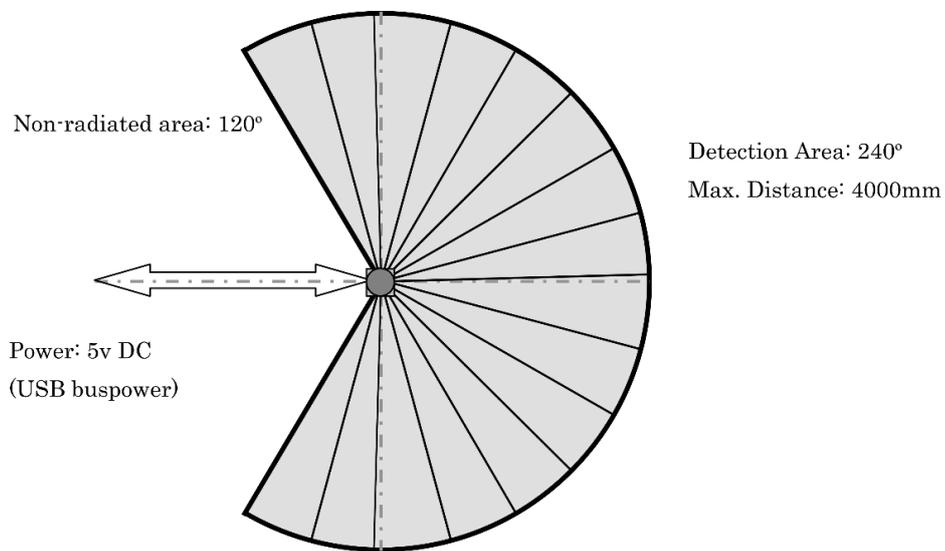


Figure 1

Note

Figure 1 shows the detectable area for white Kent sheet (70mm×70mm). Detection distance may vary with size and object.

2. Important Notice

This sensor is designed for indoor use only.

This sensor is not a safety device/tool

This sensor is not for use in military applications

Read specifications carefully before use.

Title	URG-04LX-UG01 Specification	Drawing No	C-42-3635	2/4
-------	-----------------------------	------------	-----------	-----

3. Specifications

Product Name	Scanning Laser Range Finder
Model	URG-04LX-UG01
Light source	Semiconductor laser diode ($\lambda=785\text{nm}$), Laser safety Class 1 (IEC60825-1)
Power source	5V DC $\pm 5\%$ (USB buspower)
Current consumption	500mA or less (Rush current 800mA)
Detection distance	20mm ~ 4000mm
Accuracy	Distance 20mm ~ 1000mm : $\pm 30\text{mm}^*$ Distance 20mm ~ 4000mm : $\pm 3\%$ of measurement*
Resolution	1 mm
Scan Angle	240°
Angular Resolution	0.36°
Scan Time	100msec/scan
Interface	USB Version 2.0 FS mode (12Mbps)
Ambient (Temperature/Humidity)	-10 ~ 50°C / 85% or less (without dew and frost)
Preservation temperature	-25 ~ 75°C
Ambient Light Resistance	10000Lx or less
Vibration Resistance	Double amplitude 1.5mm 10 ~ 55Hz, 2 hours each in X, Y and Z direction, and 98m/s ² 55Hz ~ 150Hz in 2 minutes sweep, 1 hours each in X, Y and Z direction
Impact Resistance	196 m/s ² , 10 times each in X, Y and Z direction
Protective Structure	Optics : IP64 Case : IP40
Insulation Resistance	10M Ω for DC 500Vmegger
Weight	Approx. 160 g
Case	Polycarbonate
External dimension (W×D×H)	50×50×70mm (Reference design sheet No.3502)

*Under standard test conditions with white Kent sheet 70mm×70mm

4. Quality reference value

Operating Vibration resistance	19.6m/s ² , 10Hz ~ 150Hz with 2 minutes sweep, 0.5 hours each in X, Y and Z direction
Operating Impact resistance	49 m/s ² , 10 times each in X, Y and Z direction
Angular Speed	360 deg/s
Angular Acceleration	$\pi/2$ rad/s ²
Life	5 years (Varies depending upon the operating conditions)
Sound level	25db or less (at 300mm)
FDA	This product complies with 21 CFR parts 1040.10 and 1040.11. (Accession Number 0521258-002)

Title	URG-04LX-UG01 Specification	Drawing No	C-42-3635	3/4
-------	-----------------------------	------------	-----------	-----

5. Interface

CN USB-mini (5 Pin)

Cable is not included. Use commercially available compatible unit.

Note:

Refer specifications number C-42-3320B for communication protocol (SCIP2.0).

6. Notice:

Supply voltage is DC 5Volts. Sensor will damage if high voltage is supplied.

USB buspower may not be sufficient during the start up of URG-04LX-UG01 in some PCs.
Use the auxiliary cable supplied with the sensor to avoid the problem.

The maximum data step is 683 points. Sensor's angular resolution is 0.3515625° ($360^\circ / 1024$ steps) and angular range is 239.765625° ($(683-1) \times 360 / 1024$)

Angular resolution can be specified from the host. Read communication protocol specification (No C-42-3320B) for details.

USB driver is communication device class (CDC) supported by standard operating system. The device is connected as a COM port with the same utility.

Plug and play function is not supported.

Title	URG-04LX-UG01 Specification	Drawing No	C-42-3635	4/4
-------	-----------------------------	------------	-----------	-----

ANEXO B: Especificaciones de los motores Dynamixel Pro

Quick Start for Dynamixel Pro v1.00b

2 Reference

2.1 Default values by model

2.1.1 H Series

i. H54-200-S500-R

Name	Default Value
ID	1
BaudRate	1 (57600bps)
Max Position Limit	251000
Min Position Limit	-251000
Velocity Limit	16600
Current Limit	620
Velocity I Gain	14
Velocity P Gain	399
Position P Gain	32

ii. H54-100-S500-R

Name	Default Value
ID	1
BaudRate	1 (57600bps)
Max Position Limit	251000
Min Position Limit	-251000
Velocity Limit	17000
Current Limit	310
Velocity I Gain	16
Velocity P Gain	256
Position P Gain	32

iii. H42-20-S300-R

Name	Default Value
ID	1
BaudRate	1 (57600bps)
Max Position Limit	151875
Min Position Limit	-151875
Velocity Limit	10300
Current Limit	465
Velocity I Gain	40
Velocity P Gain	440
Position P Gain	32

2.1.2 M Series

i. M54-60-S250-R

Name	Default Value
ID	1
BaudRate	1 (57600bps)

Max Position Limit	125700
Min Position Limit	-125700
Velocity Limit	8000
Current Limit	180
Velocity I Gain	16
Velocity P Gain	256
Position P Gain	32

ii. M54-40-S250-R

Name	Default Value
ID	1
BaudRate	1 (57600bps)
Max Position Limit	125700
Min Position Limit	-125700
Velocity Limit	8000
Current Limit	180
Velocity I Gain	16
Velocity P Gain	256
Position P Gain	32

2.1.3 L Series

i. L54-50-S290-R

Name	Default Value
ID	1
BaudRate	1 (57600bps)
Max Position Limit	103860
Min Position Limit	-103860
Velocity Limit	8000
Current Limit	180
Velocity I Gain	16
Velocity P Gain	256
Position P Gain	32

ii. L54-30-S400-R

Name	Default Value
ID	1
BaudRate	1 (57600bps)
Max Position Limit	144180
Min Position Limit	-144180
Velocity Limit	13000
Current Limit	180
Velocity I Gain	16
Velocity P Gain	256
Position P Gain	32

iii. L42-10-S300-R

Name	Default Value
ID	1
BaudRate	1 (57600bps)
Max Position Limit	151875
Min Position Limit	-151875
Velocity Limit	
Current Limit	
Velocity I Gain	
Velocity P Gain	
Position P Gain	

2.2 Control Table of Dynamixel Pro

(R : Read, RW : Read and Write)

AREA	address	size (byte)	feature	description	type	Default value
EEPROM	0	2	Model Number	Model number	R	-
	6	1	Version of Firmware	Firmware version info	R	-
	7	1	ID	ID of Dynamixel PRO	RW	1
	8	1	Baud Rate	Baud rate	RW	1
	9	1	Return Delay Time	Return delay time	RW	250
	11	1	Operating mode	Operating mode	RW	3
	13	4	Homing offset	Homing value	RW	0
	17	4	Moving threshold	Moving threshold	RW	50
	21	1	Temperature limit	Internal temperature limit	RW	80
	22	2	Max Voltage Limit	Operating upper limit voltage	RW	400
	24	2	Min Voltage Limit	Operating lower limit voltage	RW	150
	26	4	acceleration Limit	Acceleration limit	RW	-
	30	2	Torque limit	Torque limit	RW	-
	32	4	Velocity Limit	Velocity limit	RW	-
	36	4	Max Position Limit	Position upper limit	RW	-
	40	4	Min Position Limit	Position lower limit	RW	-
	44	1	External Port Mode 1	External Port Mode 1	RW	0
	45	1	External Port Mode 2	External Port Mode 2	RW	0
	46	1	External Port Mode 3	External Port Mode 3	RW	0
	47	1	External Port Mode 4	External Port Mode 4	RW	0
	48	1	Shutdown	Shutdown	RW	26
	49	2	Indirect Address 1	Indirect Address 1	RW	634
	51	2	Indirect Address 2	Indirect Address 2	RW	635
	53	2	Indirect Address 3	Indirect Address 3	RW	636
	Indirect Address N	RW	-
569	2	Indirect Address 256	Indirect Address 256	RW	889	

RAM	562	1	Torque Enable	torque On/Off	RW	0
	563	1	LED RED	RED LED intensity value	RW	0
	564	1	LED GREEN	GREEN LED intensity value	RW	0
	565	1	LED BLUE	BLUE LED intensity value	RW	0
	586	2	Velocity I Gain	Velocity I Gain	RW	-
	588	2	Velocity P Gain	Velocity P Gain	RW	-
	594	2	Position P Gain	Velocity P Gain	RW	-
	596	4	Goal position	Target position value	RW	-
	600	4	Goal velocity	Target velocity value	RW	0
	604	2	Goal Torque	Target torque value	RW	0
	606	4	Goal acceleration	Target acceleration value	RW	0
	610	1	Moving	moving	R	-
	611	4	Present position	Current position value	R	-
	615	4	Present velocity	Current velocity	R	-
	621	2	Present Current	Present current value	R	-
	623	2	Present input voltage	Current input voltage	R	-
	625	1	Present temperature	Current internal temperature	R	-
	626	2	External Port Data 1	External Port Data 1	R / RW	0
	628	2	External Port Data 2	External Port Data 2	R / RW	0
	630	2	External Port Data 3	External Port Data 3	R / RW	0
	632	2	External Port Data 4	External Port Data 4	R / RW	0
	634	1	Indirect Data 1	Indirect Data 1	RW	0
	635	1	Indirect Data 2	Indirect Data 2	RW	0
	636	1	Indirect Data 3	Indirect Data 3	RW	0
	Indirect Data N	Indirect Data N ...	RW	0
	889	1	Indirect Data 256	Indirect Data 256	RW	0
	890	1	Registered Instruction	Registered Instruction value	R	0
	891	1	Status Return Level	Status Return Level value	RW	2
892	2	Hardware error status	Hardware error status value	R	0	

2.3 Features (by width size)

2.3.1 54-series (H54, M54, L54)

ANEXO C: Fotos de la experimentación de tele-operación bilateral

